ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1146–1150

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.58

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2021 г. **В. И. Максимов**

Приводится регуляризирующий алгоритм решения задачи динамического восстановления неизвестного входа, действующего на нелинейное векторное дифференциальное уравнение. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений.

DOI: 10.31857/S037406412108015X

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается задача динамического восстановления неизвестных входных воздействий (управлений). Предполагается, что система описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ – управление, P – компакт, $f : T \times \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ – векторная функция, непрерывная по t, u и липшицева по x. Эволюция фазового состояния $x(t)$, $t \in T$, определяется некоторым входом $u(\cdot)$. Этот вход, а также траектория $x(\cdot)$ системы неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, измеряются с некоторой ошибкой координаты вектора $x(\tau_i)$. Требуется восстановить управление $u(\cdot)$, порождающее решение $x(\cdot)$. Так как точное восстановление управления $u(\cdot)$ невозможно, то необходимо построить алгоритм приближённого вычисления некоторого приближения к $u(\cdot)$. Это приближение должно быть тем лучше, чем меньше величина погрешности измерения $x(\tau_i)$ и чем гуще сетка $\{\tau_i\}$, взятая на промежутке T.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем. Один из подходов к решению подобного типа задач развит в работах [1–5]. Здесь мы указываем только монографии и обзорные статьи. В соответствии с этим подходом задача динамического восстановления заменяется задачей позиционного управления некоторой специальным образом подобранной системы, называемой *моделью*. При этом приближение неизвестного входа строится с помощью модели. В настоящей работе предложен отличный от известных алгоритм решения задачи восстановления, основанный на тех же идеях, что и алгоритмы из указанных выше работ.

2. Алгоритм решения. Рассмотрим разбиение отрезка T на $m_h - 1$ полуинтервалов $\delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ узлами $\tau_{h,i} = t_0 + i\delta_h$, $0 \leqslant i \leqslant m_h$, с шагом $\delta_h = (\vartheta - t_0)/m_h$. Через ξ_i^h обозначим результаты измерений состояний $x(\tau_i)$, т.е. векторы, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h| \leqslant h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h - 1], \tag{2}$$

где $h \in (0, 1)$ – величина погрешности измерения фазового состояния системы (1), а $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

В соответствии с подходом [1–5], прежде чем приступить к описанию алгоритма решения задачи, мы должны указать вспомогательную систему (модель). В данной статье модель описывается уравнением вида

$$\dot{w}_h(t) = v^h(t), \quad t \in T, \quad w_h(t_0) = \xi_0^h. \tag{3}$$

Её решение – абсолютно непрерывная функция $w_h(\cdot) = w_h(\cdot\,; t_0, w_h(t_0), v^h(\cdot))$.

Заметим, что модель является простейщей дифференциальной системой, в то время как реальная система нелинейна по фазовым переменным. Обозначим

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^n) : u(t) \in P \ \text{ при п.в. } \ t \in T\}.$$

Пусть $\operatorname{sel} U(x(\cdot))$ – совокупность всех управлений $u(\cdot)$ из $P(\cdot)$, порождающих $x(\cdot)$, т.е.

$$\operatorname{sel} U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) : \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \ \text{ при п.в. } \ t \in T\};$$

в дальнейшем через $\operatorname{dist}(u(\cdot), \operatorname{sel} U(x(\cdot)))$ обозначаем расстояние между управлением $u(\cdot)$ и непустым множеством $\operatorname{sel} U(x(\cdot))$ в метрике пространства $L_2(T;\mathbb{R}^n)$.

