

УДК 517.977.56:532.5

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

© 2021 г. М. А. Артемов

Изучается задача оптимизации для линеаризованных эволюционных уравнений модели Олдройда движения вязкоупругой среды. Уравнения заданы в трёхмерной ограниченной области. В качестве управляющей функции используется распределение скоростей в начальный момент времени. Функционал цели является финальным. Доказано существование единственного оптимального управления при заданном множестве допустимых управлений. Выведено вариационное неравенство, характеризующее оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0374064121080112

Введение. В последние годы активно ведутся исследования систем уравнений, описывающих нестационарные и установившиеся течения вязкоупругих сред олдройдовского типа (см., например, [1–4] и многочисленные ссылки, приведённые в этих работах). Модель Олдройда относится к классу дифференциальных моделей неньютоновской гидродинамики и успешно применяется при описании динамики растворов и расплавов полимеров, смазок, гелей, крови и ряда других встречающихся на практике сред.

Как известно, во многих задачах гидродинамики особую роль играют оптимальные решения, т.е. решения, на которых достигается минимум/максимум целевого функционала при заданных ограничениях на выбор управляющих параметров [5]. Большое внимание уделяется поиску оптимальных решений в моделях неньютоновских сред, а также изучению управляемости соответствующих уравнений. В [6] установлено существование оптимального слабого решения в модели граничного управления течением вязкоупругой жидкости при условии малости норм функций, описывающих исходные данные. Статья [7] посвящена доказательству аппроксимационно-конечномерной управляемости для линеаризованных (т.е. без учёта действия сил инерции) уравнений движения жидкости Олдройда в ограниченных двумерных и трёхмерных областях с гладкой границей. В [8] изучается оптимальное граничное управление в модели протекания дилатантной жидкости через сосуд с открытыми отверстиями. В работе [9] представлен качественный анализ задачи оптимизации для уравнений, моделирующих установившееся ползущее неизотермическое течение.

Несмотря на значительное число работ в данном направлении, случай стартового управления течением до сих пор не изучен. В настоящей статье рассматривается экстремальная задача стартового управления для линеаризованных уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды типа Олдройда в ограниченной трёхмерной пространственной области $\mathcal{O}$ на промежутке времени $[0, T]$:

$$\operatorname{Re} \partial_t \mathbf{v} - (1 - a) \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{E} + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{f}, \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\operatorname{We} \partial_t \mathbb{E} + \mathbb{E} = 2a \mathbb{D}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}}, \quad \mathbb{E}|_{t=0} = \mathbb{E}_0, \quad (4)$$

$$\lambda \|\mathbf{v}|_{t=T} - \mathbf{b}\|_{L_2}^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

Здесь Re (число Рейнольдса), We (число Вайсенберга) и a – константы, причём $\operatorname{Re} > 0$, $\operatorname{We} > 0$ и $a \in (0, 1)$, t – время, ∂_t – частная производная по t , $\partial \mathcal{O}$ – граница области $\mathcal{O}$,

$\mathbf{v}: \overline{\mathcal{O}} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ – векторная функция скорости, $\overline{\mathcal{O}}$ – замыкание области $\mathcal{O}$, $\mathbb{E}: \overline{\mathcal{O}} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ – упругая часть тензора напряжений, $\mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ – пространство симметрических 3×3 -матриц, $p: \overline{\mathcal{O}} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – функция давления, $\mathbb{D}(\mathbf{v})$ – тензор скоростей деформаций, $\mathbb{D}(\mathbf{v}) := (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^T)/2$, где $\nabla_{\mathbf{x}}$ – градиент по пространственным переменным, $\mathbf{f}: \overline{\mathcal{O}} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ – внешняя сила, $\mathbf{b}: \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\mathbb{E}_0: \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ – заданные векторные функции, $\mathbf{u}: \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ – управляющая векторная функция, $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ – множество допустимых управлений, λ – скалярный параметр, $\lambda \in (0, 1)$.

Главной целью данной работы является обоснование однозначной разрешимости экстремальной задачи (1)–(5) в классе непрерывных по t обобщённых (слабых) решений.

1. Строгая формулировка задачи. В этом пункте приводятся обозначения, исходные предположения и строгая формулировка экстремальной задачи (1)–(5).

