ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1142–1145

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О БАЗИСНОСТИ В L_p СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2021 г. Н. Ю. Капустин

Изучается задача Штурма–Лиувилля с квадратом спектрального параметра в одном граничном условии и однородным другим граничным условием. При наличии кратного собственного значения устанавливается базисность системы собственных функций без любой функции с простым собственным значением.

DOI: 10.31857/S0374064121080148

Рассматривается спектральная задача

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$X(0) = 0, \quad X'(1) = d\lambda^2 X(1) \tag{2}$$

с ненулевым постоянным коэффициентом d. Эта задача в случае действительного физического параметра d изучалась в работах [1, 2]. Исследованы вопросы полноты, минимальности и базисности системы собственных функций в пространствах L_p, C и C^1.

Решением задачи (1), (2) является система собственных функций

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

отвечающих собственным значениям λ_n – корням характеристического уравнения

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda} = d(\sqrt{\lambda})^3. \tag{3}$$

Отметим, что при действительных значениях коэффициента d все корни характеристического уравнения (3) простые. В статье [3] рассматривался общий случай – когда физический параметр d может принимать и комплексные значения. Для определённости будем предполагать, что

$$-\pi/2 < \arg\sqrt{\lambda_n} \leqslant \pi/2,$$

а собственные числа занумеруем в порядке возрастания их абсолютных величин.

В упомянутой работе [3] получены следующие два результата. В случае простых корней, т.е. когда $d \notin \{\operatorname{ctg} z/z^3\}$, где $\{z\}$ – множество (комплексных) корней уравнения

$$1 + \frac{3\sin z\cos z}{z} = 0, \tag{4}$$

показано, что если из системы собственных функций задачи (1), (2) удалить любые две функции, то получившаяся система образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$), а биортогонально сопряжённая к ней система $\{\Psi_n(x)\}$ состоит из функций $\Psi_n(x)$ таких, что

$$\overline{\Psi}_n(x) = A_n^{-1}\left[X_n(x) - \frac{(\lambda_n - \lambda_m)X_n(1)}{(\lambda_l - \lambda_m)X_l(1)}X_l(x) - \frac{(\lambda_n - \lambda_l)X_n(1)}{(\lambda_m - \lambda_l)X_m(1)}X_m(x)\right], \quad n \neq m, l,$$

где $A_n = (1 + 3d\lambda_n\sin^2\sqrt{\lambda_n})/2$, а m и l – номера удалённых функций.

В случае появления кратного корня, т.е. если $d = \operatorname{ctg} z/z^3$, где комплексное число z – некоторый корень уравнения (4), система $\{X_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{l\}$, собственных функций задачи (1), (2) без одной функции $X_l(x)$, соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$ (кратность в этом случае равна 2), образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$), а биортогонально сопряжённая к ней система $\{\Psi_n(x)\}$ состоит из функций $\Psi_n(x)$ таких, что

$$\overline{\Psi}_n(x) = A_n^{-1}\left[X_n(x) - \frac{(\lambda_l - \lambda_n)X_n(1)}{X_l(1)}Z_l(x) - \left(1 - \frac{(\lambda_l - \lambda_n)Z_l(1)}{X_l(1)}\right)\frac{X_n(1)}{X_l(1)}X_l(x)\right], \quad n \neq l,$$

где $Z_l(x) = -(2\sqrt{\lambda_l})^{-1}x\cos(\sqrt{\lambda_l}x)$.

В настоящей статье мы дополним второй результат, рассмотрев случай, когда из системы собственных функций задачи (1), (2) удаляется произвольная функция с простым собственным значением.

