ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1153–1163

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

© 2021 г. Т. Ишанкулов, Ф. Т. Ишанкулов

Методом функции Карлемана установлен критерий разрешимости задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса в многомерном пространстве и построено её регуляризованное решение.

DOI: 10.31857/S0374064121090016

1. Введение. В данной работе рассматривается задача продолжения решения линеаризованной стационарной системы уравнений Навье–Стокса (л.с.с.у. Н–С) в пространственную ограниченную область по значениям вектора скорости и вектора напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши для этой системы.

Доказательство приведённой в п. 3 работы формулы продолжения, представляющей собой решение задачи Коши, основывается на методе, предложенном Т. Карлеманом [1] и обобщённом в работах [2–5]. В качестве следствия этой формулы продолжения получен критерий разрешимости задачи Коши, который является аналогом теоремы Фока–Куни [6] для л.с.с.у. Н–С. В п. 4 строится регуляризация решения задачи Коши. В п. 2 дано построение матрицы Карлемана. Для л.с.с.у. Н–С регуляризация и разрешимость задачи Коши в трёхмерном случае рассматривались в работах [7, 8], а задача Коши на плоскости – в работе [9].

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – точки n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$; $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$; $s = |x' - y'|^2$, $r^2 = s + (x_n - y_n)^2$; $\tau = \operatorname{tg}(\pi/(2\rho))$, $\rho < 1$; $K_\rho = \{y : |y'| < \tau y_n,\ y_n > 0\}$, $\partial K_\rho = \{y : |y'| = \tau y_n\}$, $\overline{K_\rho} = K_\rho \bigcup \partial K_\rho$; ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$; D_ρ – односвязная область с границей ∂D_ρ, состоящей из части поверхности конуса ∂K_ρ и гладкого куска S поверхности, лежащего внутри конуса $\overline{K_\rho}$. В случае $\rho = 1$ получаем, что K_1 – полупространство $y_n > 0$ и ∂K_1 – плоскость $y_n = 0$, тогда D_1 – односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, состоящей из части плоскости $y_n = 0$ и гладкого куска S поверхности, лежащего в полупространстве $y_n > 0$.

Л.с.с.у. Н–С в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\nu\Delta\vec{v}(x) - \operatorname{grad} p(x) = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v}(x) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{v}(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ – вектор скорости, компоненты которого определены в области D_ρ и принадлежат классу $C^2(D_\rho)$, функция $p(x)$ – давление – принадлежит классу $C^1(D_\rho)$, постоянная ν – коэффициент вязкости, Δ – оператор Лапласа. Будем следовать обозначениям из монографии [10]. Введём оператор напряжения

$$T(\vec{v}(y), p(y)) = \|T_{kj}(\vec{v}(y), p(y))\|_{n\times n},$$

$$T_{kj}(\vec{v}(y), p(y)) = -\delta_{kj}p(y) + \nu\biggl(\frac{\partial v_k(y)}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_k}\biggr), \quad k, j = \overline{1, n},$$

δ_{kj} – символ Кронекера.

Множество пар $(\vec{v}(x), p(x))$, где $\vec{v}(x) \in C^2(D_\rho) \bigcap C^1(\overline{D}_\rho)$ и $p(x) \in C^1(D_\rho) \bigcap C(\overline{D}_\rho)$, удовлетворяющих в области D_ρ системе (1.1), обозначим через $N(D_\rho)$. Пару $(\vec{v}, p) \in N(D_\rho)$ назовём *регулярным решением* системы (1.1) в области D_ρ.

Задача А. Известны данные Коши решения системы (1.1) на поверхности S:

$$\vec{v}(y) = \vec{f}(y), \quad y \in S, \tag{1.2}$$

$$T(\vec{v}(y), p(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y), \quad y \in S, \tag{1.3}$$

где $\vec{N}(y) = (N_1(y), \ldots, N_n(y))$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке y, $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ – заданные непрерывные вектор-функции. Требуется восстановить вектор-функцию $\vec{v}(x)$ и функцию $p(x)$ в области D_ρ, исходя из заданных $\vec{f}$, $\vec{h}$.

Задача Б. Указать условия, которым должны удовлетворять непрерывные вектор-функции $\vec{f}(y)$ и $\vec{h}(y)$, $y \in S$, чтобы существовало решение задачи Коши (1.1)–(1.3).

Единственность решения задачи А следует из общей теоремы Хольмгрена [11, с. 49]. Однако задача А некорректна, так как её решение: 1) существует не для любых данных и 2) не зависит непрерывно от данных Коши на поверхности S. Поэтому условие разрешимости не может быть описано в терминах линейно непрерывных функционалов. Если поверхность S и вектор-функции $\vec{f}$, $\vec{h}$ вещественно аналитические, то, согласно теореме Коши–Ковалевской [11, с. 24], решение задачи Коши (1.1)–(1.3) существует в окрестности поверхности S. Однако нас интересует глобальная разрешимость этой задачи.

Некорректность задачи Коши (1.1)–(1.3) показывает следующий пример, аналогичный примеру Адамара [12, с. 39].

