ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1081–1090

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:[536.2+539.219.3]

ОБОБЩЁННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ОБЛАСТЯХ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2021 г. И. Б. Тымчишин, Д. А. Номировский

Изучается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициенты которой являются обобщёнными функциями, описывающая процесс тепло- и массопереноса в областях с тонкими включениями. Доказано, что оператор задачи является непрерывным и инъективным, а также установлена теорема о существовании и единственности обобщённого решения.

DOI: 10.31857/S0374064121080094

Введение. При построении математических моделей процессов тепло- и/или массопереноса в неоднородных средах зачастую возникает необходимость учитывать инородные включения, входящие в рассматриваемую область. Такие включения, расположенные внутри области или на её границе, могут представлять собой тонкие слои краски, оксиды, огнеупорные покрытия, газовые зазоры, разнообразные плёнки и мембраны, разломы и трещины и т.п. При моделировании указанных процессов размером включений, как правило, пренебрегают. Вместо них накладывают так называемые условия сопряжения, учитывающие физические свойства прослойки таким образом, чтобы полученная математическая модель адекватно описывала физический процесс. В результате получают некоторую краевую задачу, обычно в некоторой неодносвязной области. Именно в такой постановке традиционно изучается задача переноса в неоднородных средах, и для неё получены достаточно обширные результаты (см., например, работы [1–12] и представленную в них библиографию). Например, в работах [5–8] разработан метод свёртывания разложений Фурье, позволяющий по известным решениям классических краевых задач строить решения краевых задач с условиями сопряжения.

Для моделирования процессов тепло- и массопереноса в областях с инородными включениями В.Ф. Демченко предложил альтернативный подход [13; 14, гл. II]. Вместо одного уравнения второго порядка, описывающего динамику процесса, рассматривают систему дифференциальных уравнений первого порядка в естественных переменных. В роли “новых” переменных выступают компоненты вектора потока переносимой субстанции. При этом удалённую прослойку (разрез) возвращают в область протекания процесса, а влияние включений, выраженных условиями сопряжения, учитывают при помощи коэффициентов уравнений [13–18].

Такой подход имеет ряд преимуществ перед традиционным. Например, полученные уравнения системы имеют простую физическую интерпретацию: они отражают основные физические законы, описывающие исследуемый процесс. Одно из уравнений (скалярное) выражает закон движения субстанции, второе (векторное) – феноменологический закон её переноса по тому или иному механизму. Наличие нескольких уравнений системы даёт больше свободы для проверки необходимых свойств исследуемых операторов по сравнению с традиционной постановкой. Этот подход, по своей сути, подобен так называемому смешанному методу конечных элементов [19]. Кроме того, при таком способе моделирования область протекания процесса становится односвязной, что часто является существенным преимуществом на этапе численного расчёта модели. Характерной негативной особенностью этого подхода является наличие обобщённых функций в коэффициентах уравнений. В статье [20], основываясь на идее В.Ф. Демченко, построена математическая модель процессов переноса для параболических систем с различными условиями сопряжения, в частности идеального контакта, неидеального контакта, сосредоточенного собственного источника, а также исследована связь полученной модели с классической и слабой постановками задачи.

Целью данной работы является исследование свойств (непрерывности и инъективности) построенного в работе [20] оператора, а также доказательство теоремы о существовании и единственности решения. Эти утверждения обобщают результаты статьи [16].

1. Основные множества, пространства и обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная односвязная область с регулярной границей $\partial\Omega$, разбитая достаточно гладкой гиперповерхностью Ω_0 на две односвязные области Ω_+ и Ω_- с регулярными границами. Таким образом, множество Ω можно представить в виде дизъюнктного объединения $\Omega = \Omega_+ \bigcup \Omega_0 \bigcup \Omega_-$, где $\overline{\Omega}_0 = \overline{\Omega}_+ \bigcap \overline{\Omega}_-$, а $\overline{\Omega}_+$, $\overline{\Omega}_-$ и $\overline{\Omega}_0$ – замыкания в $\mathbb{R}^m$ соответственно множеств Ω_+, Ω_- и Ω_0. Обозначим $Q_+ = (0,T)\times\Omega_+$, $Q_- = (0,T)\times\Omega_-$, $Q_0 = (0,T)\times\Omega_0$.

Через $C^k(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, где $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, будем обозначать множество функций $u(t,\vec{\xi}) \in C^k(Q_+\bigcup Q_-)$, допускающих продолжение с сохранением гладкости из множеств Q_+ и Q_- в $\overline{Q}_+$ и $\overline{Q}_-$ соответственно. Аналогично определим множество функций $C^k(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$.

Пусть $K = (k_{ij})$ – симметричная $m\times m$-матрица, элементами которой являются функции $k_{ij} \in C^2(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$ и для которой выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m k_{ij}(\vec{\xi})\lambda_i\lambda_j \geqslant C_K \sum_{i=1}^m \lambda_i^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \vec{\xi} \in \Omega_+ \bigcup \Omega_-,$$

где $C_K > 0$ – постоянная, не зависящая от $\vec{\xi}$.

