ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1170–1176

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ РИМАНА–АДАМАРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. Н. Миронов, Ю. О. Яковлева

Для линейного уравнения четвёртого порядка с четырьмя независимыми переменными, имеющего доминирующую производную, которая не содержит кратного дифференцирования ни по одной из независимых переменных – уравнения Бианки четвёртого порядка – приводятся постановка задачи Дарбу и определение функции Римана–Адамара. Получены достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты этого уравнения, чтобы его функция Римана–Адамара допускала построение в явном виде в терминах гипергеометрических функций.

DOI: 10.31857/S037406412109003X

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными представляет значительный интерес и рассматривалась многими авторами [1, с. 228–233; 2–4]. Естественным обобщением этого уравнения являются уравнения Бианки. В статье [5] для уравнения Бианки третьего порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу, определена функция Римана–Адамара задачи Дарбу и построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара. В работе [6] для одного класса уравнений Бианки третьего порядка функция Римана–Адамара построена в явном виде.

Уравнение Бианки четвёртого и высших порядков рассматривалось, в частности, в работах [7–14]. В статье [14] для этого уравнения предложен вариант метода Римана–Адамара для задачи Дарбу и определена соответствующая функция Римана–Адамара.

1. Определение функции Римана–Адамара. *Уравнением Бианки* четвёртого порядка называют линейное уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv D^{\alpha}u + \sum_{\beta<\alpha} a_{\beta}(x,y,z,t)D^{\beta}u = f(x,y,z,t), \tag{1}$$

где мультииндекс α равен $(1,1,1,1)$, отношение $\beta < \alpha$ для мультииндексов означает, что мультииндекс β получен из мультииндекса α уменьшением по крайней мере одной из компонент.

Определим класс функций $C^{(k,l,m,n)}$ следующим образом: функция u принадлежит классу $C^{(k_1,k_2,k_3,k_4)}$, если существуют непрерывные производные $\partial^{r_1+r_2+r_3+r_4}u/\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}\partial t^{r_4}$ $(r_i = \overline{0,k_i})$. Решение уравнения (1) класса $C^{(1,1,1,1)}$ назовём *регулярным.* Пусть D – область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_0>0$, $z=0$, $z=z_0>0$, $t=x$, $t=t_0>0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям $a_{ijkl}\in C^{(i,j,k,l)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, Z, S грани многогранника D при $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=x$ соответственно.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y,t), \quad u|_{\overline{S}} = \psi(x,y,z),$$

где φ_j, $j=\overline{1,3}$, и ψ – заданные функции, для которых выполнены включения

$$\varphi_1\in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2\in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3\in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \psi\in C^{(1,1,1)}(\overline{S})$$

и условия согласования

$$\varphi_1(y,0,t)=\varphi_3(0,y,t), \quad \varphi_1(0,z,t)=\varphi_2(0,z,t), \quad \varphi_2(x,0,t)=\varphi_3(x,0,t),$$
$$\varphi_1(y,z,0)=\psi(0,y,z), \quad \varphi_2(x,z,x)=\psi(x,0,z), \quad \varphi_3(x,y,x)=\psi(x,y,0).$$

Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi,\eta,\zeta,\tau)$. Она определяет область D_P, ограниченную плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\tau$, $t==x$. Очевидно, многогранник D_P можно разбить на две части: многогранник D^1, который ограничен плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\tau$, $t=\xi$, и многогранник D^2, который ограничен плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\xi$, $t=x$.

Функция Римана–Адамара задачи Дарбу $H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ [14] имеет вид

$$H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)=\begin{cases}R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t)\in D^1,\\ V(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t)\in D^2,\end{cases}$$

где R – функция Римана для уравнения (1), а функция V определяется ниже.

В работе [14] определены конструкции (функции) A_{ijkl}, A^-_{ijkl}, A^+_{ijkl}; выражения для тех из них, которые встречаются далее, будут приведены. Конструкции A_{ijkl} записываются через коэффициенты уравнения (1) и функцию H, в конструкции A^-_{ijkl} функция H заменяется на V, а в конструкции A^+_{ijkl} – на R.

Будем обозначать пересечение границы области D_P с гиперплоскостью $x=\xi$ через $D_{P[x=\xi]}$, с плоскостями $x=\xi$, $y=\eta$ через $D_{P[x=\xi,y=\eta]}$ и т.п. Аналогичный смысл имеют обозначения $D^2_{[y=\eta]}$ и т.п.

