ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1116–1141

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ: АЛЬТЕРНАТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕЛАКСАЦИЙ

© 2021 г. А. Г. Ченцов

Исследуется нелинейная дифференциальная игра (ДИ) сближения–уклонения. Для неё Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным установлена фундаментальная теорема об альтернативе. Параметрами игры являются целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО); в указанной теореме оба эти множества предполагались замкнутыми в пространстве позиций. В настоящем исследовании замкнутости множества, формирующего ФО, не предполагается, а постулируется только замкнутость всех его сечений, отвечающих фиксации моментов времени; ЦМ предполагается замкнутым. При этих условиях устанавливается вариант утверждения об альтернативной разрешимости и конструируются релаксации исходной ДИ, определяемые ослаблением условий окончания игры сближения. Данное построение использует известный метод программных итераций (МПИ), реализуемый на пространстве множеств, точками которых являются позиции игры. В результате формируется специальная последовательность функций, поточечно сходящаяся к некоторой предельной функции позиции. Значения последней имеют смысл наименьшего размера окрестностей множеств-параметров, при котором игрок, заинтересованный в сближении с ЦМ, гарантированно решает свою задачу при ослабленных отмеченным выше способом условиях; при этом, однако, допускается та или иная степень приоритетности в части вопросов сближения с ЦМ и соблюдения ФО. Для построения упомянутой предельной функции предлагается также "прямая" итерационная процедура МПИ в функциональном пространстве, причём искомая предельная функция оказывается неподвижной точкой оператора, порождающего данную процедуру. Кроме того, показано, что каждое значение этой функции является ценой некоторой ДИ со специальным функционалом качества.

DOI: 10.31857/S0374064121080136

Введение. Теорема Красовского–Субботина об альтернативе (см. [1, 2]) является ключевым положением современной теории дифференциальных игр (ДИ); с использованием данной теоремы установлено [2] существование седловой точки для типичных функционалов качества, важных для теории и приложений. В самой этой теореме рассматривается вариант ДИ, для которой функционал качества отсутствует; предполагаются заданными замкнутые целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО). Игрок I заинтересован в приведении траектории на ЦМ при соблюдении ФО; цель игрока II (уклониста) противоположна. Из теоремы об альтернативе следует, что множество, формирующее ФО, допускает разбиение в сумму множеств (успешной) разрешимости игроков. При этом игроки могут использовать позиционные стратегии соответствующего типа, определяемого условиями информационной согласованности [2] (используются процедуры управления по принципу обратной связи); возможно (см. [3]) использование квазистратегий (неупреждающих стратегий). Таким образом, множество разрешимости игрока I определяет конкретный вариант позиционной стратегии (стратегия экстремального сдвига Н.Н. Красовского), гарантирующей наведение на ЦМ при соблюдении ФО. В связи с процедурой, устойчивой к помехам в канале наблюдения, отметим схему управления с поводырем (моделью) Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [2]).

Исследованиям различных вопросов, связанных с теорией ДИ, посвящено очень много публикаций. Напомним прежде всего монографию [4], где приведено большое число практических задач, формализуемых в виде ДИ, и указаны некоторые методы их исследования. Имеются монографии [2, 5–11], в которых изложены основные положения теории и указаны возможные приложения. В связи с задачами теории ДИ отметим особо основополагающие работы

Л.С. Понтрягина и его учеников [12–15] и исследования Б.Н. Пшеничного [16–18]. В работах А.И. Субботина [10, 11, 19, 20] и его учеников создано новое направление, связанное с изучением обобщённых решений уравнения Гамильтона–Якоби. Эти исследования позволили установить целый ряд важных свойств функции цены ДИ. Отметим принципиальный результат А.В. Кряжимского [21], в котором утверждение об альтернативе в ДИ сближения–уклонения распространено на случай управляемых систем, не удовлетворяющих условию Липшица по фазовой переменной.

Одним из методов исследования ДИ является метод программных итераций (МПИ) – см. [22–27]. Обзор ранних исследований по МПИ содержится в [10, гл. IV, V]. Конструкции на основе МПИ используются и в настоящей работе (см. также [26, 27]; в частности, см. [27, раздел 6]). Схема применения МПИ здесь подобна в значительной степени работам [28–31], развитием которых является настоящее исследование, имеющее следующие основные этапы.

1) Обоснование положения об альтернативной разрешимости ДИ сближения–уклонения при ослаблении требований к множеству, определяющему ФО в задаче игрока I.

2) Построение функции позиции, значения которой определяют аналог наименьшего размера окрестностей ЦМ и множества, формирующего ФО, для которого игрок I ещё в состоянии гарантировать успех в задаче сближения при ослабленных должным образом условиях окончания игры.

3) Построение нового варианта МПИ, реализующего функцию позиции из этапа 2) в виде предела последовательности итераций в функциональном пространстве.

4) Доказательство свойства неподвижной точки для функции из этапов 2), 3), а также свойства её экстремальности в порядковом смысле.

5) Обоснование положения о том, что упомянутая выше функция позиции есть функция цены некоторой ДИ на минимакс-максимин в несимметричных классах стратегий (квазистратегии игрока I и стратегии с управляемыми моментами коррекции игрока II).

Целый ряд положений настоящей работы допускает естественные аналогии с [28–31], но имеются и существенные различия. В части, касающейся применения МПИ, отметим следующее. Конструкции на основе МПИ здесь являются средствами теоретического исследования и не претендуют на роль инструмента решения конкретных задач теории ДИ.

1. Общие сведения. Используется стандартная теоретико-множественная символика; $\varnothing$ – пустое множество, $\triangleq$ – равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого – множества. Принимаем аксиому выбора. Двум произвольным объектам x и y ставим в соответствие их неупорядоченную пару $\{x;y\}$ [32, с. 60]. Если h – объект, то $\{h\} \triangleq \{h;h\}$ есть синглетон, содержащий h. Следуя [32, с. 67], полагаем для любых объектов a и b, что $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для всякой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно, т.е. $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Если H – множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) множества H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ – семейство всех непустых п/м множества H. Множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ ставим в соответствие семейство $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M\colon\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, двойственное к $\mathcal{M}$. Обычным образом определяем след семейства: если $\mathcal{A}$ – семейство и B – множество, то $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \bigcap B\colon\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$. Для произвольных множеств A и B через B^A обозначаем [32, с. 77] множество всех отображений из A в B. Если A и B – множества, $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $g^1(C) \triangleq \{g(x)\colon\ x \in C\}$ – образ множества C при действии g, а $(g \mid C) \in B^C$ – сужение отображения g на множество C, определяемое условием $(g \mid C)(y) \triangleq g(y)$ для любого $y \in C$.

Полагаем, что $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ – вещественная прямая). Как обычно, $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел; пусть, кроме того, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \bigsqcup \mathbb{N}$. Если $m \in \mathbb{N}_0$, то $\overline{1,m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant m\}$ и $\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 : m \leqslant k\}$. Полагаем, что элементы множества $\mathbb{N}$ не являются множествами. С учётом этого для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в H (т.е. множества всех кортежей в H "длины" k) вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное обозначение H^k; в качестве H может использоваться семейство. В дальнейшем часто используется запись отображений в индексной форме (семейство с индексом; см. [33, с. 11]); в частности, это относится к кортежам. Согласно введённому обозначению $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей в $\mathcal{H}$; если $\mathcal{H}$ – семейство, $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{H}$ – множество, то

$$((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{H}) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((\mathbb{H} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i) \ \&\ (H_{k+1} \subset H_k \quad \forall k \in \mathbb{N})). \tag{1}$$

Непустому множеству S поставим в соответствие множество $\mathcal{R}_+[S] \overset{\triangle}{=} (\mathbb{R}_+)^S$ всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S; в качестве S может использоваться семейство. В последнем случае элементы $\mathcal{R}_+[S]$ – суть функции множеств.

Измеримость, меры. Произвольному множеству E ставим в соответствие семейство $(\sigma\text{-alg})[E]$ всех σ-алгебр п/м множества E; если $\mathcal{E} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, то пара $(E,\mathcal{E})$ – стандартное измеримое пространство (ИП), множества из $\mathcal{E}$ называются *измеримыми*. Если $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ (т.е. $\mathfrak{E}$ – семейство п/м множества E), то через $\sigma_E^0(\mathfrak{E}) \in (\sigma\text{-alg})[E]$ обозначаем σ-алгебру на E, порождённую семейством $\mathfrak{E}$. Типичный вариант соответствует случаю, когда $\mathfrak{E}$ – топология на E; тогда $\sigma_E^0(\mathfrak{E})$ есть σ-алгебра борелевских п/м множества E. Для множеств X и $Y \in \mathcal{P}(X)$, семейств $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ и $\mathcal{X}|_Y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ всегда $\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \sigma_X^0(\mathcal{X})|_Y$;

$$(Y \in \sigma_X^0(\mathcal{X})) \Longleftrightarrow (\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma_X^0(\mathcal{X}) : \Sigma \subset Y\}). \tag{2}$$

Если $(E,\mathcal{E})$ – стандартное ИП, то через $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных счётно-аддитивных (с.-а.) мер на $\mathcal{E}$, в частности, $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{E}] \subset \mathcal{R}_+[\mathcal{E}]$. При $\mathcal{E} = \sigma_E^0(\tau)$, где τ – топология на E, меры из $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{E}]$ называют *борелевскими*; в случае метризуемости топологического пространства (E,τ) все такие меры регулярны (см. [34, гл. 1]). Данный случай достаточен для последующих построений.