Пример. Пусть S – кусок плоскости $x_3 = 0$ в $\mathbb{R}^3$ и

$$u_1^{(k)}(x) = \frac{1}{\nu k^3}(kx_1\cos(kx_1) + \sin(kx_1))\sin(kx_2)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{2}kx_3),$$

$$u_2^{(k)}(x) = \frac{x_1}{\nu k^2}\sin(kx_1)\cos(kx_3)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{2}kx_3), \quad u_3^{(k)}(x) = \frac{\sqrt{2}x_1}{\nu k^2}\sin(kx_1)\sin(kx_2)\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{2}kx_3),$$

$$p^{(k)}(x) = \frac{2}{k^2}\cos(kx_1)\sin(kx_2)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{2}kx_3), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Несложно убедиться, что при каждом k пара $(\vec{u}^{(k)}, p^{(k)}(x))$, составленная из вектор-функции $\vec{u}^{(k)}(x) = (u_1^{(k)}(x), u_2^{(k)}(x), u_3^{(k)}(x))$ и скалярной функции $p^{(k)}(x)$, удовлетворяет л.с.с.у. Н–С в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, при $x_3 = 0$ справедливы оценки

$$|\vec{u}^{(k)}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\nu k^2}, \quad |T(\vec{u}^{(k)}(x), p^{(k)}(x))\vec{N}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{k}.$$

Однако в каждой точке $x \in D_1$ с $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 > 0$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} |\vec{u}^{(k)}(x)| = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} p^{(k)}(x) = \infty.$$

2. Конструкция фундаментального решения. При исследовании задач А и Б используем подходящее фундаментальное решение системы (1.1). Доказываемые ниже формулы продолжения, представляющие собой решение задач А и Б, основаны на методе функции Карлемана, разработанном М.М. Лаврентьевым [2]. При построении матрицы Карлемана используем функцию Карлемана для уравнения Лапласа, построенную Ш.Я. Ярмухамедовым [3]. Следуя [2], приводим определение матрицы Карлемана.

Определение. *"Матрицей" Карлемана* задачи (1.1)–(1.3) называется пара $(G, \vec{r})$, состоящая из $(n \times n)$-матрицы $G = (G_k^m)$ и вектор-функции $\vec{r} = (r^1, \ldots, r^n)$, зависящих от точек $x \in D_\rho$, $y \in \overline{D}_\rho$ и числового параметра $\sigma > 0$ и удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) для каждой точки $x \in D_\rho$ справедливы представления

$$G_k^m(x, y, \sigma) = u_k^m(x - y) + g_k^m(x, y, \sigma), \quad k, m = \overline{1, n},$$

$$r^m(x, y, \sigma) = q^m(x - y) + g^m(x, y, \sigma), \quad m = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

где пара $(\vec{u}^m, q^m)$ – основное сингулярное решение системы (1.1), $\vec{u}^m = (u_1^m, \ldots, u_n^m)$, а пара $(\vec{g}^m, g^m)$, составленная из вектор-функции $\vec{g}^m = (g_1^m, \ldots, g_n^m)$ и функции g^m, является решением по переменной y всюду в области D_ρ сопряжённой л.с.с.у. Н–С

$$\nu\Delta_y \vec{g}^m + \mathrm{grad}_y g^m = 0, \quad \mathrm{div}_y \vec{g}^m = 0;$$

2) для каждой точки $x \in D_\rho$ имеют место неравенства

$$\int\limits_{\partial D_\rho \setminus S} (|G_k^m(x,y,\sigma)| + |T'_{ij}(\vec{G}^m(x,y,\sigma), r^m(x,y,\sigma))_y|)\, dS_y \leqslant \varepsilon_1(\sigma,x),$$

$$\int\limits_{\partial D_\rho \setminus S} \left(|r^m(x,y,\sigma)| + \left|\frac{\partial r^m(x,y,\sigma)}{\partial x_k}\right|\right) dS_y \leqslant \varepsilon_2(\sigma,x), \quad i,j,k,m = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon_l(\sigma,x)$ – некоторые функции, стремящиеся к нулю в каждой точке $x \in D_\rho$ при $\sigma \to \infty$, $l = 1, 2$,

$$T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y = \delta_{ij} r^m + \nu\left(\frac{\partial G_i^m}{\partial y_j} + \frac{\partial G_j^m}{\partial y_i}\right).$$

Отметим, что если в приведённом определении вектор-функция $\vec{g}^m$ и функция g^m зависят от разности $x - y$, то требование, чтобы пара $(\vec{g}^m, g^m)$ удовлетворяла по y всюду в области D_ρ сопряжённой л.с.с.у. Н–С, равносильно тому, что эти функции по переменной x удовлетворяют уравнениям (1.1). "Матрица" Карлемана для задачи Коши (1.1)–(1.3) играет такую же роль, какую играет матрица Грина в первой краевой задаче для системы (1.1).

Переходим к построению "матрицы" Карлемана. Матрицу (G_k^m) и вектор $\vec{r}$ определим равенствами

$$G_k^m(x-y,\sigma) = -\frac{1}{2\nu}\left(\delta_{km}\Phi(x-y,\sigma) + (x_m - y_m)\frac{\partial}{\partial y_k}\Phi(x-y,\sigma)\right),$$

$$r^m(x-y,\sigma) = -\frac{\partial}{\partial y_m}\Phi(x-y,\sigma), \tag{2.3}$$

где Φ – функция Карлемана для уравнения Лапласа, которая определяется следующим образом:

если $n = 2l+1$, $l \geqslant 1$, то

$$a_m\Phi(x-y,\sigma) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} \int\limits_0^\infty \mathrm{Im}\left(\frac{E_\rho(\sigma w)}{w}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}, \quad w = i\sqrt{u^2+s} + y_n - x_n; \tag{2.4}$$

если $n = 2l$, $l \geqslant 2$, то

$$a_m\Phi(x-y,\sigma) = \frac{\partial^{l-2}}{\partial s^{l-2}}\mathrm{Im}\left(\frac{E_\rho(\sigma w_1)}{\sqrt{s}w_1}\right), \quad w_1 = i\sqrt{s} + y_n - x_n, \tag{2.5}$$

$$a_n = \begin{cases} (-1)^l 2^{-1}(l-2)!(n-2)\omega_n, & n = 2l, \quad l \geqslant 2, \\ (-1)^l 2^{-1}(2l-3)!!(n-2)\pi\omega_n, & n = 2l+1, \quad l \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.5a}$$

i – мнимая единица, $E_\rho(w)$ – целая функция Миттаг-Лёффлера.