Будем изучать параболические операторы L и L^+ следующего вида:

$$Lu = u_t + hu - \sum_{i,j=1}^m (k_{ij}u_{\xi_j})_{\xi_i} + \sum_{i=1}^m (v_i u)_{\xi_i},$$

$$L^+q = -q_t + hq - \sum_{i,j=1}^m (k_{ij}q_{\xi_j})_{\xi_i} - \sum_{i=1}^m v_i q_{\xi_i},$$

где $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$, $(t,\vec{\xi}) \in Q_+\bigcup Q_-$, $h \in C^0(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$, $h \geqslant 0$, $v_i \in C^1(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$. Обозначим i-ю координату вектора $K^{-1}\vec{v}$ через $\bar{k}_i$.

Считаем, что операторы L и L^+ определены на множествах $D(L)$ и $D(L^+)$ функций класса $C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, удовлетворяющих соответственно краевым условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\vec{\xi}\in\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$$q|_{t=T} = 0, \quad q|_{\vec{\xi}\in\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Пусть $\bar{D}(L)$ и $\bar{D}(L^+)$ – множества функций из ортогональных дополнений множеств $\ker L$ и $\ker L^+$ до $C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ относительно скалярного произведения пространства $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, удовлетворяющих соответственно условиям (1) и (2).

Определим следующие пространства: W – пополнение множества $D(L)$, а H – множества $D(L^+)$ соответственно по нормам

$$\|u\|_W^2 = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t^2 + \sum_{i=1}^m u_{\xi_i}^2\, dQ, \quad \|q\|_H^2 = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} q^2 + \sum_{i=1}^m q_{\xi_i}^2\, dQ.$$

Кроме того, пусть $\bar{W}$ и $\bar{H}$ – пополнения соответственно множеств $\bar{D}(L)$ и $\bar{D}(L^+)$ по норме

$$\|u\|_{\bar{W}}^2 = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^m u_{\xi_i\xi_j}^2\, dQ.$$

Для функции $\varphi \in C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ введём следующие обозначения:

$$\varphi^+(t,\vec{\xi}_0) = \lim_{\substack{\vec{\xi}\to\vec{\xi}_0 \\ \vec{\xi}\in\Omega_+}} \varphi(t,\vec{\xi}), \quad \varphi^-(t,\vec{\xi}_0) = \lim_{\substack{\vec{\xi}\to\vec{\xi}_0 \\ \vec{\xi}\in\Omega_-}} \varphi(t,\vec{\xi}),$$

$$[\varphi](t,\vec{\xi}_0) = \varphi^+(t,\vec{\xi}_0) - \varphi^-(t,\vec{\xi}_0), \quad (t,\vec{\xi}_0) \in Q_0.$$

Такие же обозначения будем использовать и для других функций, имеющих корректно определённые следы на Q_0.

Через $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$ будем обозначать пополнение множества $(C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ по норме

$$\|\vec{\omega}\|^2_{L_2^m(Q,Q_0^{\pm})} = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} \sum_{i=1}^m \omega_i^2\, dQ + \int\limits_{Q_0} ((\vec{\omega},\vec{n})^+)^2 + ((\vec{\omega},\vec{n})^-)^2\, dQ_0.$$

Здесь и далее через $\vec{n}$ обозначается вектор нормали к Ω_0, внешний по отношению к области Ω_-.

Для изучения задачи в постановке В.Ф. Демченко определим следующие произведения:

$$X = W \times L_2^m(Q, Q_0^{\pm}), \quad Y = H \times L_2^m(Q, Q_0^{\pm}),$$

$$\bar{X} = \bar{W} \times L_2^m(Q, Q_0^{\pm}), \quad \bar{Y} = \bar{H} \times L_2^m(Q, Q_0^{\pm}).$$

Заметим, что имеют место вложения $\bar{X} \subset X$, $\bar{Y} \subset Y$.

Через W^* и H^* обозначим соответственно негативные пространства к W и H относительно пространства $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$. Аналогичным образом введём негативное пространство $(L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ относительно $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$. Это означает, что сопряжённые пространства X^* и Y^* равны $W^* \times (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ и $H^* \times (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ соответственно.

Значение функционала l, принадлежащего некоторому негативному пространству, например H^*, на элементе v из соответствующего позитивного пространства H будем обозначать $\langle l, v\rangle_H$.

2. Оператор задачи. Рассмотрим параболическое уравнение $Lu = f(t,\vec{\xi})$, описывающее процесс переноса в областях Ω_+ и Ω_-, где $(t,\vec{\xi}) \in Q_+\bigcup Q_-$. Представим его в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + hu + \operatorname{div}\vec{\omega} = f, \tag{3}$$

$$\vec{\omega} = -K \operatorname{grad} u + \vec{v}u, \tag{4}$$

где неизвестными переменными являются функция u и вектор потока $\vec{\omega}$.

