

УДК 517.935.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА
В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ© 2021 г. А. С. Фурсов, Р. П. Митрев,
П. А. Крылов, Т. С. Тодоров

Рассматривается управляемая нелинейная система, замкнутая обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, представляющая собой упрощённую модель одной термомеханической установки. Получены условия на регулятор и параметры системы, гарантирующие существование в этой системе периодического режима.

DOI: 10.31857/S0374064121080124

Введение. В работе [1] рассматривалась заданная на полуоси $t \geq 0$ управляемая нелинейная система

$$\begin{aligned} m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) &= \alpha l^{-1}E(T(t))(\Delta - y(t)) - mg, \\ \alpha\gamma^{-1}\dot{T}(t) + T(t) &= u \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad T(0) = T_0, \quad (2)$$

замкнутая обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом (рис. 1):

$$u = u_r(y(t)) = \begin{cases} \bar{u}, & \text{если } y(t) \leq y_1; \\ \underline{u}, & \text{если } y(t) \geq y_2; \\ \bar{u}, & \text{если } y(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in [0, t]; \\ \bar{u}, & \text{если } y(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что} \\ & y(s) = y_1 \text{ и } y(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t]; \\ \underline{u}, & \text{если } y(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что} \\ & y(s) = y_2 \text{ и } y(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t]. \end{cases} \quad (3)$$

Система (1) представляет собой упрощённую модель одной термомеханической установки [2], для которой используются следующие обозначения: y – выходная переменная, характеризующая величину механической деформации материала с памятью формы [3], при этом предполагается, что $0 < y_0 < \Delta$; T – температура деформируемого материала, причём $T_0 \geq 0$; положительные числа m , β , k , α , l , Δ , γ являются физическими параметрами термомеханической установки; g – ускорение свободного падения; u – управление в форме обратной связи по переменной y ($u = u(y)$); E – модуль Юнга деформируемого материала (нелинейная характеристика с гистерезисом и насыщением, рис. 2).

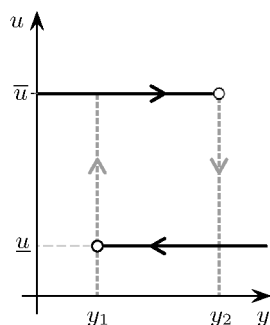
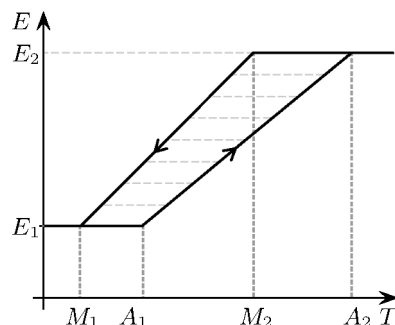


Рис. 1. Обратная связь в виде реле.

Рис. 2. Возможный вид характеристики $E(T)$ с гистерезисом.

Отображение $E(T)$ можно рассматривать как многозначное отображение $E : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$E(T) = \begin{cases} E_1, & \text{если } T \leq M_1; \\ \left[E_1, \frac{T - M_1}{M_2 - M_1}(E_2 - E_1) + E_1 \right], & \text{если } \begin{cases} M_2 < A_1, \\ T \in (M_1, M_2]; \end{cases} \\ \left[\frac{T - A_1}{A_2 - A_1}(E_2 - E_1) + E_1, \frac{T - M_1}{M_2 - M_1}(E_2 - E_1) + E_1 \right], & \text{если } \begin{cases} A_1 \leq M_2, \\ T \in (A_1, M_2]; \end{cases} \\ [E_1, E_2], & \text{если } \begin{cases} M_2 < A_1, \\ T \in (M_2, A_1]; \end{cases} \\ \left[\frac{T - A_1}{A_2 - A_1}(E_2 - E_1) + E_1, E_2 \right], & \text{если } \begin{cases} M_2 < A_1, \\ T \in (A_1, A_2]; \end{cases} \\ \left[\frac{T - A_1}{A_2 - A_1}(E_2 - E_1) + E_1, E_2 \right], & \text{если } \begin{cases} A_1 \leq M_2, \\ T \in (M_2, A_2]; \end{cases} \\ E_2, & \text{если } T > A_2. \end{cases}$$

Здесь $A_1, A_2, M_1, M_2, E_1, E_2$ – положительные константы, определяемые физическими свойствами материала с памятью формы. Далее будем считать, что они связаны следующими неравенствами:

$$0 < A_1 < A_2, \quad 0 < M_1 < M_2, \quad M_1 < A_1, \quad M_2 < A_2, \quad 0 < E_1 < E_2.$$

Отметим, что для каждой конкретной непрерывной функции $T(t)$ из отображения $E(T)$ выделяется однозначная ветвь, являющаяся непрерывной функцией, множество значений которой принадлежит отрезку $[E_1, E_2]$ (см. [1]).

Считаем, что пороговые значения y_1, y_2 , характеризующие управление (3), удовлетворяют условию $0 < y_1 < y_2 < \Delta$.