В работе [3] доказаны следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Функция Φ, определённая формулами (2.4), (2.5), представима в виде*

$$\Phi(x-y,\sigma) = \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)} + \gamma(x-y,\sigma), \tag{2.6}$$

где γ – гармоническая функция по переменной y, включая $y = x$.

Лемма 2.2. *Пусть E – компакт в K_ρ, δ – расстояние от E до ∂K_ρ. Тогда для $n \geqslant 3$, $\sigma \geqslant 0$ при $x \in E$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash K_\rho$ справедливы неравенства*

$$|\Phi(x-y,\sigma)| + \left|\frac{\partial}{\partial y_k}\Phi(x-y,\sigma)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\Phi(x-y,\sigma)\right| \leqslant \frac{C_1(\rho,\delta,n)r}{1+\sigma\delta}, \quad k,j=\overline{1,n}, \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi(x-y,\sigma)}{\partial\sigma}\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial y_k}\Phi(x-y,\sigma)\right| + \left|\frac{\partial^3}{\partial\sigma\partial x_j\partial y_k}\Phi(x-y,\sigma)\right| \leqslant \frac{C_2(\rho,\delta,n)r}{1+\sigma^2\delta^2}, \quad k,j=\overline{1,n}, \tag{2.8}$$

где постоянные C_j не зависят от x, y и σ.

Воспользовавшись этими утверждениями, докажем, что справедлива

Лемма 2.3. *Пара $((G_k^m),\vec{r})$, состоящая из матрицы (G_k^m) и вектора $\vec{r}$, определённых равенствами (2.3)–(2.5), является "матрицей" Карлемана для задачи (1.1)–(1.3).*

Доказательство. В силу равенств (2.3)–(2.6) имеем

$$G_k^m(x-y,\sigma) = -\frac{1}{8\pi\nu}\left(\delta_{km}\left(\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}+\gamma(x-y,\sigma)\right)+(x_m-y_m)\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}+\gamma(x-y,\sigma)\right)\right) =$$

$$= u_k^m(x-y) + g_k^m(x,y,\sigma),$$

$$r^m(x-y,\sigma) = -\frac{\partial}{\partial y_m}\left(\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}+\gamma(x-y,\sigma)\right) = q^m(x-y)+g^m(x,y,\sigma).$$

Здесь мы воспользовались формулами Лоренца

$$u_k^m(x-y) = -\frac{1}{2\nu\omega_n(n-2)}(\delta_{km}r^{2-n}+(n-2)(x_k-y_k)(x_j-y_j)r^{-n}),$$

$$q^m(x-y) = -\frac{1}{\omega_n}(x_m-y_m)r^{-n}$$

для основного сингулярного решения $((u_k^m),\ q^m)$ в многомерном пространстве. В трёхмерном пространстве формулы Лоренца приведены в [10, с. 70].

Докажем, что при каждом $m=\overline{1,n}$ пара $(\vec{g}^m, g^m)$, состоящая из вектор-функции $\vec{g}^m$ с компонентами

$$g_k^m(x-y,\sigma) = -\frac{1}{2\nu}\left[\delta_{km}\gamma(x-y,\sigma)+(x_m-y_m)\frac{\partial}{\partial y_k}\gamma(x-y,\sigma)\right], \quad k=\overline{1,n},$$

и функции $g^m(x-y,\sigma) = -\dfrac{\partial}{\partial y_m}\gamma(x-y,\sigma)$, удовлетворяет по переменной y в каждой ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, включая точку $y=x$, сопряжённой л.с.с.у. Н–С. В самом деле,

$$\frac{\partial g_k^m}{\partial y_k} = -\frac{1}{2\nu}\left(\delta_{km}\frac{\partial\gamma}{\partial y_k}-\delta_{km}\frac{\partial\gamma}{\partial y_k}+(x_m-y_m)\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_k^2}\right) = \frac{x_m-y_m}{2\nu}\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_k^2},$$

$$\frac{\partial g_k^m}{\partial y_i} = -\frac{1}{2\nu}\left(\delta_{km}\frac{\partial\gamma}{\partial y_i}-\delta_{im}\frac{\partial\gamma}{\partial y_k}+(x_m-y_m)\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_k\partial y_i}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g_k^m}{\partial y_i^2} = -\frac{1}{2\nu}\left(\delta_{km}\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_i^2}-2\delta_{im}\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_k\partial y_i}+(x_m-y_m)\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_i^2}\right),$$

$$\frac{\partial g^m}{\partial y_k} = -\frac{\partial^2\gamma}{\partial y_m\partial y_k}.$$

Отсюда в силу гармоничности функции γ следует, что функции g_k^m, $k=\overline{1,n}$, и g^m удовлетворяют сопряжённой л.с.с.у. Н–С, т.е.

