ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1164–1169

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22+517.983.54

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В БЕСФАЗНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2021 г. М. Ю. Кокурин

Устанавливается единственность решения обратной задачи для уравнения Гельмгольца, в которой разыскивается коэффициент рефракции, описывающий свойства ограниченной неоднородности волновой среды. Исходными данными для определения искомого коэффициента служат модули решений, соответствующих либо точечным источникам, сосредоточенным на отрезке, либо источникам, распределённым сферически симметрично с центрами на отрезке. Измерения волнового поля производятся в плоской области, не пересекающей область локализации неоднородности.

DOI: 10.31857/S0374064121090028

1. Постановка задачи. Основным объектом изучения в работе является обратная задача рассеяния для обобщённого уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2 n(x) u(x) = -\delta(x-q), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

дополненного условием излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \quad r = |x|. \tag{2}$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака, k – волновое число, которое в постановке задачи принимает положительные значения, $q \in \mathbb{R}^3$. Предполагается, что коэффициент рефракции $n(x)$ тождественно равен единице при $x \in \mathbb{R}^3\backslash\Omega$ и принадлежит классу $L_\infty(\Omega)$, где Ω – заданная ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Решение задачи (1), (2) описывает скалярное гармоническое по времени волновое поле $U(x,t) = \mathrm{Re}\,(e^{-ikt}u(x))$ в неоднородной среде, инициированное точечным гармоническим по времени источником и характеризуемое комплексной амплитудой $u(x)$.

Классическая постановка обратной задачи рассеяния для системы (1), (2) состоит в восстановлении функции $n(x)$, $x \in \Omega$, по известным значениям решения $u = u(x;q,k)$ задачи (1), (2) при $x \in D_q$, $q \in Q$, $k \in [k_1,k_2]$ для подходящих множеств $\{D_q\}_{q\in Q}$, $Q \subset \mathbb{R}^3$ и выбранных значений $0 < k_1 \leqslant k_2$. Здесь D_q – множество детекторов рассеянного волнового поля, инициированного источником в точке $x = q$, Q – множество точечных зондирующих источников. Обычно предполагается, что $(Q\bigcup(\bigcup_{q\in Q} D_q))\bigcap\overline{\Omega} = \varnothing$, т.е. что зондируемая область Ω недоступна для непосредственных измерений. Обратной задаче рассеяния в такой и близких постановках при различных способах выбора множеств источников и детекторов посвящено значительное число публикаций (см. монографии [1, 2] и приведённую в них библиографию).

Часто в качестве входных данных обратной задачи выступает амплитуда рассеяния в дальней зоне, представляющая собой главный член асимптотики $u(x;q,k)$ при $|x| \to \infty$. При этом источником волнового поля может быть также приходящая плоская волна. Неоднократно отмечалось, что для многих прикладных постановок экспериментальное измерение комплексной величины $u(x;q,k)$, подразумевающее получение как модуля (амплитуды) $|u(x;q,k)|$, так и фазы $\arg u(x;q,k)$ волнового поля, является весьма ограничительным требованием. Во многих случаях экспериментально доступно измерение лишь амплитуды рассеянного неоднородностью сигнала, т.е. значение $|u(x;q,k)|$. В связи с этим ниже, следуя [3–8], рассмотрим именно задачу реконструкции функции $n(x)$, $x \in \Omega$, по известной амплитуде $|u(x;q,k)|$ волнового поля, где $x \in D_q$, $q \in Q$, $k \in [k_1, k_2]$, $0 < k_1 < k_2$. Нас интересует возможность однозначного восстановления этой функции при наличии указанных данных.