Функция u удовлетворяет краевым условиям (1) и следующим условиям сопряжения на Q_0:

$$[u] + a_1(\xi)(\vec{\omega},\vec{n})^+ + a_2(\xi)(\vec{\omega},\vec{n})^- = f_a(t,\xi), \tag{5}$$

$$[(\vec{\omega},\vec{n})] + b_1(\xi)u^+ + b_2(\xi)u^- = f_b(t,\xi), \tag{6}$$

где $(t,\xi) \in Q_0$, $a_i, b_i \in C(\overline{\Omega}_0)$. Такие условия обобщают многие классические однородные и неоднородные условия сопряжения, отвечающие различным механизмам переноса через однослойное или многослойное включения, например, идеального контакта $([u] = 0, [(\vec{\omega},\vec{n})] = 0)$, неидеального контакта $([u] + a(\vec{\omega},\vec{n})^{\pm} = 0,\ [(\vec{\omega},\vec{n})] = 0)$, неидеального контакта через трёхслойное включение $([u] + a_1(\vec{\omega},\vec{n})^+ + a_2(\vec{\omega},\vec{n})^- = 0,\ [(\vec{\omega},\vec{n})] = f_b)$, сосредоточенного собственного источника $([u] = 0, [(\vec{\omega},\vec{n})] = \alpha u^{\pm})$, сосредоточенного внешнего источника $([u] = 0, [(\vec{\omega},\vec{n})] = f_b)$ и т.п. Отметим, что условия сопряжения (5) и (6) описывают не все важные случаи контактов сред. Например, в работе [5] рассматриваются условия сопряжения, содержащие вторую производную по пространственной переменной.

Следуя работе [20], рассмотрим задачу (3) и (4) с условиями (1), (5) и (6) в обобщённой постановке
$$\mathcal{L}x = F, \quad \mathcal{L} : X \to Y^*,$$
где $x = (u, \vec{\omega}) \in X$, $F = (F_1, \vec{F_2}) \in Y^*$. Сам оператор $\mathcal{L}$ задаётся символической матрицей
$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{N} & \mathcal{D}iv \\ \mathcal{G}rad & \mathcal{M} \end{bmatrix}, \tag{7}$$
где $\mathcal{N} : W \to H^*$, $\mathcal{D}iv : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to H^*$, $\mathcal{G}rad : W \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$, $\mathcal{M} : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ – линейные операторы, которые для функций $u \in D(L)$, $\vec{\omega} \in (C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$, $q \in D(L^+)$, $\vec{\eta} \in (C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ и некоторых $p_i, s_i \in C(\overline{Q}_0)$ действуют следующим образом:
$$\langle \mathcal{N}u, q\rangle_H = \int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} u_t q + huq\, dQ + \int\limits_{Q_0} (b_1 u^+ + b_2 u^-)(p_1 q^+ + p_2 q^-)\, dQ_0,$$
$$\langle \mathcal{D}iv\, \vec{\omega}, q\rangle_H = -\int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} \sum_{i=1}^m \omega_i q_{\xi_i}\, dQ + \int\limits_{Q_0} [(\vec{\omega}, \vec{n})](p_1 q^+ + p_2 q^-) - (\vec{\omega}, \vec{n})^+ q^+ + (\vec{\omega}, \vec{n})^- q^-\, dQ_0,$$
$$\langle \mathcal{G}rad\, u, \vec{\eta}\rangle_{L_2^m(Q, Q_0^{\pm})} = \sum_{i=1}^m \int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} u_{\xi_i}\eta_i - \bar{k}_i u \eta_i\, dQ + \int\limits_{Q_0} [u](s_1(\vec{\eta}, \vec{n})^+ + s_2(\vec{\eta}, \vec{n})^-)\, dQ_0,$$
$$\langle \mathcal{M}\vec{\omega}, \vec{\eta}\rangle_{L_2^m(Q, Q_0^{\pm})} = \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{Q_+ \bigcup Q_-} k_{ij}^{-1} \omega_j \eta_i\, dQ +$$
$$+ \int\limits_{Q_0} (a_1(\vec{\omega}, \vec{n})^+ + a_2(\vec{\omega}, \vec{n})^-)(s_1(\vec{\eta}, \vec{n})^+ + s_2(\vec{\eta}, \vec{n})^-)\, dQ_0.$$

Из определений операторов матрицы (7) следует, что в рассматриваемой постановке коэффициенты дифференциальных уравнений являются суммами регулярных функций, определённых в областях Q_+ и Q_-, и обобщённых дельта-функций Дирака, сосредоточенных на одной или на другой стороне гиперповерхности Q_0. Регулярная часть коэффициентов порождается коэффициентами уравнений (3) и (4), а сингулярная – коэффициентами условий сопряжения (5) и (6).

Применяя неравенство Гёльдера, несложно показать непрерывность операторов матрицы (7).

Лемма 1. *Линейные операторы* $\mathcal{N} : W \to H^*$ *и* $\mathcal{G}rad : W \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ *непрерывны на* $D(L)$.