В работе [1] получены эффективно проверяемые условия на коэффициенты и начальные значения переменных состояния системы (1), (2) и на параметры регулятора (3), обеспечивающие возникновение колебательных движений [4, с. 10] в соответствующей замкнутой системе. При этом в [1] использовалось следующее определение колебательного движения (колебательного режима). Решение системы (1), (2), т.е. пару $(y(t), T(t))$ функций, удовлетворяющих этой системе и начальным условиям при управлении u , задаваемом условиями (3), называем *колебательным режимом*, если найдутся такие положительные константы (параметры режима) $t_1^*, t_2^*, \underline{y}, \overline{y}$ ($0 < t_1^* < t_2^*$ и $0 < \underline{y} < \overline{y} < \Delta$), что выполняются следующие условия:

- 1) найдётся момент $t \geq 0$, для которого $y(t) = \overline{y}$;
- 2) для любого момента t такого, что $y(t) = \overline{y}$, существует момент $\xi \in [t + t_1^*, t + t_2^*]$, при котором справедливо равенство $y(\xi) = \underline{y}$ и $y(\tau) \neq \underline{y}$ для всех $\tau \in (t, t + t_1^*)$;
- 3) для любого момента t такого, что $y(t) = \underline{y}$, существует такой момент $\xi \in [t + t_1^*, t + t_2^*]$, при котором справедливо равенство $y(\xi) = \overline{y}$ и $y(\tau) \neq \overline{y}$ для всех $\tau \in (t, t + t_1^*)$.

Анализируя результаты работы [1], можно утверждать, что проблема определения условий на параметры замкнутой системы (1)–(3), гарантирующих существование колебательных режимов, оказалась весьма непростой. Однако с прикладной точки зрения более актуальной является задача определения условий существования периодического режима для указанной замкнутой системы.

Основываясь на результатах работы [1], в настоящей статье получены достаточные условия существования периодического режима в замкнутой системе (1)–(3).

1. Постановка задачи. Запишем систему (1), (2) в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}E(x_3(t))\right)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta E(x_3(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{\gamma}{\alpha}(x_3(t) - u), \\ x_1(0) &= y_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = T_0,\end{aligned}\tag{4}$$

где $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = T$, а $0 < y_0 < \Delta$, $T_0 \geq 0$.

Замкнём систему (4) регулятором (3) и при $t \geq 0$ рассмотрим соответствующую замкнутую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}E(x_3(t))\right)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta E(x_3(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{\gamma}{\alpha}(x_3(t) - u_r(x_1(t))), \\ x_1(0) &= y_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = T_0,\end{aligned}\tag{5}$$

где $0 < y_0 < \Delta$, $T_0 \geq 0$, для которой будем предполагать, что $y_0 < y_1$, $T_0 < M_1$. Запишем замкнутую систему (5) в векторной форме

$$\dot{x}(t) = P(x(t), u_r), \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Тогда если выход реле принимает значение $\bar{u}$, то считаем, что активной является система

$$\dot{x}(t) = P(x(t), \bar{u}),\tag{6}$$

если же выход реле принимает значение $\underline{u}$, то считаем, что активной является система

$$\dot{x}(t) = P(x(t), \underline{u}).\tag{7}$$

Тогда при заданных начальных условиях $x(0) = (y_0, 0, T_0)^T$ решение замкнутой системы (5) с учётом того, что $y_0 < y_1$, ищется в классе непрерывных вектор-функций $x(t)$ в соответствии со следующим алгоритмом чередования активных режимов:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} P(x(t), \bar{u}), & \text{если } x_1(t) \leq y_1; \\ P(x(t), \underline{u}), & \text{если } x_1(t) \geq y_2; \\ P(x(t), \bar{u}), & \text{если } x_1(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что} \\ & x_1(s) = y_1 \text{ и } x_1(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t]; \\ P(x(t), \underline{u}), & \text{если } x_1(t) \in (y_1, y_2) \text{ и существует } s \in [0, t) \text{ такое, что} \\ & x_1(s) = y_2 \text{ и } x_1(\tau) \in (y_1, y_2) \text{ при всех } \tau \in (s, t]. \end{cases}\tag{8}$$

При этом в точках разрыва правой части системы (на гиперплоскостях $x_1 = y_1$, $x_1 = y_2$) происходит “склеивка по непрерывности” соответствующих решений систем (6) и (7). Далее определённую на полуоси $t \geq 0$ функцию f будем называть Θ -периодической, если $f(t + \Theta) = f(t)$ для всех $t \geq 0$.

Сформулируем теперь задачу управления для системы (4).

Задача. Найти ограничения на числовые параметры m , k , α , l , β , Δ , γ системы (4), а также на параметры y_1 , y_2 , $\underline{u}$, $\bar{u}$ регулятора (3), при выполнении которых в замкнутой системе (5) существует периодическое решение (периодический режим).

2. Периодический режим в системе с программным управлением. Решение поставленной задачи о существовании периодического решения в системе (5) разобьём на несколько шагов. Вначале исследуем вопрос о существовании периодического решения системы (4), замкнутой программным управлением вида

$$u_p(t) = \begin{cases} \bar{u}, & \text{если } t \in [q\Theta, q\Theta + \Theta_1), \\ \underline{u}, & \text{если } t \in [q\Theta + \Theta_1, q\Theta + \Theta_1 + \Theta_2), \end{cases} \quad q = 0, 1, 2, \dots; \quad \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta. \quad (9)$$

Здесь $\bar{u}$, $\underline{u}$, Θ_1 , Θ – положительные параметры указанного программного управления.