2. Игра сближения–уклонения (содержательное обсуждение). Рассматриваем $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в качестве фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t,x,u,v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{3}$$

функционирование которой рассматривается на промежутках $[t,\vartheta_0]$, $t \in T$, где $T \overset{\triangle}{=} [t_0,\vartheta_0]$ при $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0,\infty[$ (итак, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$). В (3) P и Q – непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$,

$$f : T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n \tag{4}$$

– непрерывная (по совокупности переменных) функция. Предполагается, что в системе (3) $u \in P$ и $v \in Q$ – управления игроков I и II соответственно. Для упрощения полагаем сейчас, что при $t \in T$ игроки I и II могут формировать кусочно-постоянные, непрерывные справа на $[t,\vartheta_0)$ и непрерывные слева в точке ϑ_0 функции на $[t,\vartheta_0]$ со значениями в компактах P и Q соответственно; через $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ обозначим множества всех таких управлений на $[t,\vartheta_0]$ игроков I и II соответственно. Будем предполагать сейчас, что при $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$ реализуется единственная обычная траектория $\mathbf{x}(\,\cdot\,,t,x,u(\cdot),v(\cdot))$ системы (3), (4); $\mathbf{x}(\,\cdot\,,t,x,u(\cdot),v(\cdot)) \in C_n([t,\vartheta_0])$, где (здесь и ниже) $C_n([t,\vartheta_0])$ – множество всех непрерывных отображений из $[t,\vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$, $C_n([t,\vartheta_0]) \subset (\mathbb{R}^n)^{[t,\vartheta_0]}$. Управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, где $t \in T$, являются программными. Будем предполагать, что они формируются некоторыми (допустимыми) способами; поэтому каждой позиции $(t_*,x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ ставятся в соответствие непустые множества $\mathfrak{U}\langle t_*,x_*\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t_*,x_*\rangle$ возможных способов формирования реализаций $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_*}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_{t_*}$ соответственно; выбором $\mathbb{U} \in \mathfrak{U}\langle t_*,x_*\rangle$ распоряжается игрок I, а выбором $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}\langle t_*,x_*\rangle$ – игрок II. Каждому такому способу $\mathbb{U}$ ставится в соответствие непустой пучок $\mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$ траекторий, возможных при использовании $\mathbb{U}$ и стартующих из позиции (t_*, x_*); предполагается, что эти траектории представляют собой равномерные пределы обычных траекторий. Аналогично способу $\mathbb{V}$ ставится в соответствие непустой пучок $\mathfrak{X}_{II}(t_*, x_*, \mathbb{V})$ траекторий, стартующих из позиции (t_*, x_*) и являющихся равномерными пределами обычных траекторий.

Пусть $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$; M есть ЦМ игрока I, а N формирует его ФО в виде системы своих сечений. Возникают следующие две (M, N)-задачи.

$I(M,N)$. Найти множество всех $(t_*, x_*) \in N$, для которых $\exists \mathbb{U} \in \mathfrak{U}\langle t_*, x_*\rangle$ $\forall x(\cdot) \in \in \mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$ $\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \ \& \ ((t, x(t)) \in N \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{5}$$

$II(M,N)$. Найти множество всех $(t^*, x^*) \in N$, для которых $\exists \mathbb{V} \in \mathfrak{V}\langle t^*, x^*\rangle$ $\forall x(\cdot) \in \in \mathfrak{X}_{II}(t^*, x^*, \mathbb{V})$ $\forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \ \Rightarrow \ (\exists t \in [t^*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin N). \tag{6}$$

Ситуацию (5) рассматриваем как (M,N)-*сближение*, а ситуацию (6) – как (M,N)-*уклонение*. Если множества, определяющие решение задач $I(M,N)$, $II(M,N)$, образуют разбиение N, будем говорить, что имеет место (M,N)-*альтернатива*. В [1, 2] (M,N)-задачи рассматривались в случае, когда $\mathfrak{U}\langle t, x\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t, x\rangle$ определялись как не зависящие от (t, x) множества позиционных стратегий, а пучки траекторий конструировались в классе равномерных пределов реализуемых пошаговых движений; важную роль играли при этом условия информационной согласованности (см. [2, гл. XI]).

Подчеркнём, что в рассматриваемой постановке имеется существенная особенность в сравнении с [1, 2]. Так, обращаясь к задаче $I(M,N)$, отметим, что в момент сближения с ЦМ допускается нарушение ФО, т.е. (по сути) потеря дальнейшей работоспособности объекта управления, при фактическом осуществлении сближения, что может иметь место в некоторых технических системах "одноразового действия" (цель достигнута, а остальное несущественно). Данное соглашение важно для последующих построений. Если же (как и в [1, 2]) множество, определяющее ФО, замкнуто в обычном смысле, то, как легко видеть, наведение на ЦМ в смысле задачи $I(M,N)$ будет осуществляться (для позиций из N) так же, как и в [1, 2], включая соблюдение ФО в момент реального осуществления упомянутого наведения. Итак, отмеченная особенность связана с более общим допущением в отношении множества N, определяющего ФО задачи.

В [3] элементы множеств $\mathfrak{U}\langle t, x\rangle$ и $\mathfrak{V}\langle t, x\rangle$ отождествлялись с многозначными квазистратегиями; сами эти множества зависели только от t. Представляет интерес вопрос о зависимости решений задач $I(M,N)$, $II(M,N)$ от множеств M и N. В частности, в условиях (M,N)-альтернативы для позиции, не принадлежащей множеству разрешимости задачи (M,N)-сближения, интересен вопрос о наименьшем значении ε, $\varepsilon > 0$, при котором эта позиция содержится в множестве, являющемся решением задачи $I(M_\varepsilon, N_{\chi\varepsilon})$, где M_b и N_b – b-окрестности множеств M и N при $b > 0$, а χ, $\chi > 0$, – некоторый коэффициент приоритетности в смысле вопросов, связанных с достижением ЦМ и соблюдением ФО.

3. Обобщённые управления. Ниже используются управления-меры, называемые также *обобщёнными управлениями* (ОУ). Напомним, что $T = [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. При $t \in T$ рассматриваем конечномерные компакты: $[t, \vartheta_0]$, $Y_t \overset{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times P$, $Z_t \overset{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \overset{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times P \times Q$, оснащаемые σ-алгебрами борелевских множеств:

$$\mathcal{T}_t \in (\sigma\text{-alg})[[t, \vartheta_0]], \quad \mathcal{K}_t \in (\sigma\text{-alg})[Y_t], \quad \mathcal{D}_t \in (\sigma\text{-alg})[Z_t], \quad \mathcal{C}_t \in (\sigma\text{-alg})[\Omega_t].$$

Итак, $([t, \vartheta_0], \mathcal{T}_t)$, $(Y_t, \mathcal{K}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$, $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ – стандартные ИП. Среди борелевских множеств выделяем цилиндры: при $t \in T$ и $I \in \mathcal{T}_t$ имеем $I \times P \in \mathcal{K}_t$, $I \times Q \in \mathcal{D}_t$ и $I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$. Кроме того, имеем [35, с. 17] $\Omega_t = ([t, \vartheta_0] \times P) \times Q = Y_t \times Q$, а потому $S \times Q \in \mathcal{C}_t$ при $S \in \in \mathcal{K}_t$. Наконец, при $D \in \mathcal{D}_t$ справедливо включение $D \underline{\times} P \overset{\triangle}{=} \{(\xi, u, v) \in \Omega_t : (\xi, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t$.

В связи с указанными свойствами цилиндров см. [34, добавление II; 36]. Отметим очевидные следствия эквивалентности (2): при $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$ выполняются включения

$$\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{C}_{t_1}|_{[t_1,t_2[\times P\times Q} = \{C \in \mathcal{C}_{t_1} : C \subset [t_1,t_2[\times P \times Q\} \in (\sigma\text{-alg})[[t_1,t_2[\times P \times Q],$$

$$\mathcal{D}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{D}_{t_1}|_{[t_1,t_2[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} : D \subset [t_1,t_2[\times Q\} \in (\sigma\text{-alg})[[t_1,t_2[\times Q].$$

Если $t \in T$, то через λ_t обозначаем след меры Лебега на $\mathcal{T}_t$ (см. [37, с. 155]);

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{C}_t] : \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{K}_t] : \mu(I \times P) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{D}_t] : \nu(I \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\}.$$

Заметим, что (см. [10, гл. IV, § 2]) $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ допускает погружение в $\mathcal{H}_t$, а $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ допускают аналогичные погружения в $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{E}_t$ соответственно. Элементы $\mathcal{H}_t$ – "совокупные" (программные) ОУ, а элементы $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{E}_t$ – ОУ игроков I и II соответственно. Полагаем, что

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t : \eta(K \times Q) = \mu(K) \ \ \forall K \in \mathcal{K}_t\} \quad \forall \mu \in \mathcal{R}_t,$$

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t : \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \tag{7}$$

В определении (7) введены специальные множества ОУ, отвечающие содержательно ситуации, когда при реализации УП $(u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ одно из программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ фиксировано, а другое может быть произвольным. Через $\mathcal{B}$ обозначаем σ-алгебру борелевских п/м множества Q; при $K \in \mathcal{K}_t$ и $B \in \mathcal{B}$ имеем $K \times B \in \mathcal{C}_t$ (см. [34, добавление II]). Если $v \in Q$, то для меры Дирака, сосредоточенной в точке v, через δ_v обозначаем след на σ-алгебре $\mathcal{B}$; если $t \in T$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то $\mu \bigotimes v \in \pi_t(\mu)$ определяем условиями

$$(\mu \bigotimes v)(K \times B) \triangleq \mu(K)\delta_v(B) \quad \forall K \in \mathcal{K}_t \quad \forall B \in \mathcal{B};$$

данная мера отвечает совместному действию на систему (3), (4) ОУ μ и константы v; см. построения в [38, 39].

Через $C(\Omega_t)$, $C(Y_t)$ и $C(Z_t)$ обозначаем множества всех непрерывных в/з функций на компактах Ω_t, Y_t и Z_t соответственно. Определяя на этих множествах линейные операции поточечно и вводя норму равномерной сходимости, получаем сепарабельные банаховы пространства; топологически сопряжённые к ним обозначим $C^*(\Omega_t)$, $C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ (пространства линейных ограниченных функционалов на $C(\Omega_t)$, $C(Y_t)$ и $C(Z_t)$ соответственно). Оснащаем $C^*(\Omega_t)$, $C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ *-слабыми топологиями. С учётом теоремы Рисса [37, гл. IV] $\mathcal{H}_t$, $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{E}_t$ отождествляются со *-слабо компактными п/м в $C^*(\Omega_t)$, $C^*(Y_t)$ и $C^*(Z_t)$ соответственно (являются сильно ограниченными и *-слабо замкнутыми), а потому эти три множества сами могут рассматриваться как *-слабые метризуемые компакты (используем свойство сепарабельности предсопряжённых пространств; см. [37, гл. V]). При этом замкнутость и компактность отождествимы с секвенциальной замкнутостью и секвенциальной компактностью соответственно (см. [40, § 2.7]). Итак, все нужные в дальнейшем топологические свойства представимы в терминах *-слабой сходимости последовательностей, обозначаемой через $\rightharpoonup$. В частности, при $t \in T$ получаем, что

$$\mathfrak{F}_t^* \triangleq \{\mathbb{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t) : \forall (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad ((\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \ \Rightarrow \ (\eta \in \mathbb{F})\}$$

– семейство всех *-слабо замкнутых п/м множества $\mathcal{H}_t$. Отметим также (см. [36]), что имеют место включения

$$(\pi_t(\mu) \in \mathfrak{F}_t^* \quad \forall \mu \in \mathcal{R}_t) \ \& \ (\Pi_t(\nu) \in \mathfrak{F}_t^* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t). \tag{8}$$

Из сильной ограниченности $\mathcal{H}_t$ и включений (8) вытекает (секвенциальная) *-слабая компактность множеств (7); см. [36, с. 16].

