ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1091–1097

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© 2021 г. Р. С. Хайруллин

Для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0$ с параметром $\alpha\leqslant -1/2$, заданного в смешанной области – прямоугольнике $[0,1]\times[-\beta,\gamma]$, где $\beta>0$ и $\gamma>0$, исследуется задача А.А. Дезина, в которой на вертикальных сторонах прямоугольника задано условие периодичности, на верхней стороне – значения искомой функции, на особой линии определены условия склеивания и задано нелокальное условие, связывающее значения искомой функции на особой линии со значениями нормальной производной этой функции на нижней стороне. Решение задачи построено в виде ряда. Найдены достаточные условия на заданные функции и параметры β и γ, обеспечивающие существование решения. Установлен критерий единственности.

DOI: 10.31857/S0374064121080100

1. Постановка задачи. В настоящее время много внимания уделяется исследованию разрешимости различных краевых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях (см., например, [1–9]). Основным методом их решения является некоторый аналог метода Фурье, приспособленный к уравнениям смешанного типа. Такой подход к изучению указанных задач предложен К.Б. Сабитовым в работе [1]. Автором в работах [10–13] этот подход распространён на уравнения с сильным вырождением, а именно, были изучены задача Дирихле и задача с условием периодичности.

В данной статье рассматривается нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0,\quad \alpha\leqslant -1/2, \tag{1}$$

в смешанной области $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -\beta<y<\gamma\}$, где $\beta>0$ и $\gamma>0$, при этом существенно применяются результаты предыдущих работ автора. В частности, здесь используются общая схема этих работ, а также некоторые утверждения, полученные в них, или методы их доказательства.

Пусть m и n – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $1<2\alpha+m\leqslant 2$, $-1/2<\alpha+n=\alpha_0\leqslant 1/2$. Очевидно, что $m=2n+2$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и $m=2n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$. Обозначим $\Omega_1=\Omega\bigcap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\bigcap\{y<0\}$.

Задача Дезина. В области Ω найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1°) функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega_1\bigcup\Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1\bigcup\Omega_2$;

2°) существуют пределы из областей $((x,y)\in\Omega_i,\ i=1,2)$

$$\tau_i(x)=\lim_{y\to 0}u(x,y),\quad \nu_i(x)=\lim_{y\to 0}|y|^\alpha(u(x,y)-A_\alpha(x,y,\tau_i))_y,$$

где

$$A_\alpha(x,y,\tau_i)=\sum_{s=1}^{[m/2]}\frac{\tau_i^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!}y^s\quad \text{при}\quad \alpha\neq -n,$$

$$A_\alpha(x,y,\tau_i)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\tau_i^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!}y^s-\frac{\tau_i^{(2n+2)}(x)}{n!(n+1)!}y^{n+1}\ln|y|\quad \text{при}\quad \alpha=-n,$$

здесь $[\cdot]$ – целая часть числа, $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_s = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)$, и на особой линии выполняются условия склеивания

$$\tau_1(x) = \tau_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad 0 < x < 1; \tag{3}$$

3°) имеют место равенства

$$\tau^{(s)}(0) = \tau^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, 2[m/2]-1}, \tag{4}$$

где через $\tau(x)$ обозначены обе части равенства (2);

4°) выполняется условие периодичности

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\beta \leqslant y \leqslant \gamma; \tag{5}$$

5°) функция $u(x,y)$ удовлетворяет краевому

$$u(x,\gamma) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6}$$

и нелокальному

$$u_y(x,-\beta) - \mu u(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{7}$$

условиям, где $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, – заданные функции, μ – заданный вещественный параметр.

Будем предполагать, что для заданных функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, справедливы следующие условия.

Условие 1. Функция $\varphi_1(x)$ принадлежит классу $C^2[0,1] \bigcap C^3(0,1)$ и выполняются равенства

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1), \quad \varphi_1''(0) = \varphi_1''(1).$$

Условие 2. Функция $\varphi_2(x)$ принадлежит классу $C^{[m/2]}[0,1] \bigcap C^{[m/2]+1}(0,1)$ и выполняются равенства

$$\varphi_2^{(s)}(0) = \varphi_2^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, [m/2]}.$$

2. Построение частных решений. Сформулированная задача решается с помощью аналога метода Фурье. Поэтому необходимы частные решения уравнения (1), имеющие вид

$$u(x,y) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Y}(y)$$

и удовлетворяющие условиям (2)–(5).