Через $v_{[a,b]}(\cdot)$ будем обозначать сужение функции $v(t)$ на отрезок $[a,b]$. Введём два управления $u^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$. При этом второе управление (управление в модели (3)) будет носить вспомогательный характер. Оно необходимо для вычисления $u^h(\cdot)$. Пусть функции $v^h_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}(\cdot)$ и $u_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}(\cdot)$ вычисляются в моменты $\tau_i = \tau_{h,i}$ по правилу

$$v^h(t) = 0, \quad u^h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \delta_0 = [t_0, \tau_1),$$

$$v^h(t) = v^h_i = v^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i, w_h(\tau_i)), \quad u^h(t) = u^h_i = u^h(\tau_i, \xi^h_i, v^h_i)$$
$$\text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [1 : m-1], \quad m = m_h,$$

где

$$v^h_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \rho^h_i \leqslant 0 \ \text{ или } \ |\pi^h_i| \leqslant \varepsilon, \\ -\rho^h_i (a^h_i)^{-2}\pi_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

$$u^h_i = \arg\min\{|f(\tau_i, \xi^h_i, v) - v^h_i| : v \in P\},$$

$$\rho^h_i = -(\pi^h_i, \chi^h_i), \quad \pi^h_i = w_h(\tau_i) - \xi^h_{i-1}, \quad \chi^h_i = \xi^h_i - \xi^h_{i-1}, \quad a^h_i = |\pi^h_i|\delta^{1/2},$$

здесь через $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Утверждение [6, с. 69]. *Если семейство управлений $\tilde{u}^h(\cdot) \in P(\cdot)$ таково, что*

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} |f(t, x(t), \tilde{u}^h(t)) - \dot{x}(t)|^2 dt \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to 0,$$

то имеет место сходимость

$$\operatorname{dist}(\tilde{u}^h(\cdot), \operatorname{sel} U(x(\cdot))) \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Теорема. *Пусть при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ и всех $h \in (0,1)$ выполняется неравенство $h^{1-\varepsilon}\delta^{-1}(h) \leqslant c_0$ $(c_0 = \mathrm{const} \in (0, +\infty))$. Тогда*

$$\operatorname{dist}(u^h(\cdot), \operatorname{sel} U(x(\cdot))) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Оценим изменение величины $\varepsilon_{i+1} = |r_{i+1}|^2$, $r_{i+1} = w_h(\tau_{i+1}) - x(\tau_i)$, $i \in [0 : m-1]$. Имеем неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_i + J_{1,i} + J_{2,i}, \tag{5}$$

где

$$J_{1,i} = 2\biggl(r_i, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_1(\tau; v^h, \dot{x})\, d\tau\biggr), \quad J_{2,i} = \biggl|\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_1(\tau; v^h, \dot{x})\, d\tau\biggr|^2, \quad \mu_1(\tau; v^h, \dot{x}) = v^h(\tau + \delta) - \dot{x}(\tau).$$

Ввиду (2) верно неравенство
$$\left|\chi_i^h - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{x}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant 2h, \tag{6}$$
воспользовавшись которым получим
$$\rho_i^h \leqslant -\left(\pi_i^h, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{x}(\tau)\,d\tau\right) + 2h|\pi_i^h|.$$
Отсюда следует, что
$$\rho_i^h \leqslant a_i^h |\dot{x}(\cdot)|_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 2h|\pi_i^h|. \tag{7}$$

Далее, в силу неравенств (6) верна оценка
$$J_{1,i} \leqslant \overline{J}_{1,i} + \beta_{h,i}. \tag{8}$$
Здесь
$$\beta_{h,i} = 2h \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\mu_1(\tau; v^h, \dot{x})|\,d\tau,$$
$$\overline{J}_{1,i} = 2\left(\pi_i^h, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu_1(\tau; v^h, \dot{x})\,d\tau\right) \leqslant 2\rho_i^h + 4h|\pi_i^h| + 2\left(\pi_i^h, \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v^h(\tau+\delta)\,d\tau\right).$$
Заметим, что при выполнении условия
$$\rho_i^h > 0 \tag{9}$$
управление $v^h(\tau)$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, вида (4) обеспечивает выполнение неравенства
$$\rho_i^h + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\pi_i^h, v^h(\tau+\delta))\,d\tau \leqslant 0. \tag{10}$$
В таком случае при условии (9) из определения (4) и оценки (7) вытекает неравенство
$$|v^h(\cdot)|_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} \leqslant \left(\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\rho_i^h |\pi_i^h| (a_i^h)^{-2})^2\,dt\right)^{1/2} =$$
$$= \rho_i^h / a_i^h \leqslant |\dot{x}(\cdot)|_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 2h|\pi_i^h|^{-1}\delta^{-1/2}|\pi_i^h| = |\dot{x}(\cdot)|_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 2h\delta^{-1/2}. \tag{11}$$
Очевидно, неравенства (10) и (11) верны и при $\rho_i^h \leqslant 0$.