4. Стратегии игроков. В качестве стратегий игрока I используем многозначные квазистратегии [3], а в качестве стратегий игрока II – стратегии-тройки [38, 39]. Рассмотрим сначала определения, относящиеся к квазистратегиям, фиксируя $t_* \in T$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Тогда (см. [27, разд. 10])

$$\tilde{A}_{t_*} \overset{\triangle}{=} \{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) : \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$((\nu_1 | \mathcal{D}_{t_*}^{\theta}) = (\nu_2 | \mathcal{D}_{t_*}^{\theta})) \;\Rightarrow\; (\{(\eta | \mathcal{C}_{t_*}^{\theta}) : \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta | \mathcal{C}_{t_*}^{\theta}) : \eta \in \alpha(\nu_2)\})\} \tag{9}$$

– множество всех квазистратегий игрока I на $[t_*, \vartheta_0]$. Среди всевозможных квазистратегий выделяем (см. [27]) квазипрограммы

$$\tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \overset{\triangle}{=} \left\{ \alpha \in \tilde{A}_{t_*} : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}_{t_*}^* \right\}; \tag{10}$$

нетрудно видеть (см. (8)), что $\Pi_{t_*}(\cdot) \overset{\triangle}{=} (\Pi_{t_*}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}$. Поэтому множества (9) и (10) непустые. Заметим, что использование в (9) и (10) многозначных отображений связано с конструкциями на основе МПИ: именно в классе таких отображений удаётся (см. [27, предложение 10.3]) конструктивно определить квазипрограмму, гарантирующую решение задачи игрока I.

Рассмотрим один специальный вариант стратегий игрока II. Полагая

$$\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n},$$

получаем непустое множество всех многозначных позиционных стратегий, подобных в идейном отношении используемым в [1, 2]. При $t \in T$ обозначим [38, 39]

$$G^*(t) \overset{\triangle}{=} \{g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{C_n([t, \vartheta_0])} : \forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_0]) \;\; \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_0]) \;\; \forall \theta \in [t, \vartheta_0]$$

$$((g_1 | [t, \theta]) = (g_2 | [t, \theta])) \;\Rightarrow\; (g^*(g_1) \bigcap [t, \theta] = g^*(g_2) \bigcap [t, \theta])\};$$

кроме того, $\mathbb{G}_0^*(t) \overset{\triangle}{=} G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$ (множество всех отображений из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$). Наконец, при $\theta \in T$ полагая

$$\mathbb{G}_{\theta}^* \overset{\triangle}{=} \prod_{t \in [\theta, \vartheta_0]} \mathbb{G}_0^*(t),$$

получаем (непустое) множество стратегий коррекции на промежутке $[\theta, \vartheta_0]$. Если $(\mathbf{s}_t)_{t \in [\theta, \vartheta_0]} \in \mathbb{G}_{\theta}^*$, $\tau \in [\theta, \vartheta_0]$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то отображение $C_n([\tau, \vartheta_0]) \to \mathcal{P}'([\tau, \vartheta_0])$, действующее по правилу $h \mapsto \mathbf{s}_{\tau}(x)(h)$, представляет собой неупреждающее правило выбора моментов коррекции управления, формируемого позиционной стратегией. При $t_* \in T$ назовём стратегией-тройкой на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ всякий триплет $(V, \beta, m) \in \mathfrak{V}_{pos} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}$ (число m определяет ограничение на возможное число переключений формируемого управления из $\mathcal{V}_{t_*}$).

5. Обобщённые траектории и пучки движений. Следуя идейно работе [21], введём условия на систему. Полагаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ интегральная воронка

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \overset{\triangle}{=} \{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) : x(\theta) = x_* + \int\limits_{[t_*, \theta[\times P \times Q} f(t, x(t), u, v) \eta(d(t, u, v)) \quad \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]\}$$

одноэлементна: $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta)\}$, где

$$\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$$

– траектория (скользящий режим), порождённая ОУ η из позиции (t_*, x_*). В дальнейшем $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{B}_n(c) \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant c\}$ при $c \in \mathbb{R}_+$. Как и в [20], предполагаем, что

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \exists b \in \mathbb{R}_+ : \quad \varphi(\tau, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in \mathbb{B}_n(a) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \tau \in [t, \vartheta_0]. \tag{11}$$

Условие (11) – это условие равномерной ограниченности обобщённых траекторий. При $t \in T$ отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \to C_n([t, \vartheta_0]), \quad (x, \eta) \mapsto \varphi(\,\cdot\,, t, x, \eta), \tag{12}$$

непрерывно; при этом $\mathcal{H}_t$ оснащается относительной *-слабой топологией, $\mathbb{R}^n$ – топологией покоординатной сходимости, а $C_n([t, \vartheta_0])$ – топологией равномерной сходимости (см. [27, с. 309]). При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ полагаем, что

$$\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \overset{\triangle}{=} \{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\}, \tag{13}$$

получая непустой компакт в пространстве $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости (учитываем включения (8), непрерывность отображения (12) и *-слабую компактность $\mathcal{H}_{t_*}$). Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, то

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \overset{\triangle}{=} \left\{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\right\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])) \tag{14}$$

– пучок траекторий, порождённых квазистратегией α из позиции (t_*, x_*). Если же $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то множество (14) – компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$.

Следуя [38, 39], при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $m \in \mathbb{N}$ вводим пучок $\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m] \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0]))$ траекторий, порождённых стратегией-тройкой (V, β, m) из позиции (t_*, x_*); см. [38, разд. 7; 39, формулы (7.4)–(7.8)]. Введём, наконец, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$ непустой компакт

$$\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \overset{\triangle}{=} \{\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \mu \bigotimes v) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \tag{15}$$

В связи с определением (15) отметим свойство [38, формула (7.7)]: при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$ и $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; 1] = \bigcup_{v \in V(t_*, x_*)} \mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v). \tag{16}$$

6. Множества в пространстве позиций. Пространство позиций отождествляем с $T \times \mathbb{R}^n$; на $T \times \mathbb{R}^n$ задаём метрику $\rho \in \mathcal{R}_+[(T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n)]$ правилом

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \overset{\triangle}{=} \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\})$$

для всех $(t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $(t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ (итак, $\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2))$ – наибольшее из расстояний $|t_1 - t_2|$ и $\|x_1 - x_2\|$). Метрическая топология $\mathbf{t}$ на $T \times \mathbb{R}^n$, порождённая метрикой ρ, – это обычная топология покоординатной сходимости. Полагаем, что $\mathcal{F} \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$, получая семейство всех замкнутых в традиционном смысле п/м в $T \times \mathbb{R}^n$; тогда

$$\mathcal{F}' \overset{\triangle}{=} \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \tag{17}$$

– семейство всех непустых замкнутых п/м в $T \times \mathbb{R}^n$. Чтобы ввести другое оснащение на $T \times \mathbb{R}^n$, полагаем, что $\tau_\partial \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}(T)$ (дискретная топология на T) и $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ – топология на $\mathbb{R}^n$, порождённая нормой $\|\cdot\|$ (итак, $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ – топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$). Через $\tau_\partial \bigotimes \tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$

обозначаем метризуемую топологию на $T\times\mathbb{R}^n$, соответствующую стандартному произведению топологических пространств (ТП) (T,τ_∂) и $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Пусть $\mathfrak{F}\triangleq\mathbf{C}_{T\times\mathbb{R}^n}[\tau_\partial\bigotimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ и

$$\mathfrak{F}'\triangleq\mathfrak{F}\setminus\{\varnothing\} \tag{18}$$

(семейство всех непустых замкнутых в $(T\times\mathbb{R}^n,\tau_\partial\bigotimes\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ п/м $T\times\mathbb{R}^n$). Если $E\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $t\in T$, то $E\langle t\rangle\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n:(t,x)\in E\}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ – *t-сечение* множества E. Полагая, что $\mathbf{F}\triangleq\mathbf{C}_{\mathbb{R}^n}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$, получаем по двойственности, что (см. [27, разд. 5])

$$\mathfrak{F}=\{F\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n):F\langle t\rangle\in\mathbf{F}\quad\forall t\in T\}. \tag{19}$$

Из определений легко следуют (см., в частности, (17), (18)) вложения $\mathcal{F}\subset\mathfrak{F}$ и $\mathcal{F}'\subset\mathfrak{F}'$.

7. Метод программных итераций. 1. Приведём краткую сводку положений, относящихся к вариантам МПИ, реализуемым на пространстве п/м множества $T\times\mathbb{R}^n$. С учётом (13) и [27, формула (5.5)] при $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ определим оператор $\mathbf{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, следующим образом:

$$\mathbf{A}[M](S)\triangleq\{(t,x)\in S:\forall\nu\in\mathcal{E}_t\ \ \exists\mathbf{x}(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t,x,\nu)\ \ \exists\vartheta\in[t,\vartheta_0]:((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))\in M)\ \&$$
$$\&\ ((\tau,\mathbf{x}(\tau))\in S\quad\forall\tau\in[t,\vartheta[)\}\quad\forall S\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

В общем случае для множеств $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ определена [27, разд. 6] последовательность $(W_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$ по рекуррентному правилу

$$(W_0(M,N)\triangleq N)\ \&\ (W_{k+1}(M,N)=\mathbf{A}[M](W_k(M,N))\quad\forall k\in\mathbb{N}_0), \tag{21}$$

а также предельное множество

$$W(M,N)\triangleq\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}W_k(M,N). \tag{22}$$

Будем использовать определения (21), (22) при различных множествах M и N. Из (20) и (21) следует (см. [27, формула (6.3)]), что

$$\forall M_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\quad\forall N_1\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\quad\forall M_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\quad\forall N_2\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$$
$$((M_1\subset M_2)\ \&\ (N_1\subset N_2))\ \Rightarrow\ ((W_k(M_1,N_1)\subset W_k(M_2,N_2)\quad\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&$$
$$\&\ (W(M_1,N_1)\subset W(M_2,N_2))). \tag{23}$$