Рассмотрим теперь задачу выбора таких параметров управления (9), которые обеспечивают существование периодического решения в соответствующей замкнутой системе (4), (9).

Прежде всего заметим, что рассматриваемое управление $u(t)$ является кусочно-постоянной периодической функцией с периодом Θ . Покажем, что для любых $\bar{u}$, $\underline{u}$, $\Theta > \Theta_1 > 0$ уравнение

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}(x_3(t) - u_p(t)) \quad (10)$$

имеет периодическое решение с периодом Θ . Действительно, при любых $t \geq s \geq 0$ для решений уравнения (10) справедлива формула Коши

$$x_3(t) = x_3(s)e^{-\gamma(t-s)/\alpha} + \int_s^t e^{-\gamma(t-\tau)/\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} u(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Пусть $x_3(0) = T_0$. Тогда, учитывая, что $u_p(t) \equiv \bar{u}$ на промежутке $[0, \Theta_1)$, и используя формулу (11), найдём $x_3(\Theta_1)$:

$$\begin{aligned} x_3(\Theta_1) &= T_0 e^{-\gamma\Theta_1/\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \bar{u} \int_0^{\Theta_1} e^{-\gamma(\Theta_1-\tau)/\alpha} d\tau = \\ &= T_0 e^{-\gamma\Theta_1/\alpha} + \bar{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}) = \bar{u} + (T_0 - \bar{u})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, учитывая, что $u_p(t) \equiv \underline{u}$ на промежутке $[\Theta_1, \Theta)$, для $x_3(\Theta)$ получаем

$$\begin{aligned} x_3(\Theta) &= \underline{u} + (x_3(\Theta_1) - \underline{u})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha} = \underline{u} + (\bar{u} + (T_0 - \bar{u})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha} - \underline{u})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha} = \\ &= \underline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_2/\alpha}) + \bar{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha} + T_0 e^{-\gamma\Theta/\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая Θ -периодичность функции $u_p(t)$, заключаем, что решение $x_3(t)$ будет Θ -периодическим, если и только если выполняется равенство $x_3(\Theta) = T_0$. Тогда из представления (13) находим начальное условие для Θ -периодического решения $x_3^\Theta(t)$:

$$T_0 = \underline{T} = \frac{\underline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_2/\alpha}) + \bar{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha})e^{-\gamma\Theta_2/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}}. \quad (14)$$

Из равенств (13) и (14) следует, что

$$x_3^\Theta(\Theta_1) = \frac{\bar{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}) + \underline{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_2/\alpha})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}}.$$

Теперь, обозначая $\bar{T} = x_3^\Theta(\Theta_1)$ и $\hat{\gamma} = \gamma/\alpha$, запишем в явном виде Θ -периодическое решение уравнения (10):

$$x_3^\Theta(t) = \begin{cases} \bar{u} + (\underline{T} - \bar{u})e^{-\hat{\gamma}(t-q\Theta)}, & \text{если } t \in [q\Theta, q\Theta + \Theta_1), \\ \underline{u} + (\bar{T} - \underline{u})e^{-\hat{\gamma}(t-q\Theta-\Theta_1)}, & \text{если } t \in [q\Theta + \Theta_1, q\Theta + \Theta), \end{cases} \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Будем теперь предполагать, что параметры $\bar{u}$, $\underline{u}$, Θ_1 , Θ регулятора (9) выбраны так, что выполняются неравенства

$$\underline{T} < M_1, \quad \bar{T} > A_2. \quad (15)$$

Полагая, что компонента x_3 решения замкнутой системы (4), (9) удовлетворяет начальному условию $x_3(0) = \underline{T}$, рассмотрим её подсистему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}\varphi(t)\right)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta\varphi(t), \\ x_1(0) &= y_0, \quad x_2(0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\varphi(t) = E(x_3^\Theta(t))$. В силу условий (15) и того, что $x_3^\Theta(t)$ является Θ -периодическим решением уравнения (10), функция $\varphi(t)$ также будет Θ -периодической, и при этом её можно описать следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} E_1, & t \in [q\Theta, q\Theta + \Theta_{A_1}), \\ \frac{\bar{u} + (\underline{T} - \bar{u})e^{-\hat{\gamma}(t-q\Theta)} - A_1}{A_2 - A_1}(E_2 - E_1) + E_1, & t \in [q\Theta + \Theta_{A_1}, q\Theta + \Theta_{A_2}), \\ E_2, & t \in [q\Theta + \Theta_{A_2}, q\Theta + \Theta_1), \\ E_2, & t \in [q\Theta + \Theta_1, q\Theta + \Theta_{M_2}), \\ \frac{\underline{u} + (\bar{T} - \underline{u})e^{-\hat{\gamma}(t-q\Theta-\Theta_1)} - M_1}{M_2 - M_1}(E_2 - E_1) + E_1, & t \in [q\Theta + \Theta_{M_2}, q\Theta + \Theta_{M_1}), \\ E_1, & t \in [q\Theta + \Theta_{M_1}, q\Theta + \Theta), \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_{A_1} &= \frac{1}{\hat{\gamma}} \ln \frac{\underline{T} - \bar{u}}{A_1 - \bar{u}}, \quad \Theta_{A_2} = \frac{1}{\hat{\gamma}} \ln \frac{\underline{T} - \bar{u}}{A_2 - \bar{u}}, \\ \Theta_{M_1} &= \Theta_1 + \frac{1}{\hat{\gamma}} \ln \frac{\bar{T} - \underline{u}}{M_1 - \underline{u}}, \quad \Theta_{M_2} = \Theta_1 + \frac{1}{\hat{\gamma}} \ln \frac{\bar{T} - \underline{u}}{M_2 - \underline{u}} \end{aligned}$$