Коэффициентным обратным задачам в такой постановке в последнее время уделяется растущее внимание. Характерная их особенность заключается в том, что при наличии полной информации о $u(x;q,k)$ для $x \in D_q$, $q \in Q$, $k \in [k_1, k_2]$ теоремы единственности, как правило, известны, см. [1, 2]. При этом часто можно обойтись данными рассеяния с единственным значением волнового числа $k = k_1 = k_2$. Непосредственный способ доказательства единственности в бесфазных обратных задачах сводится к восстановлению фазы $\arg u(x;q,k)$ волнового поля по заданной величине $|u(x;q,k)|$ с последующим применением указанных теорем единственности (см., например, [3, 4]). В перечисленных и других известных работах выполняются равенства $\dim D_q = \dim Q = 2$. Таким образом, размерность пространственного носителя данных $\{(x,q) : x \in D_q,\ \ q \in Q\}$ равна четырём и превышает $\dim D = 3$ размерность носителя зондируемой неоднородности. В этом смысле исследуемая постановка обратной задачи является *пространственно переопределённой.*

В настоящей заметке используется альтернативный подход, состоящий в аналитическом продолжении функции $|u(x;q,k)|^2$ по комплексному параметру k в окрестность значения $k = 0$. Предельная функция $u(x;q,0)$ является вещественнозначной, что снимает необходимость решения вспомогательной проблемы восстановления фазы. Одновременно показывается, что размерность носителя пространственных данных обратной задачи может быть понижена до трёх, что устраняет упомянутую выше пространственную переопределённость. Формулировке и доказательству этого результата посвящён п. 2. В п. 3 аналогичный результат устанавливается для уравнения вида (1), правая часть которого описывает распределённый сферически симметричный источник.

2. Сосредоточенный источник. Уточним постановку рассматриваемой в работе обратной задачи и сформулируем основной результат, относящийся к уравнению (1). Как известно [2, § 8.2], задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = k^2 \int\limits_{\Omega} \Phi(x - x'; k)(n(x') - 1)u(x')\,dx' + \Phi(x - q; k), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $\Phi(x;k) = e^{ik|x|}/(4\pi|x|)$.

При условии $n \in L_\infty(\Omega)$ интегральный оператор в правой части уравнения (3) вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Omega)$ для любого $k \in \mathbb{C}$ [9, с. 158], при этом правая часть (3) аналитически зависит от параметра k. Как и в [2, теоремы 8.4, 8.7], устанавливается, что задача (3) (а значит, и (1), (2)) однозначно разрешима для всех вещественных $k \geqslant 0$ и для комплексных k, у которых $|k| \leqslant \delta$ с достаточно малым $\delta > 0$. При этом $u(\cdot\,;q,k) \in H^2(\Omega')$ для любой области Ω', не содержащей точки q [10, с. 177; 11, с. 229]. Из теоремы о голоморфных семействах фредгольмовых операторов [2, § 8.5; 12, с. 141] следует, что функция $u(x;q,k)$ при $x \neq q$ голоморфно продолжима по k в окрестность положительной вещественной полуоси. Поэтому при $x \neq q$ функция

$$|u(x;q,k)|^2 = \mathrm{Re}^2 u(x;q,k) + \mathrm{Im}^2 u(x;q,k)$$

вещественно аналитична по $k > -\delta$.

Обозначим $\Pi = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L} = \{(0,0,x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$ и предположим, что замыкание $\overline{\Omega}$ не пересекает плоскость Π и прямую $\mathcal{L}$. Пусть также $\mathcal{D}$ – замкнутая область в Π, $\mathcal{I}$ – отрезок положительной длины, лежащий на $\mathcal{L}$, $\mathcal{D} \bigcap \mathcal{I} = \varnothing$. Рассмотрим обратную задачу, которую назовём задачей *P1* и которая заключается в восстановлении функции $n \in L_\infty(\Omega)$ по набору данных

$$\{|u(x;q,k)| : x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I}, \quad k \in [k_1, k_2]\}, \tag{4}$$

где $0 < k_1 < k_2$. Для того чтобы подчеркнуть зависимость решения $u(x;q,k)$ задачи (1), (2) ещё и от функции n, для него будем использовать обозначение $u_n(x;q,k)$.

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [13] и в более общем виде в [14].

Теорема 1. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$*, замыкание которой не пересекает прямую* $\mathcal{L}$*. Тогда линейные комбинации функций семейства*

$$\{u(x)/|x-z| : z \in \mathcal{L}; \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \Delta u = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega\}$$

плотны в пространстве $L_2(\Omega)$.