Если же $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathfrak{F}$, то [27, разд. 6] имеем включения

$$(W_s(M,N)\in\mathfrak{F}\quad\forall s\in\mathbb{N}_0)\ \&\ (W(M,N)=\mathbf{A}[M](W(M,N))\in\mathfrak{F}). \tag{24}$$

Для дальнейшего важны аналоги секвенциальной непрерывности: если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и при этом $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow M$ и $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow N$, то $M\in\mathcal{F}$, $N\in\mathfrak{F}$ и, самое главное,

$$((W_k(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_k(M,N)\quad\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\ ((W(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W(M,N)). \tag{25}$$

Свойство (25) существенно для дальнейшего. Если $N\in\mathcal{P}'(T\times\mathbb{R}^n)$, то $\mathbf{t}|_N$ – топология на N, индуцированная из $(T\times\mathbb{R}^n,\mathbf{t})$, а $\mathcal{F}|_N$ – семейство всех п/м множества N, замкнутых в топологическом пространстве $(N,\mathbf{t}|_N)$. Тогда (см. [27, разд. 7]) при $M\in\mathcal{F}'$ и $N\in\mathfrak{F}'$ справедливы включения

$$(W_k(M,N)\in\mathcal{F}|_N\quad\forall k\in\mathbb{N}_0)\ \&\ (W(M,N)\in\mathcal{F}|_N). \tag{26}$$

В (24) и (26) сформулированы важные топологические свойства. Из включений (26) следует, что если $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathcal{F}'$, то

$$(W_k(M, N) \in \mathcal{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (W(M, N) \in \mathcal{F}).$$

Рассмотрим итерационную процедуру [36, § 11], определяя при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ оператор стабильности $\mathbb{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, по правилу: если $S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\mathbb{A}[M](S) \stackrel{\triangle}{=} \{(t, x) \in S : \forall v \in Q \ \ \exists \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t, x, v) \ \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] :$$
$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in M) \ \& \ ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in S \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[)\}. \tag{27}$$

С помощью оператора (27) определяем новую итерационную процедуру: если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то [38, разд. 5] последовательность $(\mathcal{W}_k(M, N))_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$ зададим рекуррентно следующим образом:

$$(\mathcal{W}_0(M, N) \stackrel{\triangle}{=} N) \ \& \ (\mathcal{W}_{k+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_k(M, N)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0); \tag{28}$$

кроме того, положим

$$\mathcal{W}(M, N) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N). \tag{29}$$

Свойства процедуры (28), (29) во многом аналогичны свойствам (21), (22). Напомним их предельно кратко (подробнее см. в [38, 39]). Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то

$$(\mathcal{W}_k(M, N) \in \mathfrak{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\mathcal{W}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M, N)) \in \mathfrak{F}).$$

Отметим аналог свойства (26): при $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathfrak{F}'$ справедливы включения

$$(\mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{F}|_N \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\mathcal{W}(M, N) \in \mathcal{F}|_N).$$

Заметим, наконец, что (см. [36, с. 61, 62]) при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ выполняется равенство

$$W(M, N) = \mathcal{W}(M, N) \tag{30}$$

(для несколько менее общего случая аналог соотношения (30) отмечен в [10, гл. V, формула (4.3)]).

8. Вопросы альтернативной разрешимости. Рассматривается некоторый аналог теоремы Красовского–Субботина об альтернативе, относящийся к случаю, когда множество, определяющее ФО, не является замкнутым в топологии $\mathbf{t}$. Ключевую роль в этих построениях играет МПИ. Всюду в дальнейшем считаем, что

$$\mathbf{M} \in \mathcal{F}' \quad \text{и} \quad \mathbf{N} \in \mathfrak{F}'; \tag{31}$$

$\mathbf{M}$ есть ЦМ игрока I, а множество $\mathbf{N}$ формирует его ФО. С парой множеств (31) связываем две последовательности

$$(W_k(\mathbf{M}, \mathbf{N}))_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}_0} \quad \text{и} \quad (\mathcal{W}_k(\mathbf{M}, \mathbf{N}))_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}_0}, \tag{32}$$

а также общее (см. (30)) предельное множество

$$W(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} W_k(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \mathcal{W}(\mathbf{M}, \mathbf{N}). \tag{33}$$

Согласно (31) и [27, теорема 10.1] имеем цепочку равенств

$$W(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \{(t, x) \in \mathbf{N} : \exists \alpha \in \tilde{A}_t \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t; x; \alpha] \ \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] :$$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\ \&\ ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N} \quad \forall \xi \in [t, \vartheta[)\} = \{(t,x) \in \mathbf{N}:$$

$$\exists \alpha \in \tilde{A}_t^{\Pi} \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t;x;\alpha] \ \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\ \&\ ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N} \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[)\}. \qquad (34)$$

Итак, множество (33) является решением задачи $I(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и в классе квазистратегий, и в классе квазипрограмм; при $(t_*, x_*) \in W(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ квазипрограмма, гарантирующая $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-сближение, определена в [27, формула (10.23), предложение 10.3, следствие 10.2]. С другой стороны (см. [38, 39]), в силу (33) имеем

$$\mathbf{N} \setminus W(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \{(t,x) \in \mathbf{N} : \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \ \ \exists \beta \in \mathbb{G}_t^* \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t;x;V;\beta;m] \ \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]$$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \ \Rightarrow \ (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbf{N})\}. \qquad (35)$$

Свойство (35) следует из [38, теорема 9.2] с учётом равенств (33). Из (34) и (35) вытекает следующая

Теорема 8.1. *Если $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$, то справедливо одно и только одно из следующих двух утверждений:*

1) $\exists \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$: $((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M})\ \&\ ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[)$;

2) $\exists (V, \beta, m) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m] \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \ \ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \ \Rightarrow \ (\exists t \in$ $\in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin \mathbf{N})$.

Согласно [38, следствие 9.1] при $(t_*, x_*) \in \mathbf{N} \setminus W(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ осуществимо гарантированное решение задачи игрока II с некоторым “запасом” (осуществимо уклонение по отношению к некоторым окрестностям множеств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$); сама структура разрешающей стратегии-тройки в значительной степени пояснена в [38, разд. 8].

9. Окрестности множеств и релаксация задачи сближения. Начинаем рассмотрение вопросов, связанных с ослаблением условий окончания игры сближения. Полагаем в дальнейшем, наряду с (31), что

$$\mathbf{N}\langle t \rangle \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad t \in T. \qquad (36)$$

При $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ полагаем $\rho((t,x); \mathbf{M}) \triangleq \inf(\{\rho((t,x), (\tau, y)) : (\tau, y) \in \mathbf{M}\})$. Соответственно функция $\rho(\cdot\,; \mathbf{M}) \triangleq (\rho(z; \mathbf{M}))_{z \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ представляет собой расстояние до множества $\mathbf{M}$. При $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ получаем, что

$$S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \triangleq \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n : \rho((t,x); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon\} = \rho(\cdot\,; \mathbf{M})^{-1}([0, \varepsilon]) \in \mathcal{F}'; \qquad (37)$$

$\mathbf{M} = S_0(\mathbf{M}, 0) \subset S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$ (см. (31)). При $\varepsilon > 0$ множество (37) является замкнутой ε-окрестностью множества $\mathbf{M}$. При $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ верно также $(\|\cdot\|\text{-inf})[x; S] \triangleq$ $\triangleq \inf\{\|x - s\| : s \in S\} \in \mathbb{R}_+$. Если $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, то $(\|\cdot\|\text{-inf})[\cdot\,; H] \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}^n]$ определяет функцию $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ по правилу $x \mapsto (\|\cdot\|\text{-inf})[x; H]$. В силу (36) для всех $t \in T$ имеем $\mathbf{N}\langle t \rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. Если $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, то

$$B_n^0(H, \varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (\|\cdot\|\text{-inf})[x; H] \leqslant \varepsilon\} = (\|\cdot\|\text{-inf})[\cdot\,; H]^{-1}([0, \varepsilon]) \in \mathbf{F}', \qquad (38)$$

здесь и ниже $\mathbf{F}' \triangleq \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$. При $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ получаем, что

$$\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \triangleq \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n : x \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t \rangle, \varepsilon)\} \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n), \qquad (39)$$

$\mathbf{N} \subset \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)$. Отметим очевидное

Предложение 9.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{S}(\mathbf{N}, 0) = \mathbf{N}$.

Отметим также легко проверяемое свойство $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)\langle t\rangle = B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и всех $t \in T$. С учётом этого и (19) получаем, что

$$\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \in \mathfrak{F}' \quad \text{для любого} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{40}$$

Предложение 9.2. *Если* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *и при этом* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \to \varepsilon$ *и* $\varepsilon_{k+1} \leqslant \varepsilon_k$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *то* $(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$ *и* $(\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)$.

Доказательство следует из определений.

Введём в рассмотрение и зафиксируем параметр $\kappa \in \mathbb{R}_+$, $\kappa \neq 0$, в качестве специального коэффициента приоритетности: будем рассматривать в качестве возможных замены

$$\mathbf{M} \to S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \quad \mathbf{N} \to \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon), \tag{41}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В связи с (41) отметим несложно проверяемое равенство

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \tag{42}$$

(для доказательства (42) используется тот очевидный факт, что $M \bigcap N \subset W(M, N)$ для любых $M, N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$). Из (22) и (42) вытекает следующее свойство:

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{43}$$

В силу равенств (42) и (43) заключаем, что справедливо утверждение: если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$(\Sigma_0^{(k)}(t, x|\kappa) \stackrel{\triangle}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : (t, x) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0)\ \&$$

$$\&\ (\Sigma_0(t, x|\kappa) \stackrel{\triangle}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : (t, x) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)). \tag{44}$$

С учётом включений (44) при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Sigma_0^{(k)}(t, x|\kappa)) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}_0)\ \&\ (\varepsilon_0(t, x|\kappa) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Sigma_0(t, x|\kappa)) \in \mathbb{R}_+). \tag{45}$$

Вследствие определений (20), (21) имеем: $W_{k+1}(M, N) \subset W_k(M, N)$ при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Поэтому если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\Sigma_0^{(k+1)}(t, x|\kappa) \subset \Sigma_0^{(k)}(t, x|\kappa). \tag{46}$$

Тогда из (45) и (46) вытекает следующее свойство:

$$\varepsilon_0^{(k)}(t, x|\kappa) \leqslant \varepsilon_0^{(k+1)}(t, x|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{47}$$

Стандартным образом, используя (45), получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \stackrel{\triangle}{=} (\varepsilon_0^{(k)}(z|\kappa))_{z\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0)\ \&$$

$$\&\ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \stackrel{\triangle}{=} (\varepsilon_0(z|\kappa))_{z\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]). \tag{48}$$

Через $\leqq$ обозначаем поточечный порядок на $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, т.е.

$$(g_1 \leqq g_2) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (g_1(t, x) \leqslant g_2(t, x) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n) \tag{49}$$

для $g_1, g_2 \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Из (47)–(49) следует очевидное свойство

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{50}$$

Предложение 9.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство вытекает из определения (22).