Потребуем, чтобы функция V удовлетворяла следующими девяти условиям, которыми она определяется однозначно [14].

1°. В области $D_{P[x=t]}$ функция V равна тождественно нулю.

2°. Скачок функции $A_{1000}(x,\eta,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ при $t=\xi$ равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1000}](x,\eta,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1000}(x,\eta,\zeta,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1000}(x,\eta,\zeta,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0,$$

где $A^+_{1000}:=R_x-a_{0111}R$, $A^-_{1000}:=V_x-a_{0111}V$.

3°. В области $D_{P[y=\eta,z=\zeta]}$ функция V удовлетворяет уравнению

$$A^-_{1001}:=V_{xt}-(a_{1110}V)_x-(a_{0111}V)_t+a_{0110}V=0.$$

Тогда функция V в плоской области $D_{P[y=\eta,z=\zeta]}$ определена как решение задачи Дарбу для этого уравнения. Решение такой двумерной задачи Дарбу существует и единственно.

4°. Скачок функции $A_{1100}(x,y,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ на плоской области $D_{P[z=\zeta,t=\xi]}$ равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1100}](x,y,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1100}(x,y,\zeta,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1100}(x,y,\zeta,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0,$$

где

$$A^+_{1100}:=R_{xy}-(a_{1011}R)_x-(a_{0111}R)_y+a_{0011}R,\quad A^-_{1100}:=V_{xy}-(a_{1011}V)_x-(a_{0111}V)_y+a_{0011}V.$$

5°. Скачок функции $A_{1010}(x,\eta,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ на плоской области $D_{P[y=\eta,t=\xi]}$ равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1010}](x,\eta,z,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1010}(x,\eta,z,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1010}(x,\eta,z,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0,$$

где

$$A^+_{1010}:=R_{xz}-(a_{1101}R)_x-(a_{0111}R)_z+a_{0101}R,\quad A^-_{1010}:=V_{xz}-(a_{1101}V)_x-(a_{0111}V)_z+a_{0101}V.$$

6°. В области $D_{P[y=\eta]}$ функция V удовлетворяет уравнению

$$A^-_{1011}:=V_{xzt}-(a_{1110}V)_{xz}-(a_{1101}V)_{xt}-(a_{0111}V)_{zt}+(a_{1110}V)_x+(a_{0110}V)_z+(a_{0101}V)_t-a_{0100}V=0.$$

Для нахождения функции V получаем задачу Дарбу в трёхмерном пространстве с уже известными граничными условиями. Решение задачи Дарбу существует и единственно.

7°. Аналогично, в области $D_{P[z=\zeta]}$ функция V удовлетворяет уравнению

$$A^-_{1101} := V_{xyt} - (a_{1110}V)_{xy} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{yt} + (a_{1010}V)_x + (a_{0110}V)_y + (a_{0011}V)_t - a_{0010}V = 0.$$

8°. Скачок функции $A_{1110}(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ на трёхмерной области $D_{P[t=\xi]}$ равен тождественно нулю, т.е.

$$[A_{1110}](x,y,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau) := A^+_{1110}(x,y,z,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau) - A^-_{1110}(x,y,z,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv 0,$$

где

$$A^+_{1110} := R_{xyz} - (a_{1101}R)_{xy} - (a_{1011}R)_{xz} - (a_{0111}R)_{yz} + +(a_{1001}R)_x + (a_{0101}R)_y + (a_{0011}R)_z - a_{0001}R,$$

$$A^-_{1110} := V_{xyz} - (a_{1101}V)_{xy} - (a_{1011}V)_{xz} - (a_{0111}V)_{yz} + (a_{1001}V)_x + (a_{0101}V)_y + (a_{0011}V)_z - a_{0001}V.$$

9°. Функция V в области D^2 удовлетворяет сопряжённому к (1) уравнению

$$L^*(u) \equiv V_{xyzt} - (a_{1110}V)_{xyz} - (a_{1101}V)_{xyt} - (a_{0111}V)_{yzt} - (a_{1011}V)_{xzt} +$$
$$+ (a_{1100}V)_{xy} + (a_{0110}V)_{yz} + (a_{1010}V)_{xz} + (a_{0101}V)_{yt} + (a_{0011}V)_{zt} +$$
$$- (a_{1000}V)_x - (a_{0100}V)_y - (a_{0010}V)_z - (a_{0001}V)_t + a_{0000}V = 0,$$

при этом условия на областях $D^2_{[y=\eta]}$, $D^2_{[z=\zeta]}$, $D^2_{[t=\xi]}$, $D^2_{[x=t]}$ уже известны в силу выполнения предыдущих условий 1°–8°. Таким образом, функция Римана–Адамара определена, существует и единственна в $\overline{D}_P$ [14].