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g_k^m}{\partial y_i^2}+\frac{\partial g^m}{\partial y_k}=0.$$

Следовательно, для функций G_k^m и r^m имеют место представления (2.1), где функции g_k^m, $k=\overline{1,n}$, и g^m удовлетворяют по переменной y сопряжённой системе Навье–Стокса, включая точку $y=x$. Из формул (2.3)–(2.5) и неравенства (2.8) получаем следующие оценки:

$$\int\limits_{\partial D_\rho\setminus S}(|G_k^m|+|T'_{ij}(\vec{G}^m,r^m)_y|)\,ds_y\leqslant\frac{A_1(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta},$$

$$\int\limits_{\partial D_\rho\setminus S}\left(|r^m|+\left|\frac{\partial r^m}{\partial x_k}\right|\right)ds_y\leqslant\frac{A_1(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta},\quad x\in E. \tag{2.9}$$

Таким образом, неравенства (2.2) выполняются с $\varepsilon_l(x,\sigma)\leqslant\dfrac{A_1(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta}$, $x\in E$, $l=1,2$. Лемма доказана.

3. Формула Карлемана. Из леммы 2.3 вытекает, что для регулярного решения $(\vec{v},p)\in\in N(D_\rho)$ системы (1.1) в области D_ρ, справедливы следующие интегральные формулы Грина [10, с. 72]:

$$v_m(x)=\int\limits_{\partial D_\rho}\sum_{i,j=1}^{n}(T'_{ij}(\vec{G}^m,r^m)_y v_i(y)N_j(y)-\vec{G}^m T_{ij}(\vec{v},p)N_j)\,ds_y,\quad m=\overline{1,n},$$

$$p(x)=-\int\limits_{\partial D_\rho}\sum_{m,j=1}^{n}\left(r^m T_{mj}(\vec{v},p)N_j(y)+2\nu\frac{\partial r^m}{\partial x_j}v_m N_j(y)\right)ds_y,\quad x\in D_\rho, \tag{3.1}$$

где в $T'_{ij}(\vec{u}^m,q)_y$ индекс y показывает, что дифференцирование в T'_{ij} ведётся по y, для упрощения записи аргументы в подынтегральных функциях опущены.

Положим

$$v_m^\sigma(x)=\int\limits_S\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}T'_{ij}(\vec{G}^m,r^m)_y f_i N_j(y)-G_i^m h_j(y)\right)ds_y,\quad m=\overline{1,n},$$

$$p^\sigma(x)=-\int\limits_S\sum_{m=1}^{n}\left(r^m h_m(y)+2\nu f_m\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r^m}{\partial x_j}N_j(y)\right)ds_y. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть $(\vec{v},p)\in N(D_\rho)$ и $\vec{v}(y)=\vec{f}(y)$, $T(\vec{v}(y),p(y))=\vec{h}(y)$, $y\in S$, где $\vec{f}(y)$ и $\vec{h}(y)$ – заданные вектор-функции классов $C^1(S)$ и $C(S)$ соответственно. Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:*

$$v_m(x)=\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}T'_{ij}(\vec{G}^m,r^m)_y f_i(y)N_j(y)-G_i^m h_j(y)\right)ds_y,\quad m=\overline{1,n},$$

$$p(x)=-\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S\sum_{i=1}^{n}\left(r^i h_i(y)+2\nu f_i(y)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r^i}{\partial x_j}N_j(y)\right)ds_y,\quad x\in D_\rho, \tag{3.3}$$

и

$$v_m(x) = \int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(\sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{u}^{\,m}, q^m)_y f_i(y) N_j(y) - u_i^m h_j(y)\biggr)\, ds_y + \int\limits_0^\infty F^m(x,\sigma)d\sigma, \quad m = \overline{1,n},$$

$$p(x) = -\int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(q^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q^i}{\partial x_j} N_j(y)\biggr)\, ds_y - \int\limits_0^\infty P(x,\sigma)d\sigma, \quad x \in D_\rho, \tag{3.4}$$

где

$$T'_{ij}(\vec{u}^{\,m}, q^m) = \delta_{ij} q^m + \nu\biggl(\frac{\partial u_i^m}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^m}{\partial y_i}\biggr),$$

$$F^m(x,\sigma) = \int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(\sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{\Omega}^m, R^m)_y f_i(y) N_j(y) - \Omega_i^m h_j(y)\biggr)\, ds_y,$$

$$P(x,\sigma) = -\int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(R^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial R^i}{\partial x_j} N_j(y)\biggr)\, ds_y, \tag{3.5}$$

$$\Omega_i^m(x-y,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma} G_i^m(x-y,\sigma), \quad R^i(x-y,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma} r^m(x-y,\sigma), \quad m = \overline{1,n}. \tag{3.5a}$$

Доказательство. В силу формул (3.1) и (3.2) получаем

$$v_m(x) - v_m^\sigma(x) = \int\limits_{\partial D_\rho \setminus S} \sum_{i,j=1}^n (T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y v_i(y) N_j(y) - G_i^m T_{ij}(\vec{v}, p) N_j(y))\, ds_y,$$

$$p(x) - p^\sigma(x) = -\int\limits_{\partial D_\rho \setminus S} \sum_{m,j=1}^n \biggl(r^m T_{mj}(\vec{v}, p) N_j(y) + 2\nu \frac{\partial r^m}{\partial x_j} v_m N_j(y)\biggr)\, ds_y. \tag{3.6}$$

Из оценок (2.9) и представлений (3.6) следует, что для любого компактного множества $E \in D_\rho$ и $x \in E$ выполняются оценки

$$|v_m^\sigma(x) - v_m(x)| \leqslant c\frac{A_1(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta}, \quad |p^\sigma(x) - p(x)| \leqslant c\frac{A_1(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta},$$

где $c = \mathrm{const}$, из которых и вытекает справедливость формул (3.3).