Из предложения 9.3 несложно следует (см. (45), (49)) неравенство

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \varepsilon_0(\cdot|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{51}$$

Предложение 9.4. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \,\&\, (\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)).$$

Доказательство. Ограничимся проверкой первого включения (проверка второго аналогична). Фиксируем $s \in \mathbb{N}_0$, пусть $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*|\kappa)$. С учётом включений (45) выберем последовательность $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma_0^{(s)}(t_*, x_*|\kappa)^{\mathbb{N}}$, для которой $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \to \varepsilon_*$ и $a_{k+1} \leqslant a_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу предложения 9.2, а также сходимости (25) получаем, что

$$(W_s(S_0(\mathbf{M}, a_j), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_j)))_{j\in\mathbb{N}} \downarrow W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)), \tag{52}$$

причём $(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, a_k), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_k))$ при $k \in \mathbb{N}$. Вследствие (1) и (52) заключаем, что $(t_*, x_*) \in W_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Осталось учесть включение (44). Предложение доказано.

Следствие 9.1. *При* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *элемент* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$ *является наименьшим во множестве* $\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$, *и, кроме того,* $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$ *– наименьший элемент множества* $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)$ *при* $k \in \mathbb{N}_0$.

С учётом неравенства (51) имеем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ включение

$$\{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)]).$$

Предложение 9.5. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство подобно обоснованию аналогичного утверждения в [29–31] (отметим только использование свойства (23)).

Следствие 9.2. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *представляет собой точную верхнюю грань множества* $\{\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)\colon\ k \in \mathbb{N}_0\}$ *в* $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$.

Доказательство очевидно.

Таким образом, частично упорядоченное множество (ЧУМ) $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$ таково, что последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k\in\mathbb{N}_0}$ и функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ связаны свойством точной верхней грани. Ещё одно очевидное следствие состоит в том, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ (см. (47)) имеют место соотношения

$$((\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa))_{k\in\mathbb{N}} \to \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)) \,\&\, (\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_*|\kappa) \leqslant \varepsilon_0^{(s+1)}(t_*, x_*|\kappa) \quad \forall s \in \mathbb{N}). \tag{53}$$

В силу (53) функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ является поточечным пределом последовательности $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k\in\mathbb{N}}$.

10. Основная последовательность в пространстве функций. Функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)$, $k \in \in \mathbb{N}_0$, и $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ определены в терминах итерационных процедур (21), (22). Мы укажем далее "прямую" итерационную процедуру, позволяющую строить упомянутую последовательность и определять её предел в терминах преобразований в $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Однако предварительно следует установить целый ряд свойств данных функций, привлекая лишь первоначальное (см. (44), (45)) их определение.

Предложение 10.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa), \infty[$.

Доказательство легко следует из определений с учётом свойства (23) (см. также [30, предложение 7]).

Аналогичным образом устанавливается

Предложение 10.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\Sigma_0(t_*, x_*|\kappa) = [\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa), \infty[$.

Предложение 10.3. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то*

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) = W_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& $$

$$\& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) = W(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))).$$

Доказательство следует из предложений 10.1, 10.2 с учётом включений (44).

Предложение 10.4. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то*

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}|_{\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}|_{\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)}).$$

Доказательство получается комбинацией включений (26) и предложения 10.3.

Из (24), (37) и предложения 10.3 вытекает, что при $b \in \mathbb{R}_+$ справедливы включения

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F}). \tag{54}$$

Введём в рассмотрение следующее множество неотрицательных полунепрерывных снизу функций на топологическом пространстве $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \bigotimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$:

$$\mathfrak{M} \overset{\triangle}{=} \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] : g^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+\}. \tag{55}$$

Из (54) и (55) вытекает важное свойство полунепрерывности снизу

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}); \tag{56}$$

предложение 10.4 дополняет утверждение (56). Напомним, что $\rho(\cdot\,; \mathbf{M})$ – непрерывная в/з функция; в частности, $\rho(\cdot\,; \mathbf{M}) \in \mathfrak{M}$. Введём в рассмотрение функцию

$$\zeta_\kappa \overset{\triangle}{=} (\kappa^{-1}(\|\cdot\|\text{-inf})[x; \mathbf{N}\langle t\rangle])_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \tag{57}$$

Предложение 10.5. *Если* $b \in \mathbb{R}_+$, *то* $(\zeta_\kappa)^{-1}([0, b]) = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$.

Доказательство следует из определений.

Из включения (40) и предложения 10.5 вытекает, что $(\zeta_\kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F}'$ для всех $b \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что функция

$$\psi_\kappa \overset{\triangle}{=} (\sup(\{\rho((t, x); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t, x)\}))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \tag{58}$$

является точной верхней гранью в ЧУМ $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \overset{\leq}{=})$ неупорядоченной пары $\{\rho(\cdot\,; \mathbf{M}); \zeta_\kappa\}$. Нетрудно видеть (см. (55)), что $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}$.

Предложение 10.6. *Справедливо равенство* $\varepsilon_0^{(0)}(\cdot|\kappa) = \zeta_\kappa$.

Доказательство. В силу определения (21), включений (44) и предложения 10.1 имеем

$$\Sigma_0^{(0)}(t, x|\kappa) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\} = [\varepsilon_0^{(0)}(t, x|\kappa), \infty[\quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{59}$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa)$; $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$. В силу (59) $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$, а тогда, согласно (39), $(\|\cdot\|\text{-inf})[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \leqslant \kappa\varepsilon_*$. В силу (57) верно неравенство $\zeta_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_*$. С другой стороны, для $\delta_* \triangleq (\|\cdot\|\text{-inf})[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] \in \mathbb{R}_+$ имеем (см. (38), (39)) включение $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \delta_*)$. Вследствие (59) получаем

$$\frac{\delta_*}{\kappa} \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_*|\kappa). \tag{60}$$

Из соотношений (59) и (60) вытекает неравенство $\varepsilon_* \leqslant \delta_*/\kappa = \zeta_\kappa(t_*, x_*)$. В итоге $\varepsilon_* = \zeta_\kappa(t_*, x_*)$. Так как выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, требуемое равенство установлено.

Предложение 10.7. *Функция* ψ_κ *мажорирует функцию* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$, *т.е.* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \overset{\leq}{=} \psi_\kappa$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{M})$; тогда

$$c_* \triangleq (\|\cdot\|\text{-inf})[x_*; \mathbf{N}\langle t_*\rangle] = \kappa\zeta_\kappa(t_*, x_*).$$

С учётом включения (39) получаем

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b_*) \bigcap \mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*), \tag{61}$$

где $a_* \triangleq \kappa^{-1}c_* \in \mathbb{R}_+$, $d_* \triangleq \sup(\{a_*; b_*\}) \in \mathbb{R}_+$. Тогда $a_* = \zeta_\kappa(t_*, x_*)$, $S_0(\mathbf{M}, b_*) \subset S_0(\mathbf{M}, d_*)$, $c_* = \kappa a_* \leqslant \kappa d_*$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N}, c_*) \subset \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*)$. Вследствие (61) имеем $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, d_*) \bigcap \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa d_*)$, а потому (см. (44)) $d_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$ и, согласно (45), $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \leqslant d_* = \psi_\kappa(t_*, x_*)$. Так как выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным, предложение доказано.

Следствие 10.1. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \overset{\leq}{=} \psi_\kappa$.

Доказательство получается комбинацией неравенства (51) и предложения 10.7.

Пусть

$$\mathfrak{M}_\psi \triangleq \{g \in \mathfrak{M} : g \overset{\leq}{=} \psi_\kappa\}. \tag{62}$$

Из включений (56), предложения 10.7 и следствия 10.1 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi). \tag{63}$$

Здесь же отметим, что

$$(\zeta_\kappa \overset{\leq}{=} \varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \ \& \ (\zeta_\kappa \overset{\leq}{=} \varepsilon_0(\cdot|\kappa)) \tag{64}$$

в силу неравенств (50), (51) и предложения 10.6.

11. Вспомогательные функционалы качества. Введём в рассмотрение некоторые специальные функционалы, для которых позднее будет установлено совпадение значений минимакса в классе квазистратегий с соответствующими значениями функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$. Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее

Условие (квазиограниченность $\mathbf{N}$). Для некоторого $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+$ имеет место соотношение

$$\mathbb{B}_n(\mathbf{c}) \bigcap \mathbf{N}\langle t\rangle \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{65}$$

Число $\mathbf{c}$ со свойством (65) зафиксируем и будем использовать в последующих построениях. При $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ функция $[t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|x(t)\|$, непрерывна и достигает максимума; при этом

$$(\|\cdot\|\text{-inf})[x(\tau); \mathbf{N}\langle\tau\rangle] \leqslant \mathbf{c} + \max_{t\in[t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\| \quad \forall\tau \in [t_*, \vartheta_0].$$

В силу непрерывности функции $\rho(\cdot\,; \mathbf{M})$ при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ имеем непрерывность функции $[t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \rho((t, x(t)); \mathbf{M})$; если при этом $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$, то

$$\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \kappa^{-1}(\max_{t\in[t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c}). \tag{66}$$

Пусть при $t \in T$ отображение $\mathbb{I}_t \in \mathcal{P}'([t,\vartheta_0])^{[t,\vartheta_0]}$ таково, что

$$(\mathbb{I}_t(t) \stackrel{\triangle}{=} \{t\}) \ \& \ (\mathbb{I}_t(\vartheta) \stackrel{\triangle}{=} [t,\vartheta[\quad \forall \vartheta \in]t,\vartheta_0]). \tag{67}$$

В силу (66), (67) имеем при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*,\vartheta_0]$, что

$$\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \kappa^{-1}(\max_{t \in [t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\| + \mathbf{c}) \quad \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta); \tag{68}$$

с учётом оценки (68) получаем следующее (конечное) значение:

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}); \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{69}$$

Из определений вытекает очевидное свойство

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), t_*) = \psi_\kappa(t_*, x(t_*)) \quad \forall t_* \in T \quad \forall x(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0]). \tag{70}$$

При $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{C}_n([t_*,\vartheta_0])]$ определяем условием

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \stackrel{\triangle}{=} \inf_{\vartheta \in [t_*,\vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{C}_n([t_*,\vartheta_0]). \tag{71}$$

При $t \in T$ через $\|\cdot\|_t^{(\mathbf{C})}$ обозначаем норму равномерной сходимости на $C_n([t,\vartheta_0])$. Тогда при $t_* \in T$ имеем легко проверяемое свойство:

$$\forall \varepsilon \in]0,\infty[\quad \exists \delta \in]0,\infty[\quad \forall x_1(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0]) \quad \forall x_2(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0])$$

$$(\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \delta) \ \Rightarrow \ (|\omega_\kappa(t_*, x_1(\cdot), \vartheta) - \omega_\kappa(t_*, x_2(\cdot), \vartheta)| < \varepsilon \quad \forall \vartheta \in [t_*,\vartheta_0]). \tag{72}$$

Предложение 11.1. *Если $t_* \in T$, то функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ на пространстве $C_n([t_*,\vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости непрерывен.*

Доказательство получается комбинацией определения (71) и свойства (72).