Обозначим

$$\mathbf{X}_0(x) = 1; \quad \mathbf{X}_k(x) = \mathbf{X}_{k,1}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi kx)$$

$$\text{или} \quad \mathbf{X}_k(x) = \mathbf{X}_{k,2}(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi kx) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Тогда обозначим

$$\mathbf{Y}_{k,1}(y) = |y|^{-\alpha_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^s y^{s+n+1}}{(2-\alpha)_s s!}, \tag{8}$$

$$\mathbf{Y}_{k,2}(y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^s y^s}{(\alpha)_s s!} \quad \text{при} \quad \alpha \neq -n, \tag{9}$$

$$\mathbf{Y}_{k,2}(y) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\lambda_k^s y^s}{(-n)_s s!} + \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_k^s y^s}{s!(s-n-1)!} \times$$
$$\times [\ln|y| - \psi(1+s) - \psi(s-n)] \quad \text{при} \quad \alpha = -n, \tag{10}$$

где $\psi(z)$ – пси-функция.

Имеет место доказанная в работе [13]

Теорема 1. *Функции*

$$u_k(x,y)=\mathbf{X}_k(x)(c_k\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k\mathbf{Y}_{k,2}(y)),\quad k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},$$

где c_k *и* d_k *– произвольные постоянные, представляют собой решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)–(5).*

3. Теорема единственности. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи Дезина и $y\in(-\beta,0)\bigcup(0,\gamma)$. Рассмотрим интегралы $(k\in\mathbb{N})$

$$w_0(y)=\int\limits_0^1 u(x,y)\,dx,\quad v_k(y)=\int\limits_0^1 u(x,y)\mathbf{X}_{k,1}(x)\,dx,\quad w_k(y)=\int\limits_0^1 u(x,y)\mathbf{X}_{k,2}(x)\,dx. \tag{11}$$

По аналогии со статьёй [13] несложно показать, что функции (11) удовлетворяют уравнению

$$y\mathbf{Y}''+\alpha\mathbf{Y}'-\lambda\mathbf{Y}=0$$

при соответствующих значениях параметра λ, условиям склеивания

$$\mathbf{Y}(0+)=\mathbf{Y}(0-),$$

соотношению

$$\lim_{y\to0+}y^\alpha\bigg(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\sum_{s=1}^{[m/2]}\frac{\lambda^sy^s}{(\alpha)_ss!}\bigg)_y=(-1)^n\lim_{y\to0-}(-y)^\alpha\bigg(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\sum_{s=1}^{[m/2]}\frac{\lambda^sy^s}{(\alpha)_ss!}\bigg)_y$$

при $\alpha\ne-n$ и соотношению

$$\lim_{y\to0+}y^\alpha\bigg(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\bigg(\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda^sy^s}{(\alpha)_ss!}+\frac{(-1)^n\lambda^{n+1}}{n!(n+1)!}y^{n+1}\ln|y|\bigg)\bigg)_y=$$

$$=(-1)^n\lim_{y\to0-}(-y)^\alpha\bigg(\mathbf{Y}(y)-\mathbf{Y}(0)\bigg(\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda^sy^s}{(\alpha)_ss!}+\frac{(-1)^n\lambda^{n+1}}{n!(n+1)!}y^{n+1}\ln|y|\bigg)\bigg)_y$$

при $\alpha=-n$.

Поэтому эти функции можно представить следующим образом:

$$w_0(y)=c_0\mathbf{Y}_{0,1}(y)+d_0\mathbf{Y}_{0,2}(y), \tag{12}$$

$$v_k(y)=c_k^1\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k^1\mathbf{Y}_{k,2}(y),\quad w_k(y)=c_k^2\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k^2\mathbf{Y}_{k,2}(y), \tag{13}$$

где c_0, d_0, c_k^1, d_k^1, c_k^2, d_k^2 – некоторые числа.