Рассмотрим величину $\beta_{h,i}$. Имеем
$$\beta_{h,i} \leqslant 4h^2 + \delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)}\}. \tag{12}$$
Ввиду (11) справедливо неравенство
$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} \leqslant 2|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 8h^2\delta^{-1}, \tag{13}$$
учитывая которое в неравенстве (12), получаем
$$\beta_{h,i} \leqslant 4h^2 + 3\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 8h^2\delta^{-1} \leqslant 12h^2\delta^{-1} + 3\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)}. \tag{14}$$

Кроме того, в силу (13) имеет место оценка

$$J_{2,i} \leqslant 2\delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)}\} \leqslant 4\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 16h^2. \tag{15}$$

Воспользовавшись неравенством (10), устанавливаем оценку

$$\overline{J}_{1,i} \leqslant 4h(h + \varepsilon_i^{1/2}) \leqslant 4h^2 + 2h + 2h\varepsilon_i \leqslant 6h + 2h\varepsilon_i. \tag{16}$$

Объединив (14) и (15), получим

$$\beta_{h,i} + J_{2,i} \leqslant 9\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 28h^2\delta^{-1}. \tag{17}$$

Из неравенства (5) вследствие оценок (8), (16) и (17) выводим неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (1+2h)\varepsilon_i + 9\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i-1};\mathbb{R}^n)} + 6h + 28h^2\delta^{-1}, \quad i \in [0:m-1],$$

учитывая которое, аналогично [7, с. 59–61] устанавливаем, что

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (|w^h(t_0+\delta) - x(t_0)|^2 + 6h\delta^{-1} + 28h^2\delta^{-2} + 9\delta|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)}) \times$$

$$\times \exp\{(1+2h\delta^{-1})(\tau_{i+1} - t_0)\}, \quad i \in [0:m-1]. \tag{18}$$

Далее, при всех $t \in \delta_i$ выполняется соотношение

$$|w_h(t) - x(t)|^2 = \left| w_h(\tau_{i+1}) - \int\limits_t^{\tau_{i+1}} v^h(s+\delta)ds - x(\tau_i) - \int\limits_{\tau_i}^t \dot{x}(s)ds \right|^2 \leqslant \varepsilon_{i+1} + e_i. \tag{19}$$

Здесь

$$e_i = 2|w_h(\tau_{i+1}) - x(\tau_i)| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\dot{x}(\tau)| + |v^h(\tau+\delta)|\}\, d\tau + 2\delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i+1};\mathbb{R}^n)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{i+1} + 4\delta\{|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i+1}:\mathbb{R}^n)}\}.$$

В таком случае, воспользовавшись неравенством (11), несложно показать, что $e_i \leqslant \varepsilon_{i+1} + c_1\delta$. Отсюда и из (18), (19) вытекает оценка

$$|x(t) - w_h(t)|^2 \leqslant c_2(h\delta^{-1}(1 + h\delta^{-1}) + \delta), \quad t \in T. \tag{20}$$

Здесь и ниже c_j, $j = 1, 2, \ldots,$ – положительные постоянные.