Лемма 2. *Линейные операторы* $\mathcal{D}iv : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to H^*$ *и* $\mathcal{M} : L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ *непрерывны на* $(C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$.

Продолжим операторы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{G}rad$ по непрерывности на всё пространство W, сохраняя для них прежнее обозначение. Аналогично поступим и с операторами $\mathcal{D}iv$ и $\mathcal{M}$ – продолжим их по непрерывности на всё пространство $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$. Таким образом, можно считать, что оператор $\mathcal{L} : X \to Y^*$ определён на всём пространстве X и является непрерывным на X.

Введём линейный и непрерывный оператор $\mathcal{L}^+ : Y \to X^*$ таким образом, чтобы для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнялось равенство $\langle \mathcal{L}x, y\rangle_Y = \langle \mathcal{L}^+ y, x\rangle_X$. Определим также сужение $\bar{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ на множество $\bar{X}$ и сужение $\bar{\mathcal{L}}^+$ оператора $\mathcal{L}^+$ на множество $\bar{Y}$. Отметим, что операторы $\bar{\mathcal{L}} : \bar{X} \to Y^*$ и $\bar{\mathcal{L}}^+ : \bar{Y} \to X^*$ непрерывны.

3. Инъективность оператора. Для произвольных векторов (вектор-функций) u и v через $\langle u, v\rangle$ будем обозначать их скалярное произведение. Кроме того, будем использовать обозначение $\nabla q = (q_{\xi_i})_{i=\overline{1,m}}$ для вектора производных функции q.

Положим

$$\mathcal{I}_x(y) = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq - \langle\vec{\omega}, \nabla q\rangle + \langle\nabla u, \vec{\eta}\rangle - \langle K^{-1}\vec{v}u, \vec{\eta}\rangle + \langle K^{-1}\vec{\omega}, \vec{\eta}\rangle\, dQ.$$

В зависимости от контекста линейный оператор $\mathcal{I}$ будем рассматривать как действующий в парах пространств $\mathcal{I}: X \to Y^*$ или в парах пространств $\mathcal{I}: \bar{X} \to Y^*$. Заметим, что в обоих случаях он является ограниченным и всюду определённым.

Далее будем использовать следующее обозначение: $\zeta(u,\vec{\omega}) = \nabla u - K^{-1}\vec{v}u + K^{-1}\vec{\omega}$.

Лемма 3. *Для произвольной постоянной $C > 0$ и для всех $x = (u,\vec{\omega}) \in X$ таких, что $\zeta(x)$ – ненулевой элемент в $L_2^m(Q, Q_0^\pm)$, существует $y = (q,\vec{\eta}\,) \in Y$, при котором выполняется неравенство*

$$\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Лемму 3 легко доказать, положив $q \equiv 0$, $\vec{\eta} = C_x\zeta(x)\rho$, где $\rho: Q_+\bigcup Q_- \to \mathbb{R}$ – расстояние до $\overline{Q}_0$, а $C_x > 0$ – достаточно большая постоянная, зависящая от $x \in X$. Несложно убедиться, что введённый таким образом элемент $y = (q,\vec{\eta}\,)$ принадлежит пространству Y. Аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда $x = (u,\vec{\omega}) \in \bar{X}$, $y = (q,\vec{\eta}\,) \in Y$.

Лемма 4. *Для произвольной постоянной $C > 0$ и для всех $x = (u,\vec{\omega}) \in \bar{X}$ таких, что $\zeta(x)$ – нулевой элемент в $L_2^m(Q, Q_0^\pm)$, существует $y = (q,\vec{\eta}\,) \in Y$, при котором выполняется неравенство*

$$\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$\mathcal{I}_x(y) = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq - \sum_{i=1}^m v_i u q_{\xi_i} + \sum_{i,j=1}^m k_{ij} u_{\xi_j} q_{\xi_i}\, dQ. \tag{9}$$

Обозначим $\sum_{j=1}^m k_{ij}u_{\xi_j}$ через k_i, а вектор, элементами которого являются k_i, – через $\vec{k}$. Тогда равенство (9) можно записать следующим образом:

$$\mathcal{I}_x(y) = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq + \sum_{i=1}^m ((v_i u)_{\xi_i} - (k_i)_{\xi_i})q\, dQ + \int\limits_{Q_0} [(\vec{v}uq, \vec{n})] - [(\vec{k}q, \vec{n})]\, dQ_0. \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда Lu – ненулевой элемент в $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$. Положим $q_0 = C_x Lu \in L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, где C_x – некоторая положительная постоянная. Тогда существует такое $q_\varepsilon \in C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, что $q_\varepsilon^+ = q_\varepsilon^- = 0$ и $\|q_0 - q_\varepsilon\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Выберем $q_{\varepsilon\delta} \in C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\|q_{\varepsilon\delta} - q_\varepsilon\|_C < \delta$, где $\|\cdot\|_C$ – равномерная норма. Заменив в равенстве (10) y на $(q_{\varepsilon\delta}, \vec{0}\,) \in Y$, получим

$$\mathcal{I}_x(y) = C_x\|Lu\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + O(\varepsilon,\delta),$$

где $O(\varepsilon,\delta)$ – такая функция, что $O(\varepsilon,\delta) \to 0$ при $\varepsilon, \delta \to 0$. Таким образом, выбирая достаточно большое C_x, а потом достаточно малые ε и δ, получим сколь угодно большое $\mathcal{I}_x(y)$. Следовательно, существует такая функция q, что выполняется неравенство (8).