Покажем эквивалентность формул (3.3) и (3.4). Вследствие равенств (3.5a) запишем формулы (3.4) в виде

$$v_m(x) = \int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(\sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{u}^{\,m}, q^m)_y f_i(y) N_j(y) - u_i^m h_j(y)\biggr)\, ds_y +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\sigma}\biggl\{\int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(\sum_{j=1}^n T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y f_i(y) N_j(y) - G_i^m h_j(y)\biggr)\, ds_y\biggr\} d\sigma,$$

$$p(x) = -\int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(q^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial x_j} N_j(y)\biggr)\, ds_y -$$

$$- \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\sigma}\biggl\{\int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(r^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial r^i}{\partial x_j} N_j(y)\biggr)\, ds_y\biggr\} d\sigma. \tag{3.7}$$

Так как на основании формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} d\sigma = \Phi(\infty) - \Phi(0),$$

то представления (3.7) приводят к формулам (3.3). Теорема доказана.

Формулы (3.3) и (3.4) представляют собой аналог формулы Карлемана для л.с.с.у. Н–С и дают решение задачи А.

Переходя к рассмотрению задачи Б, обозначим через S_0 поверхность S, из которой удалён край.

Теорема 3.2. *Пусть* $S \in C^2$, $\vec{f}(y) \in C^1(S_0)\bigcap L(S)$, $\vec{h}(y) \in C(S_0)\bigcap L(S)$. *Для того чтобы существовала пара* $(\vec{v}, p)$, *где*

$$\vec{v} \in C^2(D_\rho)\bigcap C^1(D_\rho \bigcup S_0)\bigcap L(S), \quad p \in C^1(D_\rho)\bigcap C(D_\rho \bigcup S_0)\bigcap L(S),$$

удовлетворяющая в области D_ρ *л.с.с.у. Н–С, такая, что*

$$\vec{v}(y) = \vec{f}(y), \quad T(\vec{v}(y), p(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y), \quad y \in S_0,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in D_\rho$ *сходились несобственные интегралы (равномерно на компактах из* K_ρ*):*

$$\left|\int_0^\infty F^m(x,\sigma)d\sigma\right| < \infty, \quad \left|\int_0^\infty P(x,\sigma)d\sigma\right| < \infty. \tag{3.8}$$

Если условия (3.8) выполнены, то продолжение осуществляется эквивалентными формулами (3.3) и (3.4).

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор-функция $\vec{v}$ и функция p, указанные в формулировке теоремы, существуют. Пусть компакт E и число $\varepsilon > 0$ таковы, что $E \subset \overline{K}_\rho^{2\varepsilon} \subset \subset \overline{K}_\rho^{\varepsilon} \subset K_\rho$, где $\overline{K}_\rho^{\varepsilon} = \{y : |y'| \leqslant \tau(y_n - \varepsilon),\ y_n \geqslant \varepsilon\}$. Из леммы 2.2 следует, что при $y \in \mathbb{R}^n \backslash K_\rho^\varepsilon$ и $x \in E$ для функции $\Phi(x-y,\sigma)$ справедливы оценки (2.7), (2.8), в которых $\delta \geqslant \varepsilon\tau$. Обозначим $S_\varepsilon = \overline{K}_\rho^{\varepsilon}\bigcap S$, при этом часть $S_\varepsilon \subset S$ в объединении с частью T_ε поверхности конуса $\partial K_\rho^\varepsilon$ представляет собой замкнутую кусочно-гладкую поверхности $S_\varepsilon \bigcup T_\varepsilon$, являющуюся границей односвязной ограниченной области. Интегралы в правой части формул (3.5) представимы в виде суммы двух интегралов согласно разбиению $S = S_\varepsilon \bigcup (S \backslash S_\varepsilon)$.

Так как функция $\partial\Phi(x-y,\sigma)/\partial\sigma$ является регулярной гармонической, то из леммы 2.3 вытекает, что пара, состоящая из матрицы (Ω_i^m) и вектора $\vec{R}$, определённых равенствами (3.5а), является регулярным решением системы (1.1) во всём пространстве. В силу формулы Грина для л.с.с.у. Н–С интегралы по части S_ε равны интегралам по T_ε. При $y \in T_\varepsilon$, $x \in E$ для элементов матрицы (Ω_i^m) и функции R^m справедливы неравенства (2.8) и продолженные функции $\vec{v}(y)$, $p(y)$ вместе со своими частными производными ограничены постоянным числом, зависящим от ε.

Имеют место неравенства

$$\left|\int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n T'_{ij}(\Omega_i^m, R^m)_y f_i(y) N_j(y) - \Omega_i^m h_i(y)\right) ds_y\right| \leqslant \frac{\text{const}}{1+\delta^2\sigma^2}, \quad m = \overline{1,n},$$

$$\left|\int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(R^i h_i(y) + 2\nu f_i(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial R^i}{\partial x_j} N_j(y)\right) ds_y\right| \leqslant \frac{\text{const}}{1+\delta^2\sigma^2}$$

с постоянной, зависящей от $\rho,\ \varepsilon,\ \delta$ и диаметра области D_ρ. Так как $|y| \leqslant \tau(y_n - \varepsilon),\ y_n \geqslant \varepsilon,$ когда $y \in S \backslash S_\varepsilon$ и $x \in E,$ и по условию $\vec{f}(y), \vec{h}(y) \in C(S_0) \bigcap L(S),$ то последние неравенства сохраняются (с другими постоянными) и для модуля интегралов по части $S \backslash S_\varepsilon$. Отсюда следует условие (3.8).