и учтено, что $T_0 < M_1$.

На рис. 3, 4 схематично изображены графики функций $x_3^\Theta(t)$ и $\varphi(t)$ при $t \in [0, \Theta]$.

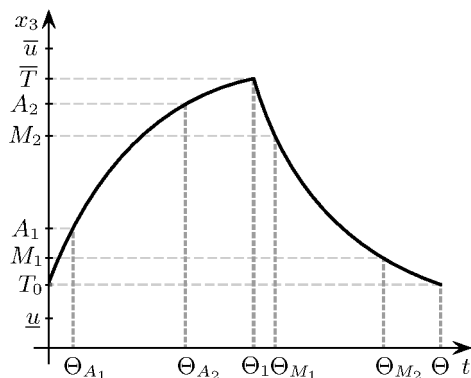


Рис. 3. График функции $x_3^\Theta(t)$.

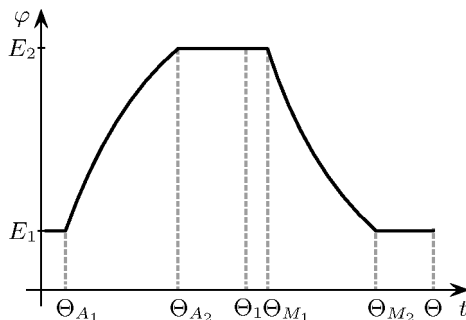


Рис. 4. График функции $\varphi(t)$.

Из сказанного выше следует, что система (16) фактически является линейной нестационарной системой вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad (18)$$

где $x = (x_1, x_2)^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} - \frac{\alpha}{lm}\varphi(t) & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{lm}\Delta\varphi(t) - g \end{pmatrix}, \quad (19)$$

причём матрица $A(t)$ и вектор-столбец $f(t)$ – непрерывные и периодические с периодом Θ функции, т.е., в частности, $A(t + \Theta) = A(t)$, $f(t + \Theta) = f(t)$ для любого $t \geq 0$.

Известно [5, с. 215], что если линейная однородная Θ -периодическая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (20)$$

не имеет нетривиального Θ -периодического решения, то соответствующая неоднородная система (18) имеет единственное Θ -периодическое решение. Теперь заметим, что если однородная система (20) является асимптотически устойчивой, то она не может иметь нетривиального Θ -периодического решения.

Получим условия, при которых рассматриваемая линейная однородная система (20) является асимптотически устойчивой. Для этого воспользуемся методом, предложенным в [5, с. 197]. Рассмотрим систему (20), матрица $A(t)$ коэффициентов которой задана в (19). Эта система эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + b(t)y(t) = 0, \quad (21)$$

где $y(t) = x_1(t)$, $\dot{y}(t) = x_2(t)$, а

$$a = \frac{\beta}{m}, \quad b(t) = \frac{\alpha}{lm}\varphi(t) + \frac{k}{m}.$$

Сделаем в уравнении (21) стандартную замену зависимой переменной $y = e^{-at/2}z$, тогда

$$\dot{y} = \left(\dot{z} - \frac{a}{2}z \right) e^{-at/2} \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \left(\ddot{z} - a\dot{z} + \frac{a^2}{4}z \right) e^{-at/2}.$$

Поэтому в результате указанной замены уравнение (21) приводится к виду

$$\ddot{z}(t) + p(t)z(t) = 0, \quad (22)$$

где

$$p(t) = \frac{\alpha}{lm}\varphi(t) + \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}.$$

В соответствии с результатами, изложенными в монографии [5, с. 202], если для Θ -периодической функции $p(t)$ выполнены неравенства

$$p(t) \geq 0, \quad 0 < \Theta \int_0^\Theta p(t) dt \leq 4,$$

то все решения $z(t)$ уравнения (22) ограничены вместе с их производными первого порядка. Но из ограниченности $z(t)$ и $\dot{z}(t)$ вытекает, что решения $y(t)$ уравнения (21) вместе с их производными $\dot{y}(t)$ стремятся к нулю и, следовательно, система (20) асимптотически устойчива. Тогда, учитывая, что $E_1 \leq \varphi(t) \leq E_2$, получаем достаточное условие того, чтобы система (20) с матрицей коэффициентов $A(t)$, заданной в (19), была асимптотически устойчива:

$$\frac{\alpha}{lm}E_1 + \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2} > 0, \quad \frac{\alpha}{lm}E_2 + \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2} \leq \frac{4}{\Theta^2}. \quad (23)$$