Если Lu – нулевой элемент в $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, то $u \equiv 0$. Это следует из определения пространств $\bar{W}$ и $\bar{D}(L)$. В этом случае, разумеется, неравенство (8) также остаётся верным.

Из лемм 3 и 4 вытекает справедливость следующих двух утверждений.

Лемма 5. *Существует такая постоянная $C > 0$, что для каждого $x = (u,\vec{\omega}) \in \bar{X}$ найдётся $y \in Y$, при котором справедливо неравенство $\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}$.*

Лемма 6. *Если* $\vec{v} \equiv 0$, *то для произвольной постоянной* $C > 0$ *и для всех* $x = (u, \vec{\omega}) \in X$ *таких, что* $\zeta(x) \equiv 0$, *существует* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, *при котором выполняется неравенство*

$$\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}.$$

Последнюю лемму легко доказать, положив $\vec{\eta} = 0$, $q = -C\int_T^t u(\tau, \vec{\xi})d\tau$ и оценив каждое из слагаемых, входящих в $\mathcal{I}_x(y)$, по отдельности.

Из лемм 3 и 6 следует

Лемма 7. *Если* $\vec{v} \equiv 0$, *то существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для каждого* $x = (u, \vec{\omega}) \in X$ *найдётся* $y \in Y$, *при котором имеет место неравенство* $\mathcal{I}_x(y) \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}$.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{A} : \bar{X} \to Y^*$ *– такой оператор, что для всех* $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ *и* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$ *выполняется равенство*

$$\langle \bar{A}x, y\rangle_Y = \mathcal{I}_x(y) + \varphi(x, y), \tag{11}$$

где $\varphi : \bar{X} \times Y \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция, для которой при всех* $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ *и* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, $q^- = q^+ = 0$, $\vec{\eta}^{\,-} = \vec{\eta}^{\,+} = \vec{0}$, *верно равенство* $\varphi(x, y) = 0$. *Тогда существует такая постоянная* $C > 0$, *что для любого* $x = (u, \vec{\omega}) \in \bar{X}$ *найдётся* $y = (q, \vec{\eta}\,) \in Y$, *при котором имеет место неравенство*

$$\langle \bar{A}x, y\rangle_Y \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое достаточно малое число. Определим множество

$$Q_0^\varepsilon = \{(t, \vec{\xi}\,) \in Q_+ \textstyle\bigcup Q_- : \rho(\vec{\xi}, \Omega_0) < \varepsilon\},$$

где $\rho(\vec{\xi}, \Omega_0)$ – расстояние от точки $\vec{\xi}$ до поверхности Ω_0 в $\mathbb{R}^m$.

Зафиксируем $x \in \bar{X}$ и выберем для него $y_0 = (q_0, \vec{\eta}_0) \in Y$, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathcal{I}_x(y)|_{y=y_0} \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)}, \tag{13}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от x и y. Согласно лемме 5 такая постоянная существует. Из неравенства (13) следует, что

$$\langle \bar{A}x, y_0\rangle_Y \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)} + \varphi(x, y_0).$$

Возьмём функцию $q_1 \in \bar{D}(L^+)$ такую, чтобы для неё выполнялось неравенство

$$\langle \bar{A}x, y_1\rangle_Y \geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+ \bigcup Q_-)} + \varphi(x, y_0) + O(\|q_0 - q_1\|_{\bar{W}}),$$

где $y_1 = (q_1, \vec{\eta}_0)$. Заметим, что вследствие плотности множества $\bar{D}(L^+)$ в $\bar{H}$ значение величины $O(\|q_0 - q_1\|_{\bar{W}})$ можно сделать сколь угодно малым.

Положим

$$q_\varepsilon(t, \vec{\xi}\,) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} q_1(t, \vec{\xi}\,)\rho(\vec{\xi}, \Omega_0), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \in Q_0^\varepsilon, \\ q_1(t, \vec{\xi}\,), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \notin Q_0^\varepsilon, \end{cases}$$

$$\vec{\eta}_\varepsilon(t, \vec{\xi}\,) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} \vec{\eta}_0(t, \vec{\xi}\,)\rho(\vec{\xi}, \Omega_0), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \in Q_0^\varepsilon, \\ \vec{\eta}_0(t, \vec{\xi}\,), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \notin Q_0^\varepsilon. \end{cases} \tag{14}$$

Функция q_ε является непрерывной, но не обязательно дважды непрерывно дифференцируемой. Для корректности выкладок найдём такую функцию $q_{\varepsilon\delta} \in C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, чтобы выполнялось неравенство $\|q_\varepsilon - q_{\varepsilon\delta}\|_C < \varepsilon_\delta$, где $\|\cdot\|_C$ – равномерная норма на $C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$.