Перейдём в интегралах (11) к пределу при $y\to\gamma$, тогда с учётом условия (6) получим

$$w_0(\gamma)=\int\limits_0^1\varphi_1(x)\,dx=\varphi_{1,0}, \tag{14}$$

$$v_k(\gamma)=\int\limits_0^1\varphi_1(x)\mathbf{X}_{k,1}(x)\,dx=\varphi_{1,k}^1,\quad w_k(\gamma)=\int\limits_0^1\varphi_1(x)\mathbf{X}_{k,2}(x)\,dx=\varphi_{1,k}^2. \tag{15}$$

Затем воспользуемся условием (7), из которого следует, что

$$w_0'(-\beta)-\mu w_0(0)=\int\limits_0^1 \varphi_2(x)\,dx=\varphi_{2,0}, \tag{16}$$

$$v_k'(-\beta)-\mu v_k(0)=\int\limits_0^1 \varphi_2(x)\mathbf{X}_{k,1}(x)\,dx=\varphi_{2,k}^1, \tag{17}$$

$$w_k'(-\beta)-\mu w_k(0)=\int\limits_0^1 \varphi_2(x)\mathbf{X}_{k,2}(x)\,dx=\varphi_{2,k}^2. \tag{18}$$

Вследствие представлений (12), (13) с учётом равенств (14)–(18) получаем линейные алгебраические системы относительно неизвестных коэффициентов c_0, d_0 и c_k^p, d_k^p $(p=1,2,$ $k\in\mathbb{N})$. В силу того, что

$$\mathbf{Y}_{k,1}(0)=0,\quad \mathbf{Y}_{k,2}(0)=1,$$

эти системы можно записать в следующем виде:

$$c_0\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)+d_0\mathbf{Y}_{0,2}(\gamma)=\varphi_{1,0},\quad c_0\mathbf{Y}_{0,1}'(-\beta)+d_0(\mathbf{Y}_{0,2}'(-\beta)-\mu)=\varphi_{2,0}; \tag{19}$$

$$c_k^p\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)+d_k^p\mathbf{Y}_{k,2}(\gamma)=\varphi_{1,k}^p,\quad c_k^p\mathbf{Y}_{k,1}'(-\beta)+d_k^p(\mathbf{Y}_{k,2}'(-\beta)-\mu)=\varphi_{2,k}^p. \tag{20}$$

Обозначим $(k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\})$

$$\Delta_k^j(y_1,y_2)=\mathbf{Y}_{k,1}^{(j)}(y_1)(\mathbf{Y}_{k,2}'(y_2)-\mu)-\mathbf{Y}_{k,2}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,1}'(y_2).$$

Однозначная разрешимость систем (19) и (20) зависит от их определителей $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$. Выясним, могут ли эти определители обращаться в нуль. Сначала рассмотрим случай $k=0$. Из соотношений (8)–(10) при $\lambda_0=0$ получим $\mathbf{Y}_{0,1}(y)=|y|^{1-\alpha}$, $\mathbf{Y}_{0,2}(y)=1$. Поэтому

$$\Delta_k^0(\gamma,-\beta)=-\mu\gamma^{1-\alpha}+(1-\alpha)\beta^{-\alpha}.$$

Эта величина обращается в нуль только при $\mu=(1-\alpha)\beta^{-\alpha}\gamma^{\alpha-1}$.

Пусть $k>0$. Используя свойства функции Бесселя (см., например, формулы (9.1.10), (9.1.11), (9.1.30), (9.2.1), (9.2.2), (9.6.2), (9.6.10), (9.6.11), (9.6.28), (9.7.1), (9.7.2) в [14]), получаем, что при $k\to+\infty$ нули функции $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$ стремятся в случае чётных значений n – к нулям функции $\sin(4\pi k\sqrt{\beta}-\pi/4)$, а в случае нечётных значений n к нулям функции $\cos(4\pi k\sqrt{\beta}-\pi/4)$, т.е. при определённых соотношениях между β и k определитель $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$ может обратиться в нуль.