Пусть N – натуральное число и $q, r, s \geq 1$. Условимся использовать стандартные обозначения для пространства Лебега $\mathbf{L}_q(\Omega, \mathbb{R}^N)$ и пространства Соболева $\mathbf{W}_s^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ векторных функций, заданных на области Ω и со значениями в $\mathbb{R}^N$. Ради упрощения скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ будем обозначать с помощью круглых скобок, т.е. $(\phi, \psi) := (\phi, \psi)_{\mathbf{L}_2}$.

Запись $\partial\Omega \in C^{0,1}$ означает, что граница области Ω удовлетворяет условию Липшица.

Следуя [10, гл. I], введём обозначения: $\mathcal{V} := \{\varphi \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^3) : \text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}, \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \varphi = 0\}$, $\mathbf{H}$ – замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $\mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^3)$ и $\mathbf{V}$ – замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $\mathbf{W}_2^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^3)$. Снабдим пространство $\mathbf{V}$ скалярным произведением $(\phi, \psi)_{\mathbf{V}} := (\nabla_{\mathbf{x}} \phi, \nabla_{\mathbf{x}} \psi)$ и соответствующей нормой $\|\phi\|_{\mathbf{V}} := (\nabla_{\mathbf{x}} \phi, \nabla_{\mathbf{x}} \phi)^{1/2}$. Всюду далее будем предполагать, что выполняются условия:

(i) $\partial\mathcal{O} \in C^{0,1}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$, $\mathbb{E}_0 \in \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^3))$;

(ii) множество допустимых управлений $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ выпукло, замкнуто и ограничено в $\mathbf{H}$.

Определение 1. Допустимой тройкой для задачи (1)–(5) назовём тройку $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbb{E})$ такую, что

$$\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{V}) \cap C([0, T]; \mathbf{H}), \quad \mathbb{E} \in C([0, T]; \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})),$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}}, \quad \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{u}, \quad \mathbb{E}(\cdot, 0) = \mathbb{E}_0$$

и для любых векторных функций $\varphi \in \mathbf{V}$ и $\mathbb{F} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$ выполнены следующие равенства:

$$\text{Re} \frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \varphi) + (1 - a)(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi) + (\mathbb{E}, \mathbb{D}(\varphi)) = (\mathbf{f}, \varphi), \quad \text{We} \frac{d}{dt}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) + (\mathbb{E}, \mathbb{F}) = 2a(\mathbb{D}(\mathbf{v}), \mathbb{F}), \quad (6)$$

в которых оператор d/dt обозначает обобщённую производную по t .

Совокупность всех допустимых троек обозначим через $\Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$.

В п. 2 будет показано, что для любого управления $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$ существует единственная тройка $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbb{E})$, принадлежащая множеству $\Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$. Это означает, что задача (1)–(4) задаёт непрерывную динамическую систему и позволяет корректно определить семейство эволюционных операторов $\{\mathbf{S}_t\}_{t \in [0, T]}$, которое вводит

Определение 2. Эволюционный оператор $\mathbf{S}_t$ – это отображение из множества $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ в $\mathbf{H}$, заданное по правилу $\mathbf{u} \xrightarrow{\mathbf{S}_t} \mathbf{v}(\cdot, t)$, где векторная функция $\mathbf{v}$ – это вторая компонента тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbb{E}) \in \Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$.

Определение 3. Будем говорить, что векторная функция $\mathbf{u}_* \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$ является оптимальным управлением в задаче (1)–(5), если

$$\lambda \|\mathbf{S}_T(\mathbf{u}_*) - \mathbf{b}\|_{\mathbf{L}_2}^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \inf \{ \lambda \|\mathbf{S}_T(\mathbf{u}) - \mathbf{b}\|_{\mathbf{L}_2}^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2}^2 : \mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}} \}.$$

2. Свойства допустимых троек. Установим сначала некоторые свойства допустимых троек, а именно докажем леммы 1 и 2.