Следовательно, при выполнении условия (23) линейная неоднородная система (18) имеет, и при том единственное, Θ -периодическое решение. Обозначим это решение через $x^\Theta(t) = (x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t))^T$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Пусть параметры $\bar{u}$, $\underline{u}$, Θ_1 , Θ программного управления (9) для системы (4) выбраны так, что выполняются следующие условия:

1) справедливы неравенства

$$M_1 < \underline{T} = \frac{\underline{u}(1 - e^{-\gamma(\Theta - \Theta_1)/\alpha}) + \bar{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha})e^{-\gamma(\Theta - \Theta_1)/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}},$$

$$A_2 > \bar{T} = \frac{\bar{u}(1 - e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}) + \underline{u}(1 - e^{-\gamma(\Theta - \Theta_1)/\alpha})e^{-\gamma\Theta_1/\alpha}}{1 - e^{-\gamma\Theta/\alpha}};$$

2) имеет место условие (23).

Тогда в системе (4), замкнутой программным управлением (9), существует единственное периодическое движение $x^\Theta(t) = (x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t), x_3^\Theta(t))^T$, причём $x_3^\Theta(0) = \underline{T}$.

3. Периодический режим в системе с обратной связью. Вернёмся к исходной задаче (см. п. 2) о построении регулятора в форме обратной связи (3), обеспечивающего существование периодического режима в замкнутой системе (5). Основная идея решения этой задачи состоит в выборе параметров обратной связи (3) на основе результатов работы [1], позволяющих гарантировать существование колебательного режима в замкнутой системе (5), а также на основе рассчитанного, в соответствии с теоремой 1, программного управления (9) и обеспечиваемого им периодического решения $x^\Theta(t)$.

Итак, на основании теоремы 1 и достаточных условий существования колебательных режимов, полученных в работе [1], справедлива следующая

Теорема 2. Пусть

1) для параметров системы (4) выполняется неравенство

$$\Delta - \frac{mg + k\Delta}{k + \alpha E_1/l} > 0;$$

2) спектр каждой матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kl + \alpha E_1}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kl + \alpha E_2}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix}$$

лежит на отрицательной полуоси и является простым;

3) параметры $\bar{u}$, $\underline{u}$, Θ_1 , Θ удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того,

$$\underline{u} < M_1, \quad \bar{u} > A_2;$$

4) величины $y_1 = x_1^\Theta(0)$, $y_2 = x_1^\Theta(\Theta_1)$ удовлетворяют неравенствам

$$y_1 > \Delta - \frac{mg + k\Delta}{k + \alpha E_1/l}, \quad y_2 < \Delta - \frac{mg + k\Delta}{k + \alpha E_2/l},$$

где $x^\Theta(t) = (x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t), x_3^\Theta(t))^T$ – периодическое решение системы (4), замкнутой программным управлением (9) с параметрами $\bar{u}$, $\underline{u}$, Θ_1 , Θ ;

5) для системы (4), замкнутой обратной связью (3) с параметрами $\bar{u}$, $\underline{u}$, y_1 , y_2 , выполняются неравенства

$$\frac{E_2}{E_1} - \frac{\beta C_3^2}{\bar{t}_1^*} < 1, \quad \left(\frac{m^2 g^2}{k} + \frac{\alpha E_2}{l} \Delta^2 \right) \nu_0 < k \left(\Delta + \frac{mg}{k} \right)^2,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{t}_1^* &= \min \left\{ \frac{1}{C_2 \sqrt{2m}}, (y_2 - y_1) \sqrt{\frac{E_1 m}{2E_2 C_1}} \right\}, \\ C_1 &= k \left(y_1 + \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{\alpha}{l} E_2 (y_1 - \Delta)^2, \quad C_2 = \frac{E_2}{m E_1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{m}} + \sqrt{k} + \sqrt{\frac{\alpha}{l} E_2} \right), \\ C_3 &= \sqrt{\frac{E_1}{E_2 (k + \alpha E_2 / l)}}, \quad \nu_0 = \max \{ H_{\max} / H_0, 2 \}, \quad H_0 = \frac{4mg\Delta E_1}{k + E_1}, \\ H_{\max} &= \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2 \bar{H}^*, \quad \bar{H}^* = \max \{ H^*, \bar{H} \}, \quad \bar{H} = \max \left\{ \frac{m^2 g^2}{k} + \frac{\alpha}{l} E_2 \Delta^2, k \left(\Delta + \frac{mg}{k} \right)^2 \right\}, \\ H^* &= \max \left\{ \left(\frac{2\beta C_3 C_4 / \bar{t}_1^*}{1 - E_2 / E_1} + \beta C_3^2 / \bar{t}_1^* \right)^2, \frac{C_4^2}{C_3^2} \right\}, \quad C_4 = \frac{mg}{k} + \Delta + y_1;\end{aligned}$$

б) для момента времени t_0 выполняются условия

$$0 < x_1^\Theta(t_0) < \zeta_+, \quad x_2^\Theta(t_0) = 0, \quad t_0 < \Theta_{A_2},$$