Таким образом, $y_\varepsilon = (q_{\varepsilon\delta}, \vec{\eta}_\varepsilon)$, очевидно, принадлежит пространству Y.

Из условий теоремы следует, что функция φ является непрерывной на $\bar{X}\times Y$, причём $\varphi\equiv 0$, когда $q^-=q^+=0$, $\vec{\eta}^{\,-}=\vec{\eta}^{\,+}=\vec{0}$. Поэтому можно выбрать такое $\varepsilon_\delta>0$, что

$$\varphi(x,y_{\varepsilon\delta})\geqslant -\frac{C}{4}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что имеет место равенство $\mathcal{I}_x(y_\varepsilon)=\mathcal{I}_x(y_0)+O(\varepsilon_\delta+\varepsilon+\|q_0-q_1\|_{\bar{W}})$. Из неравенства (13) вытекает существование таких $\varepsilon_\delta>0$, $\varepsilon>0$ и $q_1\in\bar{D}(L^+)$, что

$$\mathcal{I}_x(y_\varepsilon)\geqslant\frac{3C}{4}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)},\quad O(\varepsilon_\delta+\varepsilon)\geqslant -\frac{C}{4}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}. \tag{16}$$

В силу неравенств (15) и (16) и равенства (11) получаем

$$\langle\bar{A}x,y\rangle_Y|_{y=y_\varepsilon}\geqslant\frac{C}{2}\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Таким образом, найдётся такая постоянная $C>0$, что для произвольного $x\in\bar{X}$ существует $y\in Y$, при котором верно неравенство (12). Теорема доказана.

Следствие 1. *Существует такая постоянная $C>0$, что для всех $x=(u,\vec{\omega})\in\bar{X}$ найдётся $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, при котором справедливо неравенство*

$$\langle\bar{\mathcal{L}}x,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для сопряжённого оператора $\bar{\mathcal{L}}^+$.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $A:X\to Y^*$ – такой оператор, что для всех $x=(u,\vec{\omega})\in X$ и $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$ выполняется равенство*

$$\langle Ax,y\rangle_Y=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_tq+huq-\langle\vec{\omega},\nabla q\rangle+\langle\nabla u,\vec{\eta}\rangle+\langle K^{-1}\vec{\omega},\vec{\eta}\rangle\,dQ+\varphi(x,y), \tag{17}$$

где $\varphi:X\times Y\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, для которой при всех $x=(u,\vec{\omega})\in X$ и $y==(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, $q^-=q^+=0$, $\vec{\eta}^{\,-}=\vec{\eta}^{\,+}=\vec{0}$, верно равенство $\varphi(x,y)=0$. Тогда существует такая постоянная $C>0$, что для любого $x=(u,\vec{\omega})\in X$ найдётся $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, при котором имеет место неравенство

$$\langle Ax,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Следствие 2. *Пусть $\vec{v}\equiv 0$, тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для всех $x=(u,\vec{\omega})\in X$ существует $y=(q,\vec{\eta}\,)\in Y$, при котором*

$$\langle\mathcal{L}x,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Аналогичное утверждение выполняется и для сопряжённого оператора $\mathcal{L}^+$.

Теорема 3. *Оператор $\bar{A}:\bar{X}\to Y^*$, заданный равенством (11), инъективен.*

Доказательство. Пусть $x=(u,\vec{\omega})\in\ker\bar{A}$. Из теоремы 1 следует существование такого $y\in Y$, что

$$0=\langle\bar{A}x,y\rangle_Y\geqslant C\|u\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Отсюда сразу получаем, что $u=0$ в $L_2(Q_+\bigcup Q_-)$, а следовательно, и в $\bar{W}$. Поэтому $x=(0,\vec{\omega})$. Таким образом, имеет место равенство

$$\langle\bar{A}x,y\rangle_Y=\int\limits_{Q_+\bigcup Q_-}-\langle\vec{\omega},\nabla q\rangle+\langle K^{-1}\vec{\omega},\vec{\eta}\rangle\,dQ+\varphi(x,y)\Big|_{u=0}. \tag{18}$$

Пусть $\vec{\eta}_0 = K\vec{\omega}$. Рассмотрим функцию $\vec{\eta}^*$, определённую соотношением (14). Заменив в равенстве (18) y на $(0, \vec{\eta}^*)$, получим

$$\langle \bar{A}x, y\rangle_Y\Big|_{y=(0,\vec{\eta}^*)} = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} \langle \vec{\omega}, \vec{\omega}\rangle\, dQ + O(\varepsilon).$$

Поскольку $\langle \bar{A}x, y\rangle_Y = 0$, заключаем, что $\vec{\omega} = \vec{0}$. Отсюда $x = 0$.