Единственность решения обратной задачи *P1* устанавливает

Теорема 2. *Если для некоторых функций* $n_1, n_2 \in L_\infty(\Omega)$ *выполняется равенство*

$$|u_{n_1}(x;q,k)| = |u_{n_2}(x;q,k)| \quad \text{для всех } x \in \mathcal{D}, \;\; q \in \mathcal{I} \;\; \text{и} \;\; k \in [k_1,k_2], \tag{5}$$

то $n_1 = n_2$ *п.в. на* Ω.

Доказательство. Введём обозначение $\xi_n(x) = n(x)-1,\ x \in \mathbb{R}^3$. Тогда, согласно принятым предположениям, $\xi_n(x) \equiv 0$ для $x \in \mathbb{R}^3\backslash\Omega$. Запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = -k^2 \xi_n(x) u(x) - \delta(x-q). \tag{6}$$

Решение $u(x) = u_n(x;q,k)$ задачи (6), (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_n(x;q,k) = k^2 \int\limits_\Omega \Phi(x-x';k)\xi_n(x')u_n(x';q,k)dx' + \Phi(x-q;k), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{7}$$

из которого следуют равенства

$$u_n(x;q,k) = k^2 \int\limits_\Omega \Phi(x-x';k)\xi_n(x') \times$$

$$\times \left(k^2 \int\limits_\Omega \Phi(x'-x'';k)\xi_n(x'')u_n(x'';q,k)\,dx'' + \Phi(x'-q;k) \right) dx' + \Phi(x-q;k) =$$

$$= k^2 \int\limits_\Omega \Phi(x-x';k)\Phi(x'-q;k)\xi_n(x')\,dx' +$$

$$+ k^4 \int\limits_\Omega \Phi(x-x';k)\xi_n(x') \int\limits_\Omega \Phi(x'-x'';k)\xi_n(x'')u_n(x'';q,k)\,dx''\,dx' + \Phi(x-q;k).$$

Отсюда, пользуясь тождеством $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z}_1 z_2) + |z_2|^2,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, получаем, что для всех $x \in \mathcal{D},\ q \in \mathcal{I}$ и $k \geqslant 0$ справедливо асимптотическое при $k \to 0$ соотношение

$$|u_n(x;q,k)|^2 = |\Phi(x-q;k)|^2 +$$

$$+ 2k^2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\Phi(x-q;k)} \int\limits_\Omega \Phi(x-x';k)\Phi(x'-q;k)\xi_n(x')\,dx' \right) + O(k^4). \tag{8}$$

Из (8) следует, что при $x \in \mathcal{D},\ q \in \mathcal{I}$ справедливо равенство

$$\mathrm{Re}\left(\overline{\Phi(x-q;0)} \int\limits_\Omega \Phi(x-x';0)\Phi(x'-q;0)\xi_n(x')\,dx' \right) = h_n(x,q),$$

где

$$h_n(x,q) = \lim_{k\to 0}(2k^2)^{-1}(|u_n(x;q,k)|^2 - |\Phi(x-q;k)|^2). \tag{9}$$

Заметим, что функция $\Phi(x-y;0)=(4\pi|x-y|)^{-1}$ вещественнозначная. Поэтому вещественнозначная функция ξ_n удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\xi_n(x')}{|x-x'||x'-q|}\,dx'=64\pi^3|x-q|h_n(x,q),\quad x\in\mathcal{D},\quad q\in\mathcal{I}.$$

Таким образом, если выполняется равенство (5), то

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\xi_{n_j}(x')}{|x-x'||x'-q|}\,dx'=64\pi^3|x-q|h_{n_j}(x,q),\quad x\in\mathcal{D},\quad q\in\mathcal{I};\quad j=1,2.$$

Так как функция $|u(x;q,k)|^2$ вещественно аналитична по $k>-\delta$, её задание при $k\in[k_1,k_2]$ однозначно определяет значение $|u(x;q,k)|^2$, $x\in\mathcal{D}$, $q\in\mathcal{I}$, при всех $k>-\delta$. Поэтому из (5) и (9) следует, что $h_{n_1}(x,q)=h_{n_2}(x,q)$ при $x\in\mathcal{D}$, $q\in\mathcal{I}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\xi_{n_1}(x')-\xi_{n_2}(x')}{|x-x'||x'-q|}\,dx'=0,\quad x\in\mathcal{D},\quad q\in\mathcal{I}. \tag{10}$$

Далее, поскольку функция в левой части равенства (10) вещественно аналитична по $x\in\Pi$ и $q\in\mathcal{L}$, то это равенство продолжается по аналитичности на все $x\in\Pi$, $q\in\mathcal{L}$.