где ζ_+ – положительный корень квадратного трёхчлена

$$p(\zeta) \equiv k\nu_0 \left(\zeta + \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{\alpha\nu_0 E_2}{l} (\zeta - \Delta)^2 - k \left(\Delta + \frac{mg}{k} \right)^2.$$

Тогда решение $\tilde{x}(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями

$$\tilde{x}_1(0) = x_1^\Theta(t_0), \quad \tilde{x}_2(0) = x_2^\Theta(t_0), \quad \tilde{x}_3(0) = x_3^\Theta(t_0) \quad (24)$$

является колебательным режимом с параметрами t_1^* , t_2^* , y_1 , y_2 , где

$$t_1^* = (y_2 - y_1) \sqrt{m / H_{\max}}$$

(алгоритм для расчёта константы t_2^* достаточно громоздкий и полностью приведён в [1]). Кроме того, для решения $\tilde{x}(t)$ верно тождество $\tilde{x}(t) \equiv x^\Theta(t + t_0)$ при $t \in [0, t_1^*]$.

Теперь покажем, что при некоторых дополнительных условиях на константу t_1^* колебательный режим $\tilde{x}(t)$ системы (5) с начальными условиями (24) является, на самом деле, периодическим режимом. Для этого достаточно установить, что при начальных условиях (24) переключения реле обратной связи (3) с параметрами $\bar{u}$, $\underline{u}$, y_1 , y_2 , удовлетворяющими условиям теоремы 2, на промежутке $[0, \Theta]$ происходят при $t_1 = \Theta_1 - t_0$ и $t_2 = \Theta - t_0$.

Итак, пусть выполнены условия теоремы 2 и для t_1^* справедливо неравенство

$$\Theta_{A_2} - t_0 < t_1^* \leq \Theta_1 - t_0. \quad (25)$$

Тогда в силу колебательности решения $\tilde{x}(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями (24) выполнено неравенство

$$\tilde{x}_1(t) < y_2, \quad t \in [0, \Theta_{A_2} - t_0]. \quad (26)$$

Отсюда вытекает, что в силу теоремы 2 при $t \in [0, \Theta_{A_2} - t_0]$ верно тождество $\tilde{x}(t) \equiv x^\Theta(t + t_0)$.

Далее рассмотрим поведение функций $\tilde{x}_1(t)$ и $\tilde{x}_2(t)$ на промежутке $[\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$. Прежде всего заметим, что вследствие определения обратной связи (3) тождества $\tilde{x}_1(t) \equiv x_1^\Theta(t + t_0)$ и $\tilde{x}_2(t) \equiv x_2^\Theta(t + t_0)$ на промежутке $[\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$ остаются верными вплоть до момента $t_* \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$, для которого выполняется равенство $\tilde{x}_1(t_*) = x_1^\Theta(t_* + t_0) = y_2$. Покажем, что $x_1^\Theta(t + t_0) \neq y_2$ при $t \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$. Так как $\varphi(t + t_0) \equiv E_2$ на промежутке

$[\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$, то функции $x_1^\Theta(t + t_0)$ и $x_2^\Theta(t + t_0)$ на нём тождественно совпадают с соответствующими компонентами $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ решения $\hat{x}(t)$ линейной стационарной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}E_2\right)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta E_2\end{aligned}\quad (27)$$

с начальными условиями

$$x_1(\Theta_{A_2} - t_0) = x_1^\Theta(\Theta_{A_2}), \quad x_2(\Theta_{A_2} - t_0) = x_2^\Theta(\Theta_{A_2}). \quad (28)$$

Согласно условию 2) теоремы 2 матрица коэффициентов системы (27) является устойчивой и имеет простой спектр. Покажем, что для решения $\hat{x}(t)$ этой системы с начальными условиями (28) выполняется соотношение $\hat{x}_1(t) \neq y_2$ при $t \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$.

Действительно, первая компонента $x_1(t)$ любого решения $x(t)$ системы (27) обладает свойством

$$x_1(t) \rightarrow x_1^* > y_2 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (29)$$

где $x_1^* = \Delta - (mg + k\Delta)/(k + \alpha E_2/l)$; в (29) сходимость доказана в работе [1], а неравенство – это второе неравенство в условии 4) теоремы 2.

Рассмотрим уравнение

$$\hat{x}_1(t) = y_2, \quad t \geq \Theta_{A_2} - t_0. \quad (30)$$

Так как вектор-функция $(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))^T$ на промежутке $[\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$ является решением системы (27), собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы коэффициентов которой отрицательны и различны, то справедливо представление

$$\hat{x}_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + x_1^*,$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные. При этом, поскольку

$$\hat{x}_1(\Theta_{A_2} - t_0) < y_2 < x_1^*,$$

постоянные C_1 и C_2 не равны одновременно нулю.