Лемма 1. Если $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbb{E}_1) \in \Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$ и $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbb{E}_2) \in \Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$, то

$$\max \left\{ \frac{\text{Re}}{2} \|\mathbf{v}_1(\cdot, t) - \mathbf{v}_2(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \frac{\text{We}}{4a} \|\mathbb{E}_1(\cdot, t) - \mathbb{E}_2(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 : t \in [0, T] \right\} \leq \frac{\text{Re}}{2} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2}^2. \quad (7)$$

Доказательство. Будем считать, что гильбертово пространство $\mathbf{H}$ и сопряжённое к нему пространство $\mathbf{H}^*$ отождествлены в соответствии с теоремой представления Рисса. Тогда приходим к цепочке вложений $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \simeq \mathbf{H}^* \subset \mathbf{V}^*$. Аналогично отождествим пространства $\mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$ и $\mathbf{L}_2^*(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$.

Обратим внимание на то, что выполнены включения

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{V}^*), \quad \frac{d\mathbb{E}_i}{dt} \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{L}_2^*(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})),$$

где $i = 1, 2$, и применим лемму 1.2 из [10, гл. III, § 1] к векторным функциям $\mathbf{v}_i$ и $\mathbb{E}_i$. В результате получим, что для п.в. $t \in (0, T)$ справедливы равенства

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}_2}^2 = 2 \left\langle \frac{d\mathbf{w}}{dt}, \mathbf{w} \right\rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \|\mathbb{Q}\|_{\mathbf{L}_2}^2 = 2 \left\langle \frac{d\mathbb{Q}}{dt}, \mathbb{Q} \right\rangle_{\mathbf{L}_2^* \times \mathbf{L}_2}, \quad (8)$$

в которых $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и $\mathbb{Q} := \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2$, а угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}}$ обозначают отношение двойственности между банаховым пространством $\mathbf{X}$ и его сопряжённым $\mathbf{X}^*$.

Так как $(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbb{E}_i) \in \Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$, $i = 1, 2$, и оба уравнения в (6) линейны, то очевидно, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle \frac{d\mathbf{w}}{dt}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} + (\mathbb{Q}, \mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi})) + (1-a)(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}, \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varphi}) &= 0, \\ \operatorname{We} \left\langle \frac{d\mathbb{Q}}{dt}, \mathbb{F} \right\rangle_{\mathbf{L}_2^* \times \mathbf{L}_2} + (\mathbb{Q}, \mathbb{F}) &= 2a(\mathbb{D}(\mathbf{w}), \mathbb{F}) \end{aligned} \quad (9)$$

для любых $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}$ и $\mathbb{F} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$. Положим $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{w}(t)$ в первом из равенств (9) и $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(t)/(2a)$ – во втором. Сложим полученные равенства. Учитывая соотношения (8), приходим к равенству

$$\frac{\operatorname{Re}}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + (1-a) \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\operatorname{We}}{4a} \frac{d}{dt} \|\mathbb{Q}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \frac{1}{2a} \|\mathbb{Q}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 = 0,$$

из которого, в частности, следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{Re}}{2} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \frac{\operatorname{We}}{4a} \|\mathbb{Q}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \right) \leq 0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до t , получаем, что

$$\frac{\operatorname{Re}}{2} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \frac{\operatorname{We}}{4a} \|\mathbb{Q}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \leq \frac{\operatorname{Re}}{2} \|\mathbf{w}(\cdot, 0)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \frac{\operatorname{We}}{4a} \|\mathbb{Q}(\cdot, 0)\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \frac{\operatorname{Re}}{2} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2}^2 \quad (10)$$

для любого $t \in [0, T]$. Взяв максимум по $t \in [0, T]$ в левой части (10), приходим к требуемой оценке (7). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$. Тогда существует единственная пара $(\mathbf{v}, \mathbb{E})$ такая, что $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbb{E}) \in \Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$.

Доказательство. Чтобы найти $\mathbf{v}$ и $\mathbb{E}$ сконструируем, следуя подходу [11], последовательность приближённых решений $((\mathbf{v}_n, \mathbb{E}_n))_{n=1}^\infty$ по методу Фаздо–Галёркина и затем на основе оценок норм функций $\mathbf{v}_n$ и $\mathbb{E}_n$ осуществим предельный переход при $n \rightarrow \infty$.