Лемма 1. *Если все* $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, *отличны от нуля, то задача Дезина не может иметь более одного решения.*

Лемма 2. *Если для некоторого* $l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ *выполняется равенство* $\Delta_l^0(\gamma,-\beta)=0$, *то однородная задача Дезина имеет нетривиальные решения*

$$u(x,y)=(\mathbf{Y}_{l,1}(y)(\mathbf{Y}_{l,2}'(-\beta)-\mu)-\mathbf{Y}_{l,2}(y)\mathbf{Y}_{l,1}'(-\beta))\sin(2\pi lx)$$

и

$$u(x,y)=(\mathbf{Y}_{l,1}(y)(\mathbf{Y}_{l,2}'(-\beta)-\mu)-\mathbf{Y}_{l,2}(y)\mathbf{Y}_{l,1}'(-\beta))\cos(2\pi lx)\quad\text{при}\quad l>0;$$

$$u(x,y)=(\mathbf{Y}_{0,1}(y)(\mathbf{Y}_{0,2}'(-\beta)-\mu)-\mathbf{Y}_{0,2}(y)\mathbf{Y}_{0,1}'(-\beta))\quad\text{при}\quad l=0.$$

Из лемм 1 и 2 вытекает необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дезина.

Теорема 2. *Для того чтобы задача Дезина имела не более одного решения необходимо и достаточно, чтобы все определители* $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, *были отличны от нуля.*

4. Существование решения. Приступим к доказательству существования решения сформулированной задачи. Через E обозначим множество таких $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, при которых выполняется равенство

$$\Delta_k^0(\gamma,-\beta)=0.$$

Если $0\neq k\in E$, то для разрешимости систем (20) $(p=1,2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)\varphi_{2,k}^p-\mathbf{Y}'_{k,1}(-\beta)\varphi_{1,k}^p=0; \tag{21}$$

в этом случае решения систем (20) задаются формулой

$$c_k^p=\frac{\varphi_{1,k}^p-d_k^p\mathbf{Y}_{k,2}(\gamma)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)},$$

где d_k^p – произвольные числа. Соответствующие решения уравнения (1) примут вид

$$u_k^p(x,y)=\mathbf{X}_k^p(x)\biggl(\varphi_{1,k}^p\frac{\mathbf{Y}_{k,1}(y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}+d_k^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}\biggr), \tag{22}$$

здесь и ниже

$$\overline{\Delta_k^j}(y_1,y_2)=\mathbf{Y}_{k,1}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,2}(y_2)-\mathbf{Y}_{k,2}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,1}(y_2).$$

В представлении (22) учтён тот факт, что $\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)\neq0$, который следует из определения (8).

Пусть $0\neq k\notin E$. В этом случае системы (20) имеют единственные решения. Найдём их и запишем решения уравнения (1):

$$u_k^p(x,y)=\mathbf{X}_k^p(x)\biggl(\varphi_{1,k}^p\frac{\Delta_k^0(y,-\beta)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,k}^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}\biggr). \tag{23}$$

В случае $0\in E$ необходимое и достаточное условие разрешимости системы (19) имеет вид

$$\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)\varphi_{2,0}-\mathbf{Y}'_{0,1}(-\beta)\varphi_{1,0}=0, \tag{24}$$

а решения уравнения (1) задаются формулой

$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\mathbf{Y}_{0,1}(y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}+d_0\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}, \tag{25}$$

где d_0 – произвольная постоянная.

Если же $0\notin E$, то уравнение (1) имеет единственное решение

$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\Delta_0^0(y,-\beta)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,0}\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}. \tag{26}$$

Теперь с учётом равенств (22), (23) и (25), (26) запишем формальное решение исходной задачи в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,y), \tag{27}$$

где

$$u_k(x,y)=\sum_{p=1}^{2}\mathbf{X}_k^p(x)\biggl(\varphi_{1,k}^p\frac{\mathbf{Y}_{k,1}(y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}+d_k^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)}\biggr)\quad\text{при}\quad 0\neq k\in E, \tag{28}$$

$$u_k(x,y)=\sum_{p=1}^{2}\mathbf{X}_k^p(x)\left(\varphi_{1,k}^p\frac{\Delta_k^0(y,-\beta)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,k}^p\frac{\overline{\Delta_k^0}(\gamma,y)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}\right)\quad \text{при}\quad 0\neq k\notin E, \tag{29}$$