Поэтому уравнение (30) можно записать в виде

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = y_2 - x_1^*, \quad \text{где} \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad C_1^2 + C_2^2 > 0, \quad t > \Theta_{A_2}.$$

Заметим, что функция в левой части рассматриваемого уравнения может иметь не более одной точки экстремума при $t > 0$, а значит, в силу свойства (29) уравнение (30) может иметь не более одного корня. Следовательно, уравнение $x_1^\Theta(t + t_0) = y_2$ может иметь не более одного корня на промежутке $t \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$. Поэтому, так как в силу условия теоремы 2 функция $x_1^\Theta(t + t_0)$ принимает значение y_2 при $t = \Theta_1 - t_0$, то $x_1^\Theta(t + t_0) \neq y_2$ при $t \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0]$. Таким образом,

$$\tilde{x}_1(t) \neq y_2, \quad t \in [\Theta_{A_2} - t_0, \Theta_1 - t_0], \quad \text{и} \quad \tilde{x}_1(\Theta_1 - t_0) = y_2. \quad (31)$$

Теперь предположим, что для t_1^* дополнительно выполнено условие

$$\Theta_{M_1} - \Theta_1 < t_1^* \leq \Theta_2. \quad (32)$$

Тогда в силу того, что решение $\tilde{x}(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями (24) является колебательным режимом, выполнено неравенство $\tilde{x}_1(t) > y_1$, $t \in [\Theta_1 - t_0, \Theta_{M_1} - t_0]$. Отсюда, учитывая соотношения (31) и (26), получаем тождество

$$\tilde{x}(t) \equiv x^\Theta(t + t_0) \quad \text{при} \quad t \in [0, \Theta_{M_1} - t_0]. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь поведение функций $\tilde{x}_1(t)$ и $\tilde{x}_2(t)$ на промежутке $[\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$. Аналогично приведённым выше рассуждениям заметим, что тождества $\tilde{x}_1(t) \equiv x_1^\Theta(t + t_0)$ и $\tilde{x}_2(t) \equiv x_2^\Theta(t + t_0)$ на промежутке $[\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$ остаются верными вплоть до момента $t_* \in [\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$, для которого выполняется равенство $\tilde{x}_1(t_*) = x_1^\Theta(t_* + t_0) = y_1$. Покажем, что $x_1^\Theta(t + t_0) \neq y_1$ при $t \in [\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$. Так как $\varphi(t + t_0) \equiv E_1$ на промежутке $[\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$, то функции $x_1^\Theta(t + t_0)$ и $x_2^\Theta(t + t_0)$ тождественно совпадают на нём с соответствующими компонентами $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$ решения $\hat{x}(t)$ линейной стационарной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{\alpha}{lm}E_1\right)x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) - g + \frac{\alpha}{lm}\Delta E_1 \end{aligned} \quad (34)$$

с начальными условиями

$$x_1(\Theta_{M_1} - t_0) = x_1^\Theta(\Theta_{M_1}), \quad x_2(\Theta_{M_1} - t_0) = x_2^\Theta(\Theta_{M_1}). \quad (35)$$

Согласно условию 2) теоремы 2 матрица коэффициентов системы (34) является устойчивой и имеет простой спектр. Покажем, что для решения $\hat{x}(t)$ этой системы с начальными условиями (35) выполняется соотношение $\hat{x}_1(t) \neq y_1$ при $t \in [\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$.

Действительно, первая компонента $x_1(t)$ любого решения $x(t)$ системы (34) обладает свойством

$$x_1(t) \rightarrow x_1^{**} < y_1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad (36)$$

где $x^{**} = \Delta - (mg + k\Delta)/(k + \alpha E_1/l)$; в (36) сходимости доказана в работе [1], а неравенство – первое неравенство в условии 4) теоремы 2.

Рассмотрим уравнение

$$\hat{x}_1(t) = y_1, \quad t \geq \Theta_{M_1} - t_0. \quad (37)$$

Так как вектор-функция $(x_1^\Theta(t), x_2^\Theta(t))^T$ на промежутке $[\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$ является решением системы (34), собственные значения λ'_1 и λ'_2 матрицы коэффициентов которой отрицательны и различны, то справедливо представление

$$\hat{x}_1(t) = C_1 e^{\lambda'_1 t} + C_2 e^{\lambda'_2 t} + x_1^{**},$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные. При этом, поскольку

$$\hat{x}_1(\Theta_{M_1} - t_0) > y_1 > x_1^{**},$$

C_1 и C_2 не равны одновременно нулю.

Поэтому уравнение (37) можно записать в виде

$$C_1 e^{\lambda'_1 t} + C_2 e^{\lambda'_2 t} = y_1 - x_1^{**}, \quad \text{где} \quad \lambda'_1 < 0, \quad \lambda'_2 < 0, \quad C_1^2 + C_2^2 > 0, \quad t \geq \Theta_{M_1} - t_0.$$

Заметим, что функция в левой части рассматриваемого уравнения может иметь не более одной точки экстремума при $t > 0$, а тогда в силу свойства (36) уравнение (37) может иметь не более одного корня. Следовательно, уравнение $x_1^\Theta(t + t_0) = y_1$ может иметь не более одного корня на промежутке $t \in [\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$. Поэтому, так как в силу условия теоремы 2 функция $x_1^\Theta(t + t_0)$ принимает значение y_1 при $t = \Theta - t_0$, $x_1^\Theta(t + t_0) \neq y_1$ при $t \in [\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0]$. Таким образом,

$$\tilde{x}_1(t) \neq y_1, \quad t \in [\Theta_{M_1} - t_0, \Theta - t_0], \quad \text{и} \quad \tilde{x}_1(\Theta - t_0) = y_1.$$