Далее, в силу (11), каково бы ни было $\lambda \in (0, +\infty)$, верно неравенство

$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(\delta_{i+1};\mathbb{R}^n)} \leqslant (|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + 2h\delta^{-1/2})^2 \leqslant (1+\lambda)|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(\delta_i;\mathbb{R}^n)} + 4h^2(\lambda\delta)^{-1}.$$

Следовательно,

$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant (1+\lambda)|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} + 4(\vartheta - t_0)\lambda^{-1}(h\delta^{-1})^2. \tag{21}$$

Если $\lambda = h^\varepsilon$, $h^{1-\varepsilon}\delta^{-1}(h) \leqslant c_0$ при $h \in (0,1)$, то $(\vartheta - t_0)\lambda^{-1}(h\delta^{-1})^2 \leqslant c_2 h^\varepsilon$ и из (21) следует неравенство

$$|v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant (1+h^\varepsilon)|\dot{x}(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} + c_4 h^\varepsilon. \tag{22}$$

Воспользовавшись неравенствами (20) и (22), стандартным образом (см., например, [3, с. 24–26]) устанавливаем сходимость

$$v^h(\cdot) \to \dot{x}(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T;\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{23}$$

Через $X(\cdot)$ обозначим пучок решений системы (1), т.е.

$$X(\cdot) = \{x(\cdot) : \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \quad u(\cdot) \in P(\cdot), \quad x(t_0) = x_0\}.$$

Пусть $K = \sup\{|x| : x \in X(t),\ \ t \in T\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant K + 1\}$. Нетрудно видеть, что при п.в. $t \in T$ и всех $x(\cdot) \in X(\cdot)$ справедливо неравенство $|\dot{x}(t)| \leqslant c_5$. Поэтому при п.в. $t \in \delta_i$ и всех $i \in [0 : m-1]$, $u \in P$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} ||f(t, x(t), u) - \dot{x}(t)| - |f(\tau_i, \xi_i^h, u) - v_i^h|| \leqslant \omega(\delta) + L(|\xi_i^h - x(t)| + |\dot{x}(t) - v_i^h|) \leqslant \\ \leqslant c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v^h(t)|). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\omega(\delta) = \sup\{|f(t_1, x, u) - f(t_2, x, u)| : t_1, t_2 \in T,\ \ |t_1 - t_2| \leqslant \delta,\ \ x \in Q,\ \ u \in P\}$. Пусть $u(\cdot) \in \operatorname{sel} U(x(\cdot))$, L – постоянная Липшица функции $x \mapsto f(t, \cdot, u)$. Положив в (24) $u = u^h(t)$, устанавливаем справедливую при п.в. $t \in \delta_i$ и всех $i \in [0 : m-1]$ оценку

$$|f(t, x(t), u^h(t)) - \dot{x}(t)| \leqslant |f(\tau_i, \xi_i^h, u^h(t)) - v_i^h| + c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v_i^h|).$$

Отсюда, учитывая правило определения u_i^h (см. (4)), получаем

$$|f(t, x(t), u^h(t)) - \dot{x}(t)| \leqslant |f(\tau_i, \xi_i^h, u(t)) - v_i^h| + c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v_i^h|). \tag{25}$$

Пусть в (24) $u = u(t)$, тогда, воспользовавшись равенством

$$|f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)| = 0 \quad (\text{при п.в.} \quad t \in T),$$

из (24) выводим справедливую при п.в. $t \in \delta_i$ оценку

$$|f(\tau_i, \xi_i^h, u(t)) - v_i^h| \leqslant c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v_i^h|). \tag{26}$$

Учитывая неравенства (25), (26), получаем, что при п.в. $t \in T$ верна оценка

$$|f(t, x(t), u^h(t)) - \dot{x}(t)| \leqslant 2c_6(\omega(\delta) + h + \delta + |\dot{x}(t) - v^h(t)|). \tag{27}$$

Справедливость теоремы следует из утверждения, сходимости (23) и неравенства (27). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
2. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
3. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, 2011.
4. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
5. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов И.И.* Обратные задачи динамики для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.
6. *Кряжимский А.В.* О непрерывности лебеговских множеств в задаче оптимального управления // Задачи оптимизации и устойчивости в управляемых системах. Свердловск, 1990. С. 54–73.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 07.11.2020 г.
После доработки 09.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.