Таким образом, оператор $\bar{A} : \bar{X} \to Y^*$ является инъективным.

Следствие 3. *Оператор* $\bar{\mathcal{L}} : \bar{X} \to Y^*$ *инъективен.*

Рассуждая аналогично, можно доказать инъективность оператора $\bar{\mathcal{L}}^+ : \bar{Y} \to X^*$, а также справедливость следующей теоремы и следствия из неё.

Теорема 4. *Оператор* $A : X \to Y^*$, *заданный равенством (17), инъективен.*

Следствие 4. *Пусть* $\vec{v} \equiv 0$, *тогда операторы* $\mathcal{L} : X \to Y^*$ *и* $\mathcal{L}^+ : Y \to X^*$ *инъективны.*

4. Свойства параболической модели в областях с тонкими включениями. Рассмотрим следующие множества:

$$D_t^1 = \{u \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-) : u|_{t=0} = 0, \quad [u] = 0\},$$

$$D_\xi^1 = \{u \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-) : u|_{\vec{\xi}\in\partial\Omega} = 0, \quad [u] = 0\}.$$

Пусть W_1 и H_1 – пополнения множеств $D_t^1 \bigcap D_\xi^1$ и D_ξ^1 по нормам $\|\cdot\|_W$ и $\|\cdot\|_H$ соответственно. Заметим, что $W_1 \subset W$ и $H_1 \subset H$.

Кроме того, пусть $X_1 = W_1 \times L_2^m(Q, Q_0^\pm)$ и $Y_1 = H_1 \times L_2^m(Q, Q_0^\pm)$. Введём негативные относительно $L_2(Q_+ \bigcup Q_-)$ пространства X_1^* и Y_1^*.

При условии $\vec{v} \equiv 0$ рассмотрим сужение $\mathcal{L}_1 : X_1 \to Y_1^*$ оператора $\mathcal{L}$ на X_1, а также сужение $\mathcal{L}_1^+ : Y_1 \to X_1^*$ оператора $\mathcal{L}_1^+$ на Y_1. Понятно, что доказанные свойства непрерывности и инъективности операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^+$ переносятся и на операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^+$.

Теорема 5. *Если выполняются условия*

$$p_1(t, \vec{\xi}\,) + p_2(t, \vec{\xi}\,) \equiv B_p(\vec{\xi}\,), \quad B_p(b_1 + b_2) \geqslant 0, \tag{19}$$

где B_p *– не зависящая от* t *функция, то существует такая постоянная* $C > 0$, *что при всех* $y \in Y_1$ *выполняется неравенство* $\|\mathcal{L}_1^+ y\|_{X_1^*} \geqslant C\|q\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $y = (q, \vec{\eta})$, где $q \in D_\xi^1$, $\vec{\eta} \in (C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $Q_0^\varepsilon = \{(t, \vec{\xi}\,) \in Q_+ \bigcup Q_- : \rho(\vec{\xi}, \Omega_0) < \varepsilon\}$. Положим $x = (u, \vec{\omega}) \in X_1$, где

$$u = \int\limits_0^t q(\tau, \vec{\xi})d\tau, \quad \vec{\omega} = \begin{cases} -K\nabla u\rho(\vec{\xi}, \Omega_0), & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \in Q_0^\varepsilon, \\ -K\nabla u, & \text{если} \quad (t, \vec{\xi}\,) \notin Q_0^\varepsilon. \end{cases}$$

В силу равенств $\vec{v} \equiv 0$, $[u] \equiv 0$ и $[q] \equiv 0$ имеем

$$\langle \mathcal{L}_1^+ y, x\rangle_{X_1} = \int\limits_{Q_+\bigcup Q_-} u_t q + huq - \langle \vec{\omega}, \nabla q\rangle + \langle \nabla u, \vec{\eta}\rangle + \langle K^{-1}\vec{\omega}, \vec{\eta}\rangle\, dQ +$$

$$+ \int\limits_{Q_0} (b_1 + b_2)(p_1 + p_2)u_+ q_+\, dQ_0.$$

Отсюда при достаточно малом ε вытекает оценка

$$\langle \mathcal{L}_1^+ y, x\rangle_{X_1^*\times X_1} \geqslant C\|y\|_1^2, \tag{20}$$

в которой $\|y\|_1$ – полунорма элемента $y,$ заданная равенством

$$\|y\|_1^2 = \|q\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\Omega_+\bigcup\Omega_-} \left(\int\limits_0^t q_{\xi_i}(\tau,\vec{\xi})d\tau\right)^2 d\Omega.$$

Покажем, что существует такая постоянная $C>0,$ при которой верно неравенство $\|x\|^2_{X_1} \leqslant \leqslant C\|y\|_1^2.$ Действительно,

$$\|x\|^2_{X_1} = \|u_t\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \|u_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \|\vec{\omega}\|^2_{L_2^m(Q,Q_0^\pm)} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u_t\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \|u_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|q\|^2_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\Omega_+\bigcup\Omega_-} \left(\int\limits_0^t q_{\xi_i}(\tau,\vec{\xi})d\tau\right)^2 d\Omega\right) = C\|y\|_1^2.$$