Достаточность. Пусть для вектор-функций $\vec{f} \in C^1(S_0) \bigcap L(S),\ \vec{h} \in C(S_0) \bigcap L(S)$ выполняется условие (3.8). Покажем, что существует пара $(\vec{v}, p),$ удовлетворяющая в области D_ρ системе (1.1), $\vec{v} \in C^2(D_\rho) \bigcap C^1(D_\rho \bigcup S_0) \bigcap L(S),\ p \in C^1(D_\rho) \bigcap C(D_\rho \bigcup S_0) \bigcap L(S)$ такая, что $\vec{v}(y) = \vec{f}(y),\ T(\vec{v}(y), p(y))N(y) = \vec{h}(y),\ y \in S_0$.

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{v}(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ и функцию $p(x)$, определяемые двумя эквивалентными формулами (3.3) или (3.4). Интегралы в первых слагаемых в правой части формул (3.4) являются интегралами типа Коши–Грина для л.с.с.у. Н–С. Эти интегралы задают две пары функций $(\vec{v}^{\,-}(x), p^-(x)),\ (\vec{v}^{\,+}(x), p^+(x)),$ из которых первая является решением системы (1.1) в области $D_\rho,$ а вторая пара удовлетворяет уравнениям (1.1) в области $K_\rho \backslash \overline{D}_\rho$. Из теории гидродинамических потенциалов [10, с. 78] следует, что при $y \in S_0$ имеют место равенства

$$[\vec{v}^{\,-}(y)]_{\rm int} - [\vec{v}^{\,+}(y)]_{\rm ext} = \vec{f}(y),$$

$$[T(\vec{v}^{\,-}(y), p^-(y))\vec{N}(y)]_{\rm int} - [T(\vec{v}^{\,+}(y), p^+(y))\vec{N}(y)]_{\rm ext} = \vec{h}(y), \tag{3.9}$$

где через $[\vec{v}^{\,-}(y)]_{\rm int}$ и $[\vec{v}^{\,+}(y)]_{\rm ext}$ обозначены предельные значения вектор-функций $\vec{v}^{\,-}(x)$ и $\vec{v}^{\,+}(x)$ соответственно при $x \to y\ \ (x \in D_\rho)$ и $x \to y\ \ (x \in G_\rho \backslash \overline{D}_\rho)$. Такой же смысл имеют обозначения во втором из равенств в (3.9).

Функция $\partial\Phi(x-y,\sigma)/\partial\sigma$ является по переменной x регулярной гармонической функцией во всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Повторяя доказательство леммы 2.3, нетрудно показать, что пара, состоящая из матрицы (Ω_i^m) и вектора $\vec{R},$ является регулярным решением системы (1.1) во всём пространстве $\mathbb{R}^n$. В силу условий (3.8) отсюда следует, что вторые слагаемые в формулах (3.4) удовлетворяют уравнениям (1.1) в области K_ρ.

Итак, правая часть формул (3.4) задаёт две пары функций $(\vec{V}^-, P^-)$ и $(\vec{V}^+, P^+),$ которые соответственно в областях D_ρ и $K_\rho \backslash \overline{D}_\rho$ удовлетворяют уравнениям (1.1). При $y \in S_0$ имеют место равенства

$$(\vec{V}^-(y))_{\rm int} - (\vec{V}^+(y))_{\rm ext} = \vec{f}(y),$$

$$[T(\vec{V}^-(y), p^-(y))\vec{N}(y)]_{\rm int} - [T(\vec{V}^+(y), p^+(y))\vec{N}(y)]_{\rm ext} = \vec{h}(y), \tag{3.9a}$$

причём если одна из этих пар непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0 вместе с напряжением, то другая также обладает этим свойством.

Если $x_n > \max\limits_{y\in S} y_n = x_n^0,\ x \in K_\rho,$ то $y_n - x_n < 0$ и из свойств функции Миттаг-Лёффлера вытекает, что для функции $\Phi(x-y,\sigma)$ и её производных справедливы неравенства (2.7). Отсюда следует, что “матрица” Карлемана, определяемая равенствами (2.3)–(2.5), при $x_n > x_n^0,\ x \in K_\rho,$ удовлетворяет неравенствам:

$$\int\limits_S (|G_k^m| + |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y|)\, ds_y \leqslant \frac{A_2(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta},$$

$$\int\limits_S \left(|r^m| + \left|\frac{\partial r^m}{\partial x_k}\right|\right) ds_y \leqslant \frac{A_3(\rho,\delta,n)}{1+\sigma\delta}. \tag{3.10}$$

В силу формул (3.3), которые эквивалентны формулам (3.4), и неравенств (3.10) заключаем, что при $x_n > \max\limits_{y\in S} y_n,\ x \in K_\rho,$ имеют место следующие равенства:

$$\vec{V}^+(x) = 0, \quad P^+(x) = 0, \quad T(\vec{V}^+(x), P^+(x)) = 0. \tag{3.11}$$