Приближённые решения, соответствующие выбору $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, будем искать в виде сумм:

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) := \sum_{k=1}^n a_{nk}(t) \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbb{E}_n(\mathbf{x}, t) := \sum_{k=1}^n B_{nk}(t) \mathbb{F}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t \in (0, T),$$

где $a_{nk}, B_{nk}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – неизвестные функции, $(\boldsymbol{\varphi}_k)_{k=1}^\infty$ – полная система в $\mathbf{V}$, образующая ортонормированный базис в $\mathbf{H}$, и $(\mathbb{F}_k)_{k=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $\mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$.

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ линейную задачу Коши:

$$\operatorname{Re}(\partial_t \mathbf{v}_n, \varphi_k) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{D}(\varphi_k)) + (1-a)(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_k) = (\mathbf{f}, \varphi_k), \quad t \in (0, T), \quad k = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$\operatorname{We}(\partial_t \mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k) = 2a(\mathbb{D}(\mathbf{v}_n), \mathbb{F}_k), \quad t \in (0, T), \quad k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, 0) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_0, \varphi_k) \varphi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbb{E}_n(\mathbf{x}, 0) = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}_0, \mathbb{F}_k) \mathbb{F}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (13)$$

Выведем не зависящие от параметра n оценки решений этой задачи. Предположим, что пара $(\mathbf{v}_n, \mathbb{E}_n)$ удовлетворяет системе (11)–(13). Умножим обе части равенства (11) на $a_{nk}(t)$. Складывая полученные равенства при $k = \overline{1, n}$, находим, что

$$\operatorname{Re}(\partial_t \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{D}(\mathbf{v}_n)) + (1-a)(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_n), \quad t \in (0, T). \quad (14)$$

Затем умножим обе части равенства (12) на $B_{nk}(t)$ и просуммируем полученные равенства по $k = \overline{1, n}$:

$$\operatorname{We}(\partial_t \mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) = 2a(\mathbb{D}(\mathbf{v}_n), \mathbb{E}_n), \quad t \in (0, T). \quad (15)$$

Далее, умножим обе части равенства (14) на $2a$ и сложим результат с (15); в результате получим равенство

$$2a \operatorname{Re}(\partial_t \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) + 2a(1-a)(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n) + (\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) + \operatorname{We}(\partial_t \mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n) = 2a(\mathbf{f}, \mathbf{v}_n), \quad t \in (0, T), \quad (16)$$

из которого с помощью леммы Гронуолла–Беллмана выводим оценку

$$\begin{aligned} & a \operatorname{Re} \|\mathbf{v}_n(\cdot, t)\|_{L_2}^2 + \frac{\operatorname{We}}{2} \|\mathbb{E}_n(\cdot, t)\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq \left(a \operatorname{Re} \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}}} \|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 + \frac{\operatorname{We}}{2} \|\mathbb{E}_0\|_{L_2}^2 + a \|\mathbf{f}\|_{L_2(0, T; L_2)}^2 \right) e^{T/\operatorname{Re}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как мы считаем, что функции $\mathbf{f}$ и множество $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ подчиняются условиям (i) и (ii) соответственно, то из (17) следует, что совокупность норм $\{\|\mathbf{v}_n(\cdot, t)\|_{L_2}, \|\mathbb{E}_n(\cdot, t)\|_{L_2}\}$ равномерно ограничена относительно $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, T]$. В силу равенства (16) имеем также равномерную (по параметру n) ограниченность норм $\{\|\mathbf{v}_n\|_{L_2(0, T; \mathbf{V})}\}$. Поэтому, переходя к подпоследовательности (если это необходимо), получаем следующие сходимости:

$$\mathbf{v}_n \xrightarrow{\text{слабо}} \mathbf{v} \quad \text{в } L_2(0, T; \mathbf{V}), \quad \mathbb{E}_n \xrightarrow{\text{слабо}} \mathbb{E} \quad \text{в } L_2(0, T; L_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (18)$$

для некоторой пары $(\mathbf{v}, \mathbb{E}) \in L_2(0, T; \mathbf{V}) \times L_2(0, T; L_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}))$.