Применяя неравенство Шварца к левой части оценки (20), получаем $\|\mathcal{L}_1^+ y\|_{X_1^*}\|x\|_{X_1} \geqslant \geqslant C\|y\|_1^2,$ а значит,

$$\|\mathcal{L}_1^+ y\|_{X_1^*} \geqslant C\|y\|_1 \geqslant C\|q\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}.$$

Теорема 6. *Если выполняются условия (19), то для произвольной правой части* $F \in \in S_1 = \{(f,\vec{0}\,) : f \in L_2(Q_+\bigcup Q_-)\}$ *существует единственный элемент* $x \in X_1,$ *для которого в пространстве* Y_1^* *выполняется равенство* $\mathcal{L}_1 x = F.$

Доказательство. Опираясь на установленные выше свойства оператора $\mathcal{L}_1,$ теорему можно доказать, используя общую связь между корректной разрешимостью сопряжённого оператора и разрешимостью всюду прямого оператора [21, гл. III]. Таким методом доказаны теоремы единственной разрешимости параболических уравнений с некоторыми условиями сопряжения, например, в работах [3, 17].

Пусть $F \in S_1.$ В силу теоремы 5 имеем

$$|\langle F,y\rangle_{Y_1}| = |(f,q)_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)}\|q\|_{L_2(Q_+\bigcup Q_-)} \leqslant C\|\mathcal{L}_1^+ y\|_{X_1^*}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{L}_1^+$ инъективен, то на $\operatorname{Im}\mathcal{L}_1^+ \subset X_1^*$ можно определить линейный ограниченный функционал $l(w) = \langle F,y\rangle_{Y_1},$ $w = \mathcal{L}_1^+ y.$ По теореме Хана–Банаха расширим функционал l на X_1^* с сохранением линейности и непрерывности. Тогда из теоремы Рисса–Шварца следует существование такого элемента $x \in X_1,$ при котором $l(w) = \langle w,x\rangle_{X_1}.$ Таким образом, для всех $y \in Y$ выполняется равенство

$$\langle F,y\rangle_{Y_1} = l(\mathcal{L}_1^+ y) = \langle \mathcal{L}_1^+ y, x\rangle_{X_1} = \langle \mathcal{L}_1 x, y\rangle_{Y_1},$$

откуда $\mathcal{L}_1 x = F$ в $Y_1^*.$ Единственность решения следует из инъективности оператора $\mathcal{L}_1.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. New York, 1980.
2. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев, 1998.
3. *Семенов В.В.* Разрешимость параболической задачи сопряжения с условием обобщенного собственного сосредоточенного источника // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 6. С. 836–843.

4. *Номировский Д.А.* Приближенный метод решения краевой задачи для параболического уравнения с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 6. С. 1045–1057.
5. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550–1556.
6. *Холодовский С.Е.* Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 7. С. 1209–1213.
7. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
8. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204–1208.
9. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев, 2009.
10. *Холодовский С.Е.* О решении краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости с трехслойным пленочным включением // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1697–1702.
11. *Холодовский С.Е.* О решении краевых задач для уравнения Лапласа в шаре, ограниченном многослойной плёнкой // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 919–926.
12. *Kholodovskii S.E.* Solution of boundary value problems in cylinders with two-layer film inclusions // J. of Math. Sci. 2018. V. 230. № 1. P. 55–59.
13. *Ляшко И.И., Демченко В.Ф.* Обобщенные формулировки задач тепло- и массопереноса в слоистых средах. Киев, 1987. – (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 87–14).
14. *Ляшко И.И., Демченко В.Ф., Демченко Л.И.* Численное моделирование процессов тепломассопереноса. Киев, 1988.
15. *Ляшко С.И., Номировский Д.А.* Обобщенная разрешимость и оптимизация параболических систем в областях с тонкими слабопроницаемыми включениями // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 5. С. 131–142.
16. *Номировский Д.А.* Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390–1399.
17. *Nomirovskii D.* Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // J. of Differ. Equat. 2007. V. 233. № 1. P. 1–21.
18. *Demchenko V.F., Pavlyk V.O., Dilthey U. et al.* Problems of heat, mass and charge transfer with discontinuous solutions // European J. of Appl. Math. 2011. V. 22. № 4. P. 365–380.
19. *Mercier B., Osborn J., Rappaz J., Raviart P-A.* Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods // Math. of Comput. 1981. V. 36. № 154. P. 427–453.
20. *Номировский Д.А., Востриков А.И.* Обобщенные постановки и свойства моделей процессов переноса в областях с разрезами // Кибернетика и системный анализ. 2016. Т. 52. № 6. С. 114–126.
21. Функциональный анализ. / Под. общ. ред. С.Г. Крейна. М., 1972.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступила в редакцию 04.07.2019 г.
После доработки 26.03.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.