Теорема. *Если $d = \operatorname{ctg} z/z^3$, где комплексное число z – какой-либо корень уравнения (4), то система $\{X_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$, собственных функций задачи (1), (2) без одной собственной функции $X_m(x)$, соответствующей простому собственному значению λ_m, при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m \neq l$, образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$). Биортогонально сопряжённая к ней система $\{\Psi_n(x)\}$ состоит из функций $\Psi_n(x)$ таких, что*

$$\overline{\Psi}_l(x) = A_l^{-1}\left[Z_l^{\alpha}(x) - \frac{Z_l^{\alpha}(1)}{X_m(1)}X_m(x)\right],$$

$$\overline{\Psi}_n(x) = A_n^{-1}\left[X_n(x) - \frac{(\lambda_n - \lambda_m)X_n(1)}{(\lambda_l - \lambda_m)X_l(1)}X_l(x) - \frac{(\lambda_n - \lambda_l)X_n(1)}{(\lambda_m - \lambda_l)X_m(1)}X_m(x)\right], \quad n \neq l,$$

где

$$Z_l^{\alpha}(x) = -\frac{x\cos(\sqrt{\lambda_l}x)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha\sin(\sqrt{\lambda_l}x), \quad \alpha = \frac{1}{\lambda_l - \lambda_m} + \frac{d\lambda_l}{2},$$

$$A_l = \int_0^1 Z_l^{\alpha}(x)X_l(x)\,dx + d(\lambda_l + \lambda_m)Z_l^{\alpha}(1)X_l(1) = \frac{d\lambda_l^2 + 1}{4\lambda_l}.$$

Доказательство. Если $n \neq k$, то справедливо равенство

$$\int_0^1 X_n(x)X_k(x)\,dx + d(\lambda_n + \lambda_k)X_n(1)X_k(1) = 0, \tag{5}$$

которое в случае, когда все корни простые, даёт алгоритм построения биортогонально сопряжённой системы.

Пусть z – какой-либо корень уравнения (4) и пусть $d = \operatorname{ctg} z/z^3$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим спектральную задачу для присоединённой функции:

$$Z_l''(x) + \lambda Z_l(x) = X_l(x), \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

$$Z_l(0) = 0, \quad Z_l'(1) = d\lambda^2 Z_l(1) - 2d\lambda X_l(1). \tag{7}$$

Решением задачи (6), (7) в случае собственной функции $X_l(x) = \sin(\sqrt{\lambda_l}x)$ является корневая функция

$$Z_l^{\alpha}(x) = -\frac{x\cos(\sqrt{\lambda_l}x)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha\sin(\sqrt{\lambda_l}x),$$

где α – произвольное комплексное число. Для упрощения мы полагаем $\alpha = 0$.

Если $n \neq l,$ то справедливо аналогичное равенству (5) соотношение

$$\int\limits_0^1 X_n(x)Z_l^\alpha(x)\,dx + d(\lambda_n+\lambda_l)X_n(1)Z_l^\alpha(1) - dX_n(1)X_l(1) = 0.$$

Нам остаётся проверить следующие два равенства:

$$\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_n(x)\,dx = 0, \quad n \neq l, \quad \text{и} \quad A_l\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_l(x)\,dx = \frac{d\lambda_l^2+1}{4\lambda_l}.$$

Воспользуемся для этого соотношениями

$$3d\lambda_l\sin^2\sqrt{\lambda_l} = -1, \quad \sin^2\sqrt{\lambda_l} = 1 + \frac{d\lambda_l^2}{3},$$

$$\int\limits_0^1 x\sin(\sqrt{\lambda_l}x)\cos(\sqrt{\lambda_l}x)\,dx = \frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{2\sqrt{\lambda_l}} - \frac{1}{3\sqrt{\lambda_l}}, \quad \int\limits_0^1 \sin^2(\sqrt{\lambda_l}x)\,dx = \frac{2}{3},$$

справедливыми для кратного собственного значения.