Отсюда и из тождества (33) вытекает, что

$$\tilde{x}(t) \equiv x^\Theta(t + t_0) \quad \text{при} \quad t \in [0, \Theta - t_0]. \quad (38)$$

Наложим ещё одно ограничение на константу t_1^* , а именно, пусть

$$t_1^* > t_0. \quad (39)$$

Тогда вследствие того, что решение $\tilde{x}(t)$ замкнутой системы (5) с начальными условиями (24) является колебательным режимом, выполнено неравенство

$$\tilde{x}_1(t) < y_2, \quad t \in [\Theta - t_0, \Theta]. \quad (40)$$

Отсюда и из тождества (38) вытекает, что при $t \in [0, \Theta]$ моменты переключений реле обратной связи (3) и реле программного управления (9) совпадают. Но тогда на этом промежутке справедливо тождество $\tilde{x}(t) \equiv x^\Theta(t + t_0)$, а в силу Θ -периодичности функции $x^\Theta(t + t_0)$ это тождество верно при всех $t \geq 0$.

Следовательно, колебательное решение $\tilde{x}(t)$ системы (5) с начальными условиями (24) является периодическим режимом. Таким образом, доказана следующая теорема о существовании периодического режима в замкнутой системе (5).

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и имеют место неравенства (25), (32) и (39). Тогда в замкнутой системе (5) существует периодический режим с начальными условиями (24).

4. Результаты моделирования. Рассмотрим систему (1) со следующими параметрами:

$$m = 0.018, \quad \beta = 0.7, \quad k = 0.07, \quad \alpha = 1.32 \cdot 10^{-8}, \quad l = 0.2, \quad \Delta = 0.009, \quad \gamma = 1.76 \cdot 10^9,$$

$$M_1 = 24.3, \quad M_2 = 52.7, \quad A_1 = 32.8, \quad A_2 = 57.5, \quad E_1 = 3 \cdot 10^8, \quad E_2 = 8 \cdot 10^8.$$

Используя результаты настоящей статьи, удаётся рассчитать параметры

$$\bar{u} = 80, \quad \underline{u} = 1, \quad y_1 = 0.00172, \quad y_2 = 0.0063$$

обратной связи (3), при которых в соответствующей замкнутой системе при $E(0) = 4.73 \cdot 10^8$ и начальных условиях

$$y(0) = 0.0032, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad T(0) = 41.067$$

возникает периодическое движение (рис. 5) с периодом $\Theta = 0.2$. При этом моменты переключения реле обратной связи $t_1 = \Theta_1 - t_0$, $t_2 = \Theta - t_0$, где $\Theta_1 = 0.1$ и $t_0 = 0.036$.

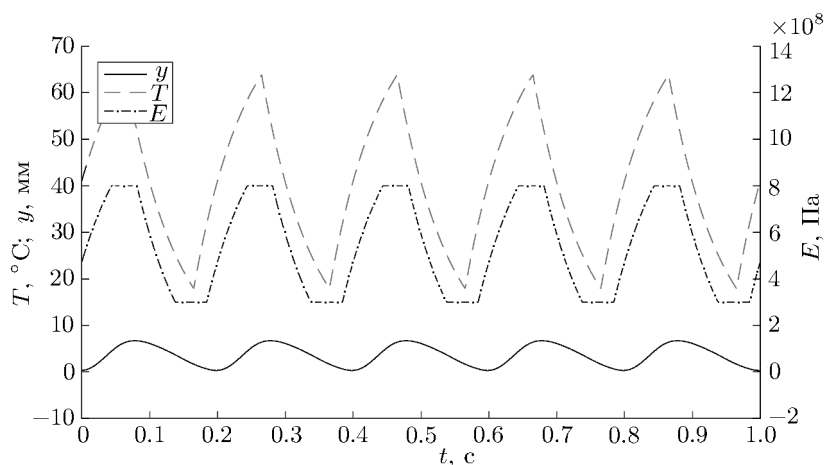


Рис. 5. Графики функций $y(t)$, $T(t)$, $E(t)$, соответствующих периодическому режиму системы (1).

Заключение. В работе рассмотрена математическая модель одной термомеханической установки [1] в виде управляемой нелинейной динамической системы (1), коэффициенты которой – положительные числовые параметры. При этом основная задача состояла в выборе

алгоритма управления, обеспечивающего в замкнутой системе возникновение периодического движения. В качестве алгоритма управления предложено использовать обратную связь по выходу с оператором обратной связи в форме двухпозиционного реле с гистерезисом. В результате получены достаточные условия на коэффициенты и начальные значения переменных состояния системы (1) и на параметры регулятора (3), обеспечивающие возникновение периодического режима в соответствующей замкнутой системе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного фонда Болгарии (проект 19-57-18006), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-57-0001, 20-07-00827, 19-07-00294), Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
2. *Todorov T., Nikolov N., Todorov G., Ralev Y.* Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web of Conferences. 2018. V. 148. P. 12002.
3. *Pai A.* A phenomenological model of shape memory alloys including time-varying stress: master's thesis of applied science. Waterloo, Ontario, Canada, 2007.
4. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М., 1965.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича, г. Москва,
Технический университет, г. София, Болгария

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
После доработки 19.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.