Так как пара $(\vec{V}^+(x), P^+(x))$ удовлетворяет системе уравнений (1.1) в области $K_\rho \backslash \overline{D}_\rho$, то вектор-функция $\vec{V}^+(x)$ и функция $P^+(x)$ являются вещественно-аналитическими в этой области. В силу свойства единственности аналитического продолжения [13, с. 147] из равенств (3.11) вытекают тождества

$$\vec{V}^+(x) \equiv 0, \quad P^+(x) \equiv 0, \quad T(\vec{V}^+(x), P^+(x)) \equiv 0, \quad x \in K_\rho \backslash \overline{D}_\rho,$$

из которых следует, что

$$\vec{V}^+(y) \equiv 0, \quad P^+(y) \equiv 0, \quad T(\vec{V}^+(y), P^+(y))\vec{N}(y) \equiv 0, \quad y \in S_0.$$

Отсюда в силу равенств (3.9a) получаем

$$\vec{V}^-(y) = \vec{f}(y), \quad T(\vec{V}^-(y), P^-(y))\vec{N}(y) = \vec{h}(y), \quad y \in S_0. \tag{3.12}$$

Теперь вследствие равенств (3.14) для завершения доказательства достаточности в качестве искомой пары $(\vec{v}, p)$ нужно взять пару $(\vec{V}^-, P^-)$. Теорема доказана.

4. Регуляризация. Проведём регуляризацию решения задачи Коши (задача A) для области $D_1 \subset \mathbb{R}^n$. Матрица Карлемана для области D_1 определяется равенствами (2.3), в которых функция Φ определяется следующим образом:

если $n = 2l + 1$, $l \geqslant 1$, то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{\exp(\sigma w)}{w}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_n - x_n, \tag{4.1}$$

если $n = 2l$, $l \geqslant 2$, то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \frac{\partial^{l-2}}{\partial s^{l-2}} \operatorname{Im}\left(\frac{\exp(\sigma w_1)}{\sqrt{s} w_1}\right), \quad w_1 = i\sqrt{s} + y_n - x_n, \tag{4.2}$$

постоянная a_n определяется формулой (2.5a). Функцию $\Phi(x - y, \sigma)$ после отделения мнимой части можно записать в следующем виде:

если $n = 2l + 1$, $l \geqslant 1$, то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \exp(\sigma y_n - \sigma x_n) \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}}\left(-\frac{1}{u^2 + r^2} \cos \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} + \frac{y_n - x_n}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \sin \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}\right) du, \tag{4.1a}$$

если $n = 2l$, $l \geqslant 2$, то

$$a_n \Phi(x - y, \sigma) = \exp(\sigma y_n - \sigma x_n) \frac{\partial^{l-2}}{\partial s^{l-2}}\left(\frac{1}{r^2}\left(\cos \sigma\alpha + \frac{y_n - x_n}{\sigma} \sin \sigma\alpha\right)\right). \tag{4.2a}$$

Как следует из леммы 2.3, для функций G_k^m и r^m, определённых равенствами (2.3), (4.1), (4.2), имеют место представления (2.1), в которых функции g_k^m и g^m удовлетворяют по переменной y сопряжённой л.с.с.у. Н–С во всём пространстве, включая точку $y = x$. Поэтому функции G_k^m, r^m и их производные оцениваются через $|x - y|^{-k}$ по порядку также, как и компоненты основного сингулярного решения. Для матрицы Грина и её производных такие оценки в трёхмерном пространстве приведены в [11, с. 88]. Из формул (2.3), (4.1), (4.2), (2.6) получаем неравенства

$$\int\limits_{\partial D_1 \backslash S} (|G_k^m| + |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y|)\, ds_y \leqslant cc_1(x)\psi_n(\sigma)\exp(-\sigma x_n),$$

$$\int\limits_{\partial D_1\backslash S}\left(|r^m|+\left|\frac{\partial r^m}{\partial x_k}\right|\right)ds_y\leqslant cc_2(x)\psi_n(\sigma)\exp(-\sigma x_n),\quad x\in D_1, \tag{4.3}$$

$$\int\limits_S(|G_k^m|+|T'_{ij}(\vec{G}^m,r^m)_y|)\,ds_y\leqslant cc_1(x)\psi_n(\sigma)\exp(\sigma x_n^0-\sigma x_n),$$

$$\int\limits_S\left(|r^m|+\left|\frac{\partial r^m}{\partial x_k}\right|\right)ds_y\leqslant cc_2(x)\psi_n(\sigma)\exp(\sigma x_n^0-\sigma x_n),\quad x\in D_1, \tag{4.4}$$

где

$$\psi_n(\sigma)=\begin{cases}\sigma^l, & n=2l,\\ \sigma^{l+1}, & n=2l+1,\end{cases}\qquad c=\mathrm{const},\quad c_k(x)=\int\limits_{\partial D_1}\frac{ds_y}{|x-y|^{k+n-2}}.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $(\vec{v},p)\in N(D_1)$ *и* $\vec{v}(y)=\vec{f}(y)$, $T(\vec{v}(y),p(y))\vec{N}(y)=\vec{h}(y)$, *где* $\vec{f}(y)$ *и* $\vec{h}(y)$ *– заданные вектор-функции классов* $C^1(S)$ *и* $C(S)$ *соответственно. Пусть вместо* $\vec{f}(y)$ *и* $\vec{h}(y)$ *заданы их приближения – вектор-функции* $\vec{f}^{\,\delta}(y)$ *и* $\vec{g}^{\,\delta}(y)$ *класса* $C(S)$ *соответственно, такие, что*

$$\max_{\overline{S}}|f_k(y)-f_k^\delta(y)|+\max_{\overline{S}}|h_k(y)-h_i^\delta(y)|\leqslant\delta,\quad k=\overline{1,n},$$