Заметим, что семейство $\{|x-x'|^{-1}:x\in\Pi\}$ полно в классе всех регулярных гармонических в Ω функций (см., например, [15]). Поэтому из (10) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega}\frac{u(x')(n_1(x')-n_2(x'))}{|x'-q|}\,dx'=0 \tag{11}$$

для всех точек $q\in\mathcal{L}$ и всех функций $u\in C^2(\overline{\Omega})$, для которых $\Delta u=0$ в Ω. Вследствие равенства (11) и теоремы 1 получаем $n_1=n_2$ п.в. в Ω. Теорема доказана.

Обратимся теперь к случаю, когда зондирующее волновое поле возбуждается распределённым источником.

3. Распределённый источник. В этом пункте вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение

$$\Delta u(x)+k^2n(x)u(x)=-\varphi_\varepsilon(|x-q|),\quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{12}$$

правая часть которого описывает распределённый сферически симметричный источник с центром в точке q. Будем считать, что $\varphi_\varepsilon=\varphi_\varepsilon(r)$, $r\geqslant 0$, – непрерывная функция и что $\varphi_\varepsilon(r)=0$ при $r\geqslant\varepsilon>0$. Обозначим $O_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}^3:|y-x|\leqslant\varepsilon\}$. Как и выше, считаем, что детекторы сосредоточены в замкнутой области $\mathcal{D}\subset\Pi$, плоскость Π и прямая $\mathcal{L}$ не пересекают $\overline{\Omega}$. Будем предполагать, что $q\in\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – отрезок прямой $\mathcal{L}$, и

$$\Bigl(\bigcup_{q\in\mathcal{I}}O_\varepsilon(q)\Bigr)\bigcap(\overline{\Omega}\bigcup\mathcal{D})=\varnothing. \tag{13}$$

Условие (13) означает, что носители $O_\varepsilon(q)$ зондирующих волновых полей лежат вне исследуемой области Ω и не пересекают область детекторов $\mathcal{D}$.

Рассмотрим обратную задачу, которую назовём задачей *P2* и которая заключается в восстановлении функции $n\in L_\infty(\Omega)$ по набору данных (4), где теперь $u(x;q,k)$ – решение уравнения (12) с условием излучения (2). Следующая теорема утверждает единственность решения задачи *P2*.

Теорема 3. *Пусть имеет место условие (13) и* $A(\varphi_\varepsilon)\neq 0$, *где*

$$A(\varphi_\varepsilon)=4\pi\int\limits_0^\varepsilon r^2\varphi_\varepsilon(r)\,dr.$$

Если для некоторых функций $n_1, n_2 \in L_\infty(\Omega)$ *выполняется равенство*

$$|u_{n_1}(x;q,k)| = |u_{n_2}(x;q,k)| \quad \text{для всех } x \in \mathcal{D},\ \ q \in \mathcal{I} \ \text{ и } \ k \in [k_1, k_2],$$

то $n_1 = n_2$ *п.в. на* Ω.

Доказательство в основном повторяет приведённые выше рассуждения. В условиях теоремы вместо равенства (7) имеем

$$u_n(x;q,k) = k^2 \int\limits_{\Omega} \Phi(x-x';k)\xi_n(x')u_n(x';q,k)\,dx' +$$

$$+ \int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x-x';k)\varphi_\varepsilon(|x'-q|)\,dx', \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{14}$$

Воспользовавшись равенством (14), вместо (8) для $x \in \mathcal{D}$, $q \in \mathcal{I}$ получаем соотношение

$$|u_n(x;q,k)|^2 = \Bigg|\int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x-x';k)\varphi_\varepsilon(|x'-q|)\,dx'\Bigg|^2 + 2k^2\,\mathrm{Re}\Bigg(\overline{\int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x-x';k)\varphi_\varepsilon(|x'-q|)\,dx'} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \Phi(x-x';k)\xi_n(x') \int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x'-x'';k)\varphi_\varepsilon(|x''-q|)\,dx''\,dx'\Bigg) + O(k^4).$$