Докажем первое из этих равенств:

$$A_l\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_n(x)\,dx = \left[\int\limits_0^1 X_n(x)Z_l^\alpha(x)\,dx - \frac{Z_l^\alpha(1)}{X_m(1)}\int\limits_0^1 X_n(x)X_m(x)\,dx\right] =$$

$$= \left[-d(\lambda_n+\lambda_l)X_n(1)Z_l^\alpha(1) + d(\lambda_n+\lambda_m)X_n(1)Z_l^\alpha(1) + dX_n(1)X_l(1)\,dx\right] =$$

$$= dX_n(1)\left[Z_l^\alpha(1)(\lambda_l-\lambda_m) + X_l(1)\right] = 0,$$

так как

$$Z_l^\alpha(1) = -\frac{\cos\sqrt{\lambda_l}}{2\sqrt{\lambda_l}} + \frac{\sin\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_l-\lambda_m} + \frac{d\lambda_l\sin\sqrt{\lambda_l}}{2} = \frac{X_l(1)}{\lambda_l-\lambda_m}.$$

Доказательство второго равенства содержат следующие преобразования:

$$A_l\int\limits_0^1 \overline{\Psi}_l(x)X_l(x)\,dx = \left[\int\limits_0^1 X_l(x)Z_l^\alpha(x)\,dx - \frac{Z_l^\alpha(1)}{X_m(1)}\int\limits_0^1 X_l(x)X_m(x)\,dx\right] =$$

$$= \left[\int\limits_0^1 X_l(x)Z_l^\alpha(x)\,dx + d(\lambda_l+\lambda_m)X_l(1)Z_l^\alpha(1)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_l}}\left(\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{2\sqrt{\lambda_l}} - \frac{1}{3\sqrt{\lambda_l}}\right) + \frac{2}{3}\alpha + d(\lambda_l+\lambda_m)\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_l-\lambda_m} =$$

$$= -\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{4\lambda_l} - \frac{d}{2}\sin^2\sqrt{\lambda_l} - 2d\lambda_l\sin^2\sqrt{\lambda_l}\left(\frac{1}{\lambda_l-\lambda_m} + \frac{d\lambda_l}{2}\right) +$$

$$+ d(\lambda_l+\lambda_m)\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_l}}{\lambda_l-\lambda_m} = -\frac{1}{4\lambda_l} - \frac{d\lambda_l}{12} - \frac{3}{2}d\sin^2\sqrt{\lambda_l} - d\lambda_l^2\sin^2\sqrt{\lambda_l} =$$

$$= -\frac{1}{4\lambda_l} - \frac{d\lambda_l}{12} + \frac{1}{2\lambda_l} + \frac{d\lambda_l}{3} = \frac{d\lambda_l^2+1}{4\lambda_l}.$$

Теперь, используя технику, разработанную для доказательства основной теоремы работы [4], несложно получить сформулированные в теореме утверждения о базисности. Теорема доказана.

Рассмотренная спектральная задача возникает при решении методом разделения переменных следующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике $D = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ с граничным условием, также записанным с помощью оператора теплопроводности, но в котором временна́я и пространственная переменные поменялись местами. Требуется найти функцию $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\overline{D}) \bigcap C^2(\overline{D} \bigcap \{t > 0\})$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{8}$$

с начальным

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{9}$$

и граничными

$$u(0,t) = 0, \quad du_{tt}(1,t) = u_x(1,t), \quad t \in (0,T), \tag{10}$$

условиями, $d < 0$. В работе [3] подробно изучен вопрос о корректности этой смешанной задачи. Получены следующие результаты: пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гёльдера $C^{2+\alpha}[0,1]$, $\alpha > 0$ и $f(0) = f''(0) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (8)–(10). Отметим, что задача (8)–(10) в классической постановке – о нахождении решения в классе $C^{1,0}(\overline{D}) \bigcap C^2(\overline{D} \bigcap \{t > 0\})$ – имеет неединственное решение.

Автор благодарит академика Е.И. Моисеева за проявленный интерес к этой работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1504–1507.
2. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе C1 ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
3. *Капустин Н.Ю.* К вопросу о базисности системы собственных функций одной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1284–1289.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.05.2021 г.
После доработки 19.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.