где $\delta\in(0,1)$, *и определены функции*

$$v_m^{\sigma\delta}(x)=\int\limits_S\sum_{i,j=1}^n T'_{ik}(\vec{G}^m,r)_y f_i^\delta(y)N_k(y)\,ds_y-\int\limits_S\sum_{i=1}^n G_i^m h_i^\delta(y)\,ds_y,\quad m=\overline{1,n},$$

$$p^{\sigma\delta}(x)=-\int\limits_S\sum_{m=1}^n\left(r^m h_m^\delta+2\nu f_m^\delta\sum_{j=1}^n\frac{\partial r^m}{\partial x_j}N_j(y)\right)ds_y,\quad x\in D_1, \tag{4.5}$$

где $\sigma=(-\ln\delta)/x_n^0$.

Если $|v_i(y)|+|T_{ij}(\vec{v}(y)p(y))|\leqslant 1$, $y\in\partial D_1/S$, $i,j=\overline{1,n}$, *то при любом* $x\in D_1$ *справедливы неравенства*

$$|v_m^{\sigma\delta}(x)-v_m(x)|\leqslant Ac_1(x)\delta^{x_n/x_n^0}\psi_n(-\ln\delta),\quad |p^{\sigma\delta}(x)-p(x)|\leqslant Ac_2(x)\delta^{x_n/x_n^0}\psi_n(-\ln\delta).$$

Доказательство. Из формул (3.1) и определения (4.5) для любого $x\in D_1$ вытекают равенства

$$v_m^{\sigma\delta}(x)-v_m(x)=\int\limits_S\sum_{i,j=1}^n T'_{ik}(\vec{G}^m,r^m)_y(f_i^\delta(y)-f_i(y))N_j(y)\,ds_y-$$

$$-\int\limits_S\sum_{i=1}^n G_i^m(h_i^\delta(y)-h_i(y))\,ds_y+\int\limits_{\partial D_1\backslash S}\sum_{i,j=1}^n(G_i^m T'_{ij}(\vec{v},p)N_j(y)-T'_{ij}(\vec{G}^m,r^m)_y v_i(y)N_j(y))\,ds_y,$$

$$p^{\sigma\delta}(x)-p(x)=-\int\limits_S\sum_{m=1}^n r^m(h_m^\delta(y)-h_m(y))\,ds_y-2\nu\int\limits_S\sum_{m,j=1}^n\frac{\partial r^m}{\partial x_j}N_j(y)(f_m^\delta(y)-f_m(y))\,ds_y+$$

$$+\int\limits_{\partial D_1\backslash S}\sum_{m,j=1}^n\left(r^m T_{mk}(\vec{v},p)N_j(y)+2\nu\frac{\partial r^m}{\partial x_j}v_m(y)N_j(y)\right)ds_y.$$

Отсюда получаем, что

$$|v_m^{\sigma\delta}(x) - v_m(x)| \leqslant \delta \int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(|G_i^m| + \sum_{j=1}^n |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y| \biggr) \, ds_y +$$

$$+ \int\limits_{\partial D_1 \setminus S} \sum_{i=1}^n \biggl(|G_i^m| + \sum_{j=1}^n |T'_{ij}(\vec{G}^m, r^m)_y| \biggr) \, ds_y,$$

$$|p^{\sigma\delta}(x) - p(x)| \leqslant \delta \int\limits_S \sum_{i=1}^n \biggl(|r^m| + 2\nu \sum_{j=1}^n \biggl| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \biggr| \biggr) \, ds_y +$$

$$+ \int\limits_{\partial D_1 \setminus S} \sum_{i=1}^n \biggl(|r^m| + 2\nu \sum_{j=1}^n \biggl| \frac{\partial r^m}{\partial x_k} \biggr| \biggr) \, ds_y, \quad x \in D_1. \tag{4.6}$$

В силу неравенств (4.3), (4.4) и (4.6) справедливы оценки

$$|v_m^{\sigma\delta}(x) - v_m(x)| \leqslant c_1(x)\psi_n(\sigma)(1 + \delta \exp(\sigma x_n^0)) \exp(-\sigma x_n),$$

$$|p^{\sigma\delta}(x) - p(x)| \leqslant c_2(x)\psi_n(\sigma)(1 + \exp(\sigma x_n^0)) \exp(-\sigma x_n), \quad x \in D_1,$$

из которых, так как $\sigma = (-\ln\delta)/x_n^0$, следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carleman T.* Les functions quasi analytiques. Paris, 1926.
2. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
3. *Ярмухамедов Ш.* Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 33. № 3. С. 702–719.
4. *Шлапунов А.А.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 3. 205–215.
5. *Tarkhanov N.N.* The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations. Berlin, 1995.
6. *Фок В.А., Куни Ф.М.* О введении “гасящей” функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 6. С. 1195–1198.
7. *Ишанкулов Т.* О задаче Коши для линейной стационарной системы Навье–Стокса // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 1089–1097.
8. *Ишанкулов Т.* О продолжении решения линейной стационарной системы уравнений Навье–Стокса // Докл. АН РУз. 2007. № 3. С. 4–8.
9. *Арбузов Э.В.* Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 6. С. 727–730.
10. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
11. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
12. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
13. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.
После доработки 16.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.