Замечание. Несложно видеть, что на самом деле при $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ равномерно непрерывен на $(C_n([t_*,\vartheta_0]), \|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})})$, что непосредственно следует из (72). Здесь же отметим, что, как нетрудно проверить, имеет место следующее представление для множества нулей этого функционала:

$$(\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\}) = \{x(\cdot) \in C_n([t_*,\vartheta_0]) : \exists \vartheta \in [t_*,\vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \ \& \ ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta))\}.$$

12. Минимакс в классе квазистратегий. В данном пункте при фиксированной начальной позиции исследуется задача на минимакс функционала (71) в классе квазистратегий. В связи с этим полагаем

$$\mathcal{S}_{M,N}(t,x) \stackrel{\triangle}{=} \{\eta \in \mathcal{H}_t : \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta,t,x,\eta)) \in M) \ \&$$

$$\& \ ((\xi, \varphi(\xi,t,x,\eta)) \in N \quad \forall \xi \in [t,\vartheta[)\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathfrak{F} \quad \forall (t,x) \in N. \tag{73}$$

Тогда (см. [27, теорема 10.1]) при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ получаем цепочку равенств

$$W(M,N) = \left\{(t,x) \in N : \exists \alpha \in \tilde{A}_t : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\right\} =$$

$$= \left\{(t,x) \in N : \exists \alpha \in \tilde{A}_t^{\Pi} : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\right\}. \tag{74}$$

Фиксируем до конца пункта позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Следуя идейно [27, формула (10.22)], полагаем

$$\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle\nu|M,N\rangle \triangleq \{\eta \in \Pi_{t_*}(\nu) : \exists\vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M)\ \&$$

$$\&\ ((\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \eta)) \in W(M,N) \quad \forall \xi \in [t_*, \vartheta[)\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathfrak{F} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}.$$

Согласно утверждению (44), предложению 9.4 и [27, предложение 10.3] получаем, что

$$\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle\cdot|S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa))\rangle \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}. \tag{75}$$

Из включений (14) и (75) вытекает, что определено значение

$$\max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*,x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 12.1. *Справедливо неравенство*

$$\max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*,x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство легко следует из [27, следствие 10.2], (69) и (71).

Заметим, что в силу непрерывности отображения (12) и предложения 11.1 функционал $\mathcal{H}_{t_*} \to \mathbb{R}_+$, действующий по правилу $\eta \mapsto \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(\varphi(\,\cdot\,, t_*, x_*, \eta))$, также непрерывен и, в силу *-слабой компактности множества $\mathcal{H}_{t_*}$, ограничен. Поэтому (см. (14)) при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ ограничен функционал $\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \to \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \mapsto \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))$, и определено (конечное) значение

$$\sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+. \tag{76}$$

Если $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то в (76) sup можно заменить на max. С учётом этого получаем, поскольку $\tilde{A}^{\Pi}_{t_*} \neq \varnothing$, что

$$(\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha\in\tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+)\ \&$$

$$\&\ (\mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha\in\tilde{A}^{\Pi}_{t_*}} \max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+). \tag{77}$$

Отметим очевидные следствия (см. (75), (77), предложение 12.1)

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*,x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa). \tag{78}$$

Предложение 12.2. *Если* $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$ *и* $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] : b \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Доказательство легко следует из (44) и (74) (см. (69), (71), (78)).

Из предложения 12.2 вытекает, что при $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$ имеют место неравенства

$$b \leqslant \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*,x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa). \tag{79}$$

Теорема 12.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \mathbf{v}^{(\Pi)}_\kappa(t_*, x_*) = \max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}^{(W)}_\kappa(t_*,x_*)]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство вытекает из неравенств (79).

Согласно теореме 12.1 $\mathbf{a}_\varkappa^{(W)}(t_*, x_*)$ представляют собой минимаксную квазипрограмму. В частности, $\mathbf{a}_\varkappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}$ (см. (75)) и при этом

$$\sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}_\varkappa^{(W)}(t_*,x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\varkappa)}(x(\cdot)) = \max_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\mathbf{a}_\varkappa^{(W)}(t_*,x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\varkappa)}(x(\cdot)) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\varkappa) = \mathbf{v}_\varkappa(t_*, x_*). \quad (80)$$

Получаем (см. (77)) следующее очевидное теперь равенство:

$$\mathbf{v}_\varkappa(t_*, x_*) = \min_{\alpha\in\tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]} \gamma_{t_*}^{(\varkappa)}(x(\cdot)).$$

13. Программный оператор на пространстве функций. Рассмотрим вариант МПИ, аналогичный [26] и реализуемый в функциональном пространстве. Наша ближайшая цель состоит в представлении преобразования $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\varkappa) \to \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\varkappa)$ в терминах действия данного оператора. Сначала рассмотрим, однако, некоторые вспомогательные построения, подобные [28–31]. В силу предположения (11) при $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ функция $[t, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$, $\xi \mapsto \psi_\varkappa(\xi, x(\xi))$, ограничена (см. также условие в п. 11) и определено (конечное) значение

$$\sup_{\xi\in[t,\vartheta_0]} \psi_\varkappa(\xi, x(\xi)) \in \mathbb{R}_+; \quad (81)$$

если, кроме того, $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то в силу (62) при $\tau \in [t, \vartheta_0]$ значения $g(\tau, x(\tau))$ не превосходят величины (81). Поэтому при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$ определено значение

$$\sup(\{\sup_{\tau\in\mathbb{I}_t(\vartheta)} g(\tau, x(\tau)); \rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M})\}) \in \mathbb{R}_+. \quad (82)$$

С учётом этого при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $t \in T$ определим функционал $\mathfrak{H}[g; t] \in \mathcal{R}_+[C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]]$ правилом: каждой УП $(x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]$ поставим в соответствие значение (82), т.е. $(x(\cdot), \vartheta) \mapsto \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta)$; данное значение также не превосходит величины (81).

Предложение 13.1. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, то для каждого $b \in \mathbb{R}_+$ множества Лебега $\mathfrak{H}[g; t_*](\,\cdot\,, \vartheta)^{-1}([0, b])$ функционала*

$$\mathfrak{H}[g; t_*](\,\cdot\,, \vartheta) \stackrel{\triangle}{=} (\mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta))_{x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])} \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*, \vartheta_0])]$$

замкнуты в топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*, \vartheta_0])$.

Доказательство подобно в идейном отношении обоснованию предложения 13 работы [30] и поэтому для уменьшения объёма статьи опущено.

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то (см. (13))

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] \stackrel{\triangle}{=} (\mathfrak{H}[g; t_*]|\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) = (\sup(\{\sup_{\tau\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\tau, x(\tau));$$

$$\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M})\}))_{(x(\cdot),\vartheta)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]]; \quad (83)$$

если $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$, то для функционала (83) определено его сечение

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\,\cdot\,, \theta) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \theta))_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)],$$

для которого $\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\,\cdot\,, \theta)^{-1}([0, b]) = \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \bigcap \mathfrak{H}[g; t_*](\,\cdot\,, \theta)^{-1}([0, b])$ при $b \in \mathbb{R}_+$. С учётом предложения 13.1 получаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $b \in \mathbb{R}_+$ множество $\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\,\cdot\,, \theta)^{-1}([0, b])$ замкнуто в (относительной) топологии равномерной сходимости на $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$, а следовательно, и компактно в этой топологии (учитываем компактность множества (13)); очевидно, что данное множество компактно и в пространстве $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. С учётом этого свойства и предложения 13.1 несложно (подобно [28–31]) устанавливается

Предложение 13.2. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ *и* $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, *то существует* $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ *такой, что*

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\bar{x}(\cdot), \vartheta) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta).$$

В силу предложения 13.2 определено значение

$$\min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+,$$

где g, t_*, x_*, ν и ϑ удовлетворяют условиям этого предложения. В качестве следствия имеем включения

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall t_* \in T \quad \forall x_* \in \mathbb{R}^n \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \tag{84}$$

Вместе с тем, как легко видеть, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливо неравенство

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)). \tag{85}$$

С учётом (85) при $t_* \in T$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\exists b \in \mathbb{R}_+ : \quad \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant b \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

С учётом этого (см. (84), (85)) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено (конечное) значение

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

Используя последнее свойство, задаём оператор $\Gamma : \mathfrak{M}_\psi \to \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ посредством следующего правила: при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ функция $\Gamma(g) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ такова, что

$$\Gamma(g)(t, x) \triangleq \sup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \inf_{\vartheta \in [t, \vartheta_0]} \min_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, \nu)} \mathbf{h}[g; t; x; \nu](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{86}$$

Итак, определён оператор $\Gamma \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]^{\mathfrak{M}_\psi}$. С учётом включений (63) имеем

$$(\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \quad \& \quad (\Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]).$$

14. Метод программных итераций. 2. Покажем, что последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k \in \mathbb{N}_0}$ может быть реализована при помощи итерационной процедуры с использованием оператора Γ. Сначала отметим два достаточно простых вспомогательных утверждения.

Предложение 14.1. *Если* $g \in \mathfrak{M}_\psi$, *то* $g \leqq \Gamma(g)$.