Следовательно, для функции

$$h_{\varepsilon,n}(x,q) = \lim_{k\to 0}\frac{1}{2k^2}\Bigg(|u_n(x;q,k)|^2 - \Bigg|\int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x-x';k)\varphi_\varepsilon(|x'-q|)\,dx'\Bigg|^2\Bigg)$$

имеет место представление

$$h_{\varepsilon,n}(x,q) = \mathrm{Re}\Bigg(\overline{\int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x-x';0)\varphi_\varepsilon(|x'-q|)\,dx'} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \Phi(x-x';0)\xi_n(x') \int\limits_{O_\varepsilon(q)} \Phi(x'-x'';0)\varphi_\varepsilon(|x''-q|)\,dx''\,dx'\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{64\pi^3}\int\limits_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi_\varepsilon(|x'-q|)}{|x-x'|}\,dx' \cdot \int\limits_{\Omega}\frac{\xi_n(x')}{|x-x'|}\int\limits_{O_\varepsilon(q)}\frac{\varphi_\varepsilon(|x''-q|)}{|x'-x''|}\,dx''\,dx'. \tag{16}$$

Непосредственное интегрирование с использованием условия (13) даёт равенство

$$\int\limits_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi_\varepsilon(|x'-q|)}{|x-x'|}\,dx' = \frac{A(\varphi_\varepsilon)}{|x-q|}, \quad x \in \mathcal{D}\bigcup\overline{\Omega}. \tag{17}$$

Из представлений (16) и (17) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\xi_n(x')\,dx'}{|x-x'||x'-q|} = \frac{64\pi^3}{A^2(\varphi_\varepsilon)}|x-q|h_{\varepsilon,n}(x,q), \quad x \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathcal{I}.$$

Теперь доказательство завершается так же, как и в теореме 2. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в (4) в качестве пространственного носителя данных используется трёхмерное многообразие $\mathcal{D}\times\mathcal{I}$. В предшествующих работах [3–6] теоремы единственности устанавливались для обратных задач с пространственными носителями данных вида $\{(x,q) : x\in O_\varepsilon(q),\ \ q\in S\}$, $\{(x,q) : x,q\in S\}$, размерность которых не менее четырёх (здесь S – замкнутая поверхность, содержащая внутри $\overline{\Omega}$). Для линеаризованного варианта обратной задачи (1), (2) с $n=\widetilde{n}^2\geqslant 0$ и пространственным носителем данных $\{(x,q) : x,q\in S\}$ аналогичный теореме 2 результат установлен в [5]. При этом налагается структурное условие регулярности метрики $d\tau=\widetilde{n}(x)\,|dx|$ и условие гладкости $\widetilde{n}\in C^{15}(\mathbb{R}^3)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
2. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Berlin, 1998.
3. *Klibanov M.V.* Phaseless inverse scattering problems in three dimensions // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. № 2. P. 392–410.
4. *Klibanov M.V.* Uniqueness of two phaseless non-overdetermined inverse acoustic problems in 3-d // Appl. Anal. 2014. V. 93. № 6. P. 1135–1149.
5. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* Reconstruction procedures for two inverse scattering problems without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76. № 1. P. 178–196.
6. *Романов В.Г.* Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
7. *Романов В.Г.* Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
8. *Novikov R.G.* Explicit formulas and global uniqueness for phaseless inverse scattering in multidimensions // J. Geom. Anal. 2016. V. 26. № 1. P. 346–359.
9. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
10. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
11. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
12. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М., 1982.
13. *Кокурин М.Ю.* О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
14. *Кокурин М.Ю.* Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 255–264.
15. *Kokurin M.Yu.* On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2013. V. 21. № 1. P. 125–140.

Марийский государственный университет,
г. Йошкар-Ола

Поступила в редакцию 13.04.2021 г.
После доработки 05.06.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.