Умножим обе части равенства (11) на произвольную C^∞ -гладкую функцию $\xi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ с носителем, содержащимся в интервале $(0, T)$, и проинтегрируем по t от 0 до T . Применив интегрирование по частям к первому слагаемому из левой части полученного равенства, приходим к соотношению

$$- \operatorname{Re} \int_0^T (\mathbf{v}_n, \varphi_k) \xi' dt + \int_0^T (\mathbb{E}_n, \mathbb{D}(\varphi_k)) \xi dt + (1-a) \int_0^T (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_k) \xi dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi_k) \xi dt, \quad (19)$$

где символ $'$ обозначает классическую производную по t . Умножим теперь обе части равенства (12) на функцию ξ , проинтегрируем по t в пределах от 0 до T и затем применим формулу интегрирования по частям к первому слагаемому из левой части; в результате будем иметь

$$- \operatorname{We} \int_0^T (\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k) \xi' dt + \int_0^T (\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_k) \xi dt = 2a \int_0^T (\mathbb{D}(\mathbf{v}_n), \mathbb{F}_k) \xi dt. \quad (20)$$

Используя сходимости (18), осуществим предельный переход при $n \rightarrow \infty$ в равенствах (19) и (20). В результате приходим к соотношениям (6) с $\varphi = \varphi_k$ и $\mathbb{F} = \mathbb{F}_k$, где k – произвольное натуральное число. Более того, так как система $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ полна в $\mathbf{V}$, а система $(\mathbb{F}_k)_{k=1}^\infty$ полна в $\mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$, в полученных равенствах допустимо заменить φ_k и $\mathbb{F}_k$ на произвольные векторные функции $\varphi \in \mathbf{V}$ и $\mathbb{F} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3})$ соответственно. Отсюда, в частности, следует, что $d\mathbf{v}/dt \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{V}^*)$ и $d\mathbb{E}/dt \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{L}_2^*(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}))$. Поэтому, снова применяя лемму 1.2 из [10, гл. III, § 1], получаем, что $\mathbf{v} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H})$ и $\mathbb{E} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}_2(\mathcal{O}, \mathbb{M}_{\text{sym}}^{3 \times 3}))$. Принимая во внимание равенства (13), нетрудно убедиться в том, что выполнены начальные условия: $\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$ и $\mathbb{E}(\cdot, 0) = \mathbb{E}_0$. Итак, установлено, что $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbb{E}) \in \Xi(\mathbf{U}_{\text{ad}})$.

Единственность допустимой тройки, удовлетворяющей условиям леммы 2, непосредственно вытекает из леммы 1.

Следствие. Эволюционный оператор S_t определён корректно для любого $t \in [0, T]$.

3. Главный результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. При выполнении предположений (i) и (ii) в задаче (1)–(5) существует единственное оптимальное управление. При этом векторная функция $\mathbf{u}_\star \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$ является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда выполнено вариационное неравенство

$$(1 - \lambda)(\mathbf{u}_\star, \mathbf{u} - \mathbf{u}_\star) + \lambda(S_T(\mathbf{u}_\star) - \mathbf{b}, S_T(\mathbf{u}) - S_T(\mathbf{u}_\star)) \geq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}}. \quad (21)$$

Доказательство. Введём функцию (целевой функционал)

$$\mathfrak{J}: \mathbf{U}_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{J}(\mathbf{u}) := \lambda \|S_T(\mathbf{u}) - \mathbf{b}\|_{L_2}^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{u}\|_{L_2}^2.$$

Из леммы 1 следует, что эта функция является непрерывной. Более того, функция $\mathfrak{J}$ строго выпукла. В самом деле, пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$ и $\alpha \in (0, 1)$. Тогда, принимая во внимание соотношение $S_T(\alpha \mathbf{u}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2) = \alpha S_T(\mathbf{u}_1) + (1 - \alpha) S_T(\mathbf{u}_2)$ и строгую выпуклость квадрата нормы гильбертова пространства, выводим строгое неравенство Йенсена для $\mathfrak{J}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\alpha \mathbf{u}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2) &= \lambda \|S_T(\alpha \mathbf{u}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2) - \mathbf{b}\|_{L_2}^2 + (1 - \lambda) \|\alpha \mathbf{u}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2\|_{L_2}^2 = \\ &= \lambda \|\alpha (S_T(\mathbf{u}_1) - \mathbf{b}) + (1 - \alpha) (S_T(\mathbf{u}_2) - \mathbf{b})\|_{L_2}^2 + (1 - \lambda) \|\alpha \mathbf{u}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_2\|_{L_2}^2 < \\ &< \lambda \alpha \|S_T(\mathbf{u}_1) - \mathbf{b}\|_{L_2}^2 + \lambda (1 - \alpha) \|S_T(\mathbf{u}_2) - \mathbf{b}\|_{L_2}^2 + (1 - \lambda) \alpha \|\mathbf{u}_1\|_{L_2}^2 + (1 - \lambda) (1 - \alpha) \|\mathbf{u}_2\|_{L_2}^2 = \\ &= \alpha \mathfrak{J}(\mathbf{u}_1) + (1 - \alpha) \mathfrak{J}(\mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Поскольку функция $\mathfrak{J}$ непрерывна и выпукла, то она слабо полунепрерывна снизу.