Предложение 14.2. *Оператор* Γ *обладает свойством изотонности: если* $g_1 \in \mathfrak{M}_\psi$, $g_2 \in \in \mathfrak{M}_\psi$ *и* $g_1 \leqq g_2$, *то* $\Gamma(g_1) \leqq \Gamma(g_2)$.

Доказательства обоих положений аналогичны [28–31] (см., в частности, [29, предложения 15, 16]).

Теорема 14.1. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то справедливо равенство* $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))$.

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$, получая функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$, $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$ и значение $\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$; тогда

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+) \ \& \ (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+). \tag{87}$$

В силу предложения 9.4 и включений (87) получаем, что $a_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_*|\kappa)$, и поэтому (см. (44))

$$(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{88}$$

Тогда, в частности (см. (21), (88)), реализуется включение

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{89}$$

Согласно (21) и (89) имеем $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)$. В силу предложения 10.5 $\zeta_\kappa(t_*, x_*) \leqslant a_*$. Из (21) и (88) вытекает, что $(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)))$. Поэтому (см. (20))

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*))$$
$$\&((\tau, x(\tau)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta[). \tag{90}$$

Фиксируем $\bar\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и подбираем (см. (90)) $\bar x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar\nu)$ и $\bar\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ так, что

$$((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \ \& \ ((\tau, \bar x(\tau)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall \tau \in [t_*, \bar\vartheta[). \tag{91}$$

Вследствие включений (37), (91) и предложения 10.3 верно неравенство

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) \leqslant a_* \quad \forall \tau \in [t_*, \bar\vartheta[\ \& \ (\rho((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*). \tag{92}$$

При этом в силу (67) имеем импликацию

$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \quad \forall \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)).$$

В итоге

$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\sup_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)} \varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa)). \tag{93}$$

В силу включений (44), (45) и (89) выполняется неравенство $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa) \leqslant a_*$. Поэтому из (83), (92) и (93) вытекает импликация

$$(\bar\vartheta = t_*) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*). \tag{94}$$

Пусть теперь $\bar\vartheta \in]t_*, \vartheta_0]$. С учётом (67) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta) = [t_*, \bar\vartheta[$, и согласно (92) имеем следующие неравенства: $\sup\limits_{\tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar\vartheta)} \varepsilon_0^{(k)}(\tau, \bar x(\tau)|\kappa) \leqslant a_*$ и $\rho((\bar\vartheta, \bar x(\bar\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*$. Используя (83), получаем импликацию

$$(\bar\vartheta \in]t_*, \vartheta_0]) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*). \tag{95}$$

Из (94) и (95) следует, что $\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](\bar x(\cdot), \bar\vartheta) \leqslant a_*$ во всех возможных случаях. Таким образом, справедливо неравенство

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar\nu)} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar\nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_*.$$

Так как выбор меры $\bar\nu$ был произвольным, установлено, что (см. (86), (87))

$$b_* = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \leqslant a_*. \tag{96}$$

В силу предложения 14.1 верно неравенство $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa) \leqq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))$, а поэтому $b_* \in$ $\in [\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*|\kappa), \infty[$. Согласно утверждению (44) и предложению 10.1 имеем

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \tag{97}$$

Далее, из (86) и (87) следует, что

$$\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]}\ \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;\nu](x(\cdot),\vartheta)\leqslant b_* \quad \forall\nu\in\mathcal{E}_{t_*}. \tag{98}$$

Выберем произвольно $b^*\in\,]b_*,\infty[$, т.е. $b^*\in\mathbb{R}_+$ и $b_*<b^*$. Пусть $\nu^*\in\mathcal{E}_{t_*}$. Тогда в силу (98) для некоторых $\vartheta^*\in[t_*,\vartheta_0]$ и $x^*(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu^*)$ справедливо неравенство

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa);t_*;x_*;\nu^*](x^*(\cdot),\vartheta^*)<b^*,$$

из которого вытекает следующее свойство:

$$(\rho((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*));\mathbf{M})<b^*)\ \&\ (\varepsilon_0^{(k)}(\tau,x^*(\tau)|\kappa)<b^* \quad \forall\tau\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)). \tag{99}$$

С учётом (23) в силу выбора числа b^* имеем

$$W_k(S_0(\mathbf{M},b_*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b_*))\subset W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)),$$

а тогда (см. (97))

$$(t_*,x_*)\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)). \tag{100}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\vartheta^*=t_*$ и $\vartheta^*\in\,]t_*,\vartheta_0]$.

1) Пусть $\vartheta^*=t_*$. Тогда $[t_*,\vartheta^*[\,=\varnothing$ и, очевидно, $(t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))$ для любого $t\in[t_*,\vartheta^*[$. С учётом неравенств (99) получаем импликацию

$$(\vartheta^*=t_*)\ \Rightarrow\ (((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\ \&$$

$$\&\ ((t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\quad \forall t\in[t_*,\vartheta^*[)). \tag{101}$$

2) Пусть $\vartheta^*\in\,]t_*,\vartheta_0]$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)=[t_*,\vartheta^*[$. Поэтому в силу (44), (99) и предложения 10.1 $(t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))$ для любого $t\in[t_*,\vartheta^*[$. С учётом неравенств (99) получаем импликацию

$$(\vartheta^*\in\,]t_*,\vartheta_0])\ \Rightarrow\ (((\vartheta^*,x^*(\vartheta^*))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\ \&$$

$$\&\ ((t,x^*(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\quad \forall t\in[t_*,\vartheta^*[)). \tag{102}$$

Вследствие импликаций (101) и (102) и произвольного выбора числа ϑ^* заключаем, что $\forall\nu\in\in\mathcal{E}_{t_*}$ $\exists x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)$ $\exists\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$:

$$((\vartheta,x(\vartheta))\in S_0(\mathbf{M},b^*))\ \&\ ((t,x(t))\in W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))\quad \forall t\in[t_*,\vartheta[).$$

Из (20) и (100) вытекает, что $(t_*,x_*)\in\mathbf{A}[S_0(\mathbf{M},b^*)](W_k(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*)))$. С учётом определения (21) имеем $(t_*,x_*)\in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M},b^*),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa b^*))$ и в силу (44) $b^*\in\Sigma_0^{(k+1)}(t_*,x_*|\kappa)$. Так как число b^* выбиралось произвольно, установлено, что $]b_*,\infty[\,\subset\Sigma_0^{(k+1)}(t_*,x_*|\kappa)$. С учётом включений (45) получаем неравенство $a_*\leqslant b_*$. В итоге $a_*=b_*$ (см. (96)). Так как выбор позиции (t_*,x_*) был произвольным, получили (см. (87)) требуемое утверждение. Теорема доказана.

Итак, последовательность $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))_{k\in\mathbb{N}_0}$ реализуется в виде итерационной процедуры

$$(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot|\kappa)=\zeta_\kappa)\ \&\ (\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot|\kappa)=\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot|\kappa))\quad \forall k\in\mathbb{N}_0). \tag{103}$$

Можно рассматривать процедуру (103) как новую реализацию МПИ; в связи с этим отметим [26, 31].

15. Свойство неподвижной точки. Вследствие соотношений (53) и (103) возникает вопрос об описании предельной функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ в терминах оператора Γ. Ответ доставляет

Теорема 15.1. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *является неподвижной точкой оператора* Γ, *т.е. справедливо равенство* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)=\Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))$.

Доказательство. Выбирая произвольно позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, получаем, что

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) \in \mathbb{R}_+) \ \& \ (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+). \tag{104}$$

В силу предложения 14.1 $a_* \leqslant b_*$.

Докажем справедливость обратного неравенства. При этом $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_*|\kappa)$ согласно предложению 9.4, а тогда

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \tag{105}$$

Из (24) и (105) следует включение $(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)))$, а поэтому $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \ \& \ ((t, x(t)) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{106}$$

С учётом включений (44), (45) получаем, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$(\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*) \ \& \ (\varepsilon_0(t, x(t)|\kappa) \leqslant a_* \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \tag{107}$$

Пусть $\bar{\nu} \in \mathcal{E}_{t_*}$. В силу неравенств (107) для некоторых $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar{\nu})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем

$$(\rho((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}) \leqslant a_*) \ \& \ (\varepsilon_0(t, \bar{x}(t)|\kappa) \leqslant a_* \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[). \tag{108}$$

Случаи $\bar{\vartheta} = t_*$ и $\bar{\vartheta} \in \,]t_*, \vartheta_0]$ рассмотрим отдельно.

а) Пусть $\bar{\vartheta} = t_*$. Тогда (см. (67)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = \{t_*\}$ и $\varepsilon_0(t, x(t)|\kappa) = \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = a_*$ для любого $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$; см. (104). С учётом (83) и (108) получаем импликацию

$$(\bar{\vartheta} = t_*) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{\nu}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*). \tag{109}$$

б) Пусть $\bar{\vartheta} \in \,]t_*, \vartheta_0]$. Тогда $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = [t_*, \bar{\vartheta}[$. Поэтому из неравенств (108) следует, что $\rho((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}) \leqslant a_*$ и $\varepsilon_0(t, \bar{x}(t)|\kappa) \leqslant a_*$ для любого $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$, а тогда в силу представления (83) получаем импликацию

$$(\bar{\vartheta} \in \,]t_*, \vartheta_0]) \ \Rightarrow \ (\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{\nu}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*). \tag{110}$$

Из импликаций (109) и (110) вытекает, что неравенство $\mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{\nu}](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant a_*$ справедливо во всех возможных случаях. В качестве следствия (см. (84)) получаем

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \ \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar{\nu})} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot|\kappa); t_*; x_*; \bar{\nu}](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_*.$$

Так как выбор меры $\bar{\nu}$ был произвольным, заключаем, что $b_* = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot|\kappa))(t_*, x_*) \leqslant a_*$. В итоге $a_* = b_*$, откуда (см. (104)) вытекает требуемое равенство функций (выбор позиции (t_*, x_*) был произвольным). Теорема доказана.

Обозначим $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi : (g = \Gamma(g)) \ \& \ (\zeta_\kappa \leqq g)\}$.

Теорема 15.2. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ *является* $\leqq$*-наименьшим элементом во множестве* $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$, *т.е.*

$$(\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}) \ \& \ (\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \leqq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}).$$

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения в [28–31] (см., в частности, [29, теорема 3]).