$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\mathbf{Y}_{0,1}(y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}+d_0\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)}\quad \text{при}\quad 0\in E, \tag{30}$$

$$u_0(x,y)=\varphi_{1,0}\frac{\Delta_0^0(y,-\beta)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,0}\frac{\overline{\Delta_0^0}(\gamma,y)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}\quad \text{при}\quad 0\notin E, \tag{31}$$

где $d_k^1,\ d_k^2,\ d_0$ – произвольные постоянные.

При обосновании существования решения используются следующие утверждения.

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon>0$ существуют такие постоянные l_1 и k_1, зависящие от ε, что для всех $y_1,y_2\in[-\beta,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,\gamma]$ и $k\geqslant k_1$ справедлива оценка $(j=0,1,2)$*

$$|\overline{\Delta_k^j}(y_1,y_2)|\leqslant l_1k^{j-1}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}.$$

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon>0$ существуют такие постоянные l_2 и k_2, зависящие от ε, что для всех $y\in[-\beta,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,\gamma]$ и $k\geqslant k_2$ справедлива оценка $(j=0,1,2)$*

$$|\Delta_k^j(y,-\beta)|\leqslant l_2k^je^{4\pi k\sqrt{\gamma}}.$$

Лемма 5. *Если число $8\sqrt{\beta}$ является рациональным и в его представлении $8\sqrt{\beta}=p/q$ в виде несократимой дроби $(p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1)$ число q нечётно, то существуют такие значения l_3 и k_3, что для всех $k\geqslant k_3$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^0(\gamma,-\beta)|\geqslant l_3e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}.$$

Следствие. *При условиях леммы 5 множество E не может быть бесконечным.*

Лемма 6. *Для всех $y\in[-\beta,\gamma]$ справедливы оценки*

$$|\overline{\Delta}_k^j(y,\gamma)|\leqslant l_4k^{j-1/2}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}},$$

где l_4 – постоянная, не зависящая от значения y.

Лемма 7. *Для всех $y\in[-\beta,\gamma]$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^j(y,-\beta)|\leqslant l_5k^{j+1/2}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}},$$

где l_5 – постоянная, не зависящая от значения y.

Отметим, что лемма 7 в отличие от леммы 4 позволяет исследовать сходимость соответствующих рядов в окрестности особой линии.

Справедлива

Теорема 3. *Если число $8\sqrt{\beta}$ является рациональным и в его представлении $8\sqrt{\beta}=p/q$ в виде несократимой дроби $(p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1)$ число q нечётно, а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям 1 и 2, то задача Дезина имеет решение и его можно записать в виде ряда (27), где функции $u_k(x,y)$ определяются формулами (28)–(31), а $d_0,\ d_k^1,\ d_k^2$ – произвольные постоянные, причём если $E\neq\varnothing$, то для всех $k\in E$ дополнительно должны выполняться условия разрешимости (21) или (24) соответственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.
2. *Рахманова Л.Х.* Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11. С. 36–40.

3. *Егорова И.П.* Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. 2009. № 8 (74). С. 15–27.
4. *Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2009. № 11. С. 43–52.
5. *Нахушева З.А.* Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1199–1203.
6. *Сафина Р.М.* Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1354–1366.
7. *Сабитов К.Б., Новикова В.А.* Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Математика. 2016. № 6. С. 61–72.
8. *Гущина В.А.* Критерий единственности решения задачи Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // Вестн. Самарск. ун-та. Естественно-науч. сер. 2016. № 3–4. С. 24–31.
9. *Сабитов К.Б., Гущина В.А.* Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Математика. 2017. № 3. С. 37–50.
10. *Хайруллин Р.С.* К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 528–534.
11. *Хайруллин Р.С.* О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 684–692.
12. *Хайруллин Р.С.* К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в исключительных случаях // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 565–568.
13. *Хайруллин Р.С.* Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с сильным вырождением // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1139–1151.
14. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 28.04.2019 г.
После доработки 05.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.