Пусть $\gamma = \inf \{\mathfrak{J}(\mathbf{u}): \mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\text{ad}}\}$ и $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbf{U}_{\text{ad}}$ – минимизирующая последовательность, т.е. $\mathfrak{J}(\mathbf{u}_k) \rightarrow \gamma$ при $k \rightarrow \infty$. Так как множество $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ ограничено в $\mathbf{H}$, то, не умаляя общности, можно считать, что $(\mathbf{u}_k)_{k=1}^\infty$ слабо сходится к некоторому элементу $\mathbf{u}_\star$ в $\mathbf{H}$ при $k \rightarrow \infty$. Согласно условию (ii) множество $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ выпукло и замкнуто и, значит, слабо замкнуто в $\mathbf{H}$. Поэтому $\mathbf{u}_\star \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$. Тогда

$$\gamma \leq \mathfrak{J}(\mathbf{u}_\star) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{J}(\mathbf{u}_k) = \gamma.$$

Таким образом, $\mathfrak{J}(\mathbf{u}_\star) = \gamma$ и, следовательно, $\mathbf{u}_\star$ – оптимальное управление в системе (1)–(5). Единственность оптимального управления вытекает из строгой выпуклости функции $\mathfrak{J}$.

Наконец, заметим, что $\mathbf{u}_\star \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$ является оптимальным управлением тогда и только тогда, когда пара $(\mathbf{u}_\star, S_T(\mathbf{u}_\star))$ совпадает с метрической проекцией пары $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ на график эволюционного оператора S_T в декартовом произведении $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{h}, \mathbf{g})_{\mathbf{H} \times \mathbf{H}} := (1 - \lambda)(\mathbf{h}_1, \mathbf{g}_1)_{\mathbf{H}} + \lambda(\mathbf{h}_2, \mathbf{g}_2)_{\mathbf{H}},$$

где $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$ и $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$. Применяя соответствующим образом теорему 2.3 из [12, гл. I], выводим вариационное неравенство (21), завершая тем самым доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saut J.-C.* Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids // Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 3. Somerville, 2013. P. 325–393.
2. *Fang D., Zi R.* Global solutions to the Oldroyd-B model with a class of large initial data // SIAM J. Math. Anal. 2016. V. 48. P. 1054–1084.
3. *Baranovskii E.S.* Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Commun. Pure Appl. Anal. 2019. V. 18. P. 735–750.
4. *Wan R.* Some new global results to the incompressible Oldroyd-B model // Zeitschr. Angew. Math. Phys. 2019. Bd. 70. Art. 28.
5. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
6. *Кузнецов А.В.* Граничное оптимальное управление в начально-краевой задаче для модели вязко-упругой среды с полной производной // Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2008. № 1. С. 232–248.
7. *Doubova A., Fernandez-Cara E.* On the control of viscoelastic Jeffreys fluids // Systems Control Lett. 2012. V. 61. P. 573–579.
8. *Барановский Е.С.* Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43.
9. *Baranovskii E.S., Domnich A.A., Artemov M.A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids. 2019. V. 4. № 3. Art. ID 133.
10. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
11. *Baranovskii E.S., Artemov M.A.* Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip // Acta Appl. Math. 2017. V. 147. P. 197–210.
12. *Киндерлерер Д., Стампакья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М., 1982.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.

После доработки 13.04.2021 г.

Принята к публикации 08.06.2021 г.