Отметим очевидное следствие: справедливы неравенства $\zeta_\kappa \leqq \varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ и $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \leqq \psi_\kappa$; см. (64) и предложение 10.7. Поэтому при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем (см. (58)) импликацию

$$(\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \zeta_\kappa(t_*, x_*)) \ \Rightarrow \ (\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \zeta_\kappa(t_*, x_*)).$$

16. Свойство функции цены. Дополним теорему 12.1, а именно: покажем, что при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ значение $\varepsilon_0(t, x|\kappa)$ представляет собой цену ДИ с функционалом качества $\gamma_t^{(\kappa)}$ (см. (71)).

Для этого сначала рассмотрим связь функции $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ с функцией максимина в классе стратегий-троек игрока II. Учитываем при этом (см. (31)), что при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ имеют место включения

$$(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \in \mathcal{F}') \ \& \ (\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \in \mathfrak{F}'). \tag{111}$$

Напомним построения пп. 4 и 5 в части стратегий-троек и порождаемых ими движений (подробнее см. в [38, 39]). Упомянутые движения [38, разд. 7] порождаются ОУ. Однако сами стратегии-тройки игрока II формируют управления из множеств $\mathcal{V}_t$, $t \in T$ (реализации управления игрока I допускаются в [38, 39] обобщёнными). Итак, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $(V, \beta, m) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}$ имеем непустой пучок $\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]$ траекторий, стартующих из позиций (t_*, x_*) и порождаемых совместным воздействием ОУ игрока I и обычных управлений из $\mathcal{V}_{t_*}$. Последние формируются пошагово посредством позиционой стратегии V, включаемой в моменты, вырабатываемые с помощью β в количестве, не превосходящем m; см. [38, разд. 7].

Согласно [38, теорема 9.2] с учётом включений (111) получаем при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}$ равенство

$$\begin{gathered}\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \{(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) : \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \ \ \exists \beta \in \mathbb{G}_t \ \ \exists l \in \overline{1, k} \\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; l] \ \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0] \ \ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\}.\end{gathered} \tag{112}$$

Напомним свойство, отмеченное в [38, следствие 9.1] и касающееся совпадения множеств успешной разрешимости задач “обычного” и строгого уклонения (уклонения “с запасом”). В силу (29) и (30) при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство

$$\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))). \tag{113}$$

Из равенств (112), (113), в частности, следует, что справедлива импликация

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \ \forall (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \ \ \ \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \ \ \ \exists \beta \in \mathbb{G}^*_t \ \ \ \exists k \in \mathbb{N} \\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; k] \ \ \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0] \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \ \Rightarrow \ (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)).\end{gathered} \tag{114}$$

Отметим, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $k \in \mathbb{N}$ определено (конечное) значение

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 16.1. *Если* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $k \in \mathbb{N}$, $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ *и* $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ *таковы, что*

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \ \Rightarrow \ (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta) : \quad (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)),$$

то $\varepsilon < \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta)$.

Доказательство следует непосредственно из определений.

Следствие 16.1. *Если* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ *таковы, что*

$$\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \quad ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \ \Rightarrow \ (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta) : (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)),$$

то выполняется неравенство $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \geqslant \varepsilon$.

Доказательство очевидно (см. (71) и предложение 16.1).

Предложение 16.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$, *то* $\exists V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$ $\exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)[$. Тогда $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon_* < \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$. В силу (44) и (45) имеем $(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Поэтому

$$((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \vee ((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))). \tag{115}$$

Рассмотрение первого (в (115)) случая опустим в силу его очевидности (см. (15), (16)); итогом его является импликация

$$((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*} \quad \exists k \in \mathbf{N} : \varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))). \tag{116}$$

Рассмотрим второй случай. Пусть $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Тогда в силу (114) для некоторых $V^* \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta^* \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеет место импликация $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$ $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{117}$$

Пусть $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$. Тогда $y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, $y(t_*) = x_*$ и, согласно (117), верна импликация $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, y(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{118}$$

Выберем произвольно $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$ и рассмотрим отдельно случаи $\vartheta^* = t_*$ и $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$.

1$'$) Пусть $\vartheta^* = t_*$. Тогда согласно (70) $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*) = \psi_\kappa(t_*, x_*)$. В силу того, что $[t_*, t_*[= [t_*, \vartheta^*[= \varnothing$ согласно (118) имеем $(\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)$, т.е. $(t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)$. Поэтому согласно включению (37) $\varepsilon_* < \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \psi_\kappa(t_*, x_*)$ (см. (58)). В итоге $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$. Таким образом, установлено, что если $\vartheta^* = t_*$, то $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$.

2$'$) Пусть $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (67)) $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) = [t_*, \vartheta^*[$. Из импликации (118) следует, что

$$((\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*) : (t, y(t)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{119}$$

Напомним, что $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$, $V^* \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$, $\beta^* \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $r \in \mathbb{N}$, $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$ и $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$. В силу предложения 16.1 и импликации (119) неравенство $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$ справедливо и в случае 2$'$). Получили, что если $\vartheta^* \in]t_*, \vartheta_0]$, то $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta^*)$.

Так как выбор числа ϑ^* был произвольным, получаем, что $\varepsilon_* < \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta)$ для всех $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$. Отсюда с учётом определения (71) вытекает неравенство $\varepsilon_* \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(y(\cdot))$. Так как и выбор функции $y(\cdot)$ был произвольным, установлено, что $\varepsilon_* \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))$ для всех $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]$. Поэтому

$$\varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V^*; \beta^*; r]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Итак, доказана следующая импликация:

$$((t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbb{G}_{t_*} \quad \exists k \in \mathbb{N} : \varepsilon_* \leqslant \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))). \tag{120}$$

Из (116) и (120) вытекает требуемое утверждение. Предложение доказано.

Предложение 16.3. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] : \quad \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$. В силу предложения 9.4 $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Из (29) и (30) следует включение

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \tag{121}$$

Тогда (см. [38, предложение 7.5]) для некоторых $y(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$ имеем

$$((\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \;\&\; ((t, y(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[). \tag{122}$$

При этом $y(t_*) = x_*$ (см. п. 3, а также [38, 39]). Рассмотрим отдельно случаи $\bar{\vartheta} = t_*$ и $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$.

а$'$) Пусть $\bar{\vartheta} = t_*$. Тогда $(\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})) = (t_*, x_*)$ и, согласно (67), $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = \{t_*\}$. Из включения (121) следует, что $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$. Согласно предложению 10.5 $(t_*, y(t_*)) \in (\zeta_\kappa)^{-1}([0, \varepsilon_*])$, т.е. $\zeta_\kappa(t_*, y(t_*)) \leqslant \varepsilon_*$. Итак, $\zeta_\kappa(t, y(t)) \leqslant \varepsilon_*$ для всех $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$. Отсюда с учётом включений (122) получаем, что

$$(\zeta_\kappa(t, y(t)) \leqslant \varepsilon_* \quad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})) \;\&\; (\rho(\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta}); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_*). \tag{123}$$

Вследствие (69) и (123) в случае а$'$) верно неравенство $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$. Таким образом,

$$(\bar{\vartheta} = t_*) \;\Rightarrow\; (\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*). \tag{124}$$

б$'$) Пусть $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$. Тогда (см. (67)) $\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta}) = [t_*, \bar{\vartheta}[$ и в силу включений (122) получаем

$$(\rho((\bar{\vartheta}, y(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_*) \;\&\; ((t, y(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \quad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})). \tag{125}$$

Из (125) и предложения 10.5 вытекает, в частности, что $(t, y(t)) \in (\zeta_\kappa)^{-1}([0, \varepsilon_*])$ для всех $t \in \mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})$. Получили (см. (125)) свойство (123). В силу (69) неравенство $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$ верно и в случае б$'$). Следовательно, если $\bar{\vartheta} \in]t_*, \vartheta_0]$, то $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$. Поэтому с учётом (124) получаем, что $\omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \bar{\vartheta}) \leqslant \varepsilon_*$ во всех возможных случаях. Тогда $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(y(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$ в силу (71). Учитывая выбор $y(\cdot)$, приходим к требуемому свойству. Предложение доказано.

Из предложения 16.3 вытекает следующее свойство: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то определено (конечное) значение

$$\sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \; \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)].$$

С учётом предложения 16.2 заключаем, что справедлива

Теорема 16.1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \; \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Из равенств (80) и теорем 12.1, 16.1 вытекает

Теорема 16.2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa)$ *есть цена игры на минимакс-максимин* $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}$, *при этом*

$$\varepsilon_0(t_*, x_*|\kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \; \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) = \min_{\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}} \; \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)) =$$

$$= \sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \; \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
3. *Ченцов А.Г.* Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1801–1808.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., 1967.
5. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., 1970.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М., 1985.
7. *Krasovskii A.N.* Control under Lack of Information. Berlin etc., 1995.
8. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург, 2011.
9. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев, 1992.
10. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1977.
11. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М., 1991.
12. *Понтрягин Л.С.* К теории дифференциальных игр // Успехи мат. наук. 1996. Т. 21. № 4. С. 219–274.
13. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
14. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
15. *Мищенко Е.Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 5. С. 3–9.
16. *Пшеничный Б.Н.* Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 185–187.
17. *Пшеничный Б.Н.* О линейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1968. № 1. С. 65–78.
18. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев, 1992.
19. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston; Basel; Berlin, 1995.
20. *Субботин А.И.* Об одном свойстве субдифференциала // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 9. С. 1315–1330.
21. *Кряжимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
22. *Ченцов А.Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
23. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
24. *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
25. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
26. *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 455–467.
27. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321.
28. *Ченцов А.Г., Хачай Д.М.* Релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения и методы итераций // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 18. № 4. С. 246–269.
29. *Chentsov A.G., Khachay D.M.* Program iterations method and relaxation of a pursuit-evasion differential game / Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications. 2019. V. 203. P. 129–161.
30. *Ченцов А.Г., Хачай Д.М.* Оператор программного поглощения и релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 64–91.
31. *Ченцов А.Г.* Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения–уклонения // Вестн. российск. ун-тов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С.196–244.
32. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М., 1970.
33. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
34. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

35. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М., 1964.
36. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ. № 1933-79 / Уральский политехн. ин-т им. С.М. Кирова. Свердловск, 1979.
37. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
38. *Ченцов А.Г.* Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 285–302.
39. *Ченцов А.Г.* Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртск. гос. ун-та. 2017. Т. 49. С. 17–54.
40. *Chentsov A.G., Morina S.I.* Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London, 2002.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Уральский федеральный университет
им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 28.09.2020 г.
После доработки 28.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.