2. Построение функции Римана–Адамара в явном виде. Метод построения решения задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара основывается на методе Римана и свойствах функции Римана.

Рассмотрим соответствующее уравнению (1) однородное уравнение

$$L(u) \equiv D^\alpha u + \sum_{\beta<\alpha} a_\beta(x,y,z,t) D^\beta u = 0. \tag{2}$$

Далее нам потребуются конструкции (функции), введённые в работе [9]:

$$h_{1,2} = (a_{0111})_y + a_{1011}a_{0111} - a_{0011}, \quad h_{1,3} = (a_{0111})_z + a_{1101}a_{0111} - a_{0101},$$
$$h_{1,4} = (a_{0111})_t + a_{1110}a_{0111} - a_{0110}, \quad h_{2,3} = (a_{1011})_z + a_{1101}a_{1011} - a_{1001},$$
$$h_{2,4} = (a_{1011})_t + a_{1110}a_{1011} - a_{1010}, \quad h_{3,4} = (a_{1101})_t + a_{1110}a_{1101} - a_{1100},$$
$$h_{12,4} = (a_{0011})_t + a_{1110}a_{0011} - a_{0010}, \quad h_{13,4} = (a_{0101})_t + a_{1110}a_{0101} - a_{0100},$$
$$h_{23,4} = (a_{1001})_t + a_{1110}a_{1001} - a_{1000}, \quad h_{12,3} = (a_{0011})_z + a_{1101}a_{0011} - a_{0001},$$
$$h_{123,4} = (a_{0001})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000}.$$

Эти конструкции используются в [9, 13] для записи условий факторизации уравнения (2) и в формулировке достаточных условий, обеспечивающих возможность построения функции Римана в явном виде.

Совокупность преобразований эквивалентности для уравнения (2) имеет вид

$$\overline{x}_i = \alpha_i(x_i), \quad i = \overline{1,4}, \quad u = \lambda(x,y,z,t)\overline{u}. \tag{3}$$

Два уравнения вида (2) называются *эквивалентными по функции* [15, с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (3), в которых $\alpha_i(x_i) = x_i$, $i = \overline{1,4}$.

Все инварианты Лапласа для уравнения (2) найдены в работе [16] (см. также [17, формулы (5)]). В [17] доказана следующая

Теорема 1. *Два уравнения вида (2) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда у них равны все соответствующие инварианты Лапласа.*

В работе [13] доказана

Теорема 2. *Если для уравнения (2) выполняются условия*

$$h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv 0,$$

$$h_{123,4} = \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t) \tag{4}$$

и существует непрерывно дифференцируемая функция $G(x,y,z,t)$ такая, что

$$a_{1110} = G'_t, \quad a_{1101} = G'_z, \quad a_{1011} = G'_y, \quad a_{0111} = G'_x, \tag{5}$$

то функция Римана для этого уравнения строится в явном виде и даётся формулой

$$R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = {}_0F_3(1,1,1;\omega)\exp\bigg\{\int\limits_\xi^x a_{0111}(\alpha,y,z,t)\,d\alpha + \int\limits_\eta^y a_{1011}(\xi,\beta,z,t)\,d\beta +$$

$$+\int\limits_\zeta^z a_{1101}(\xi,\eta,\gamma,t)\,d\gamma + \int\limits_\tau^t a_{1110}(\xi,\eta,\zeta,\delta)\,d\delta\bigg\},$$

в которой ${}_0F_3(1,1,1;\omega)$ – обобщённая гипергеометрическая функция [18, с. 183], а

$$\omega = \int\limits_\xi^x \varphi(\alpha)\,d\alpha \int\limits_\eta^y \psi(\beta)\,d\beta \int\limits_\zeta^z \theta(\gamma)\,d\gamma \int\limits_\tau^t \chi(\delta)\,d\delta.$$

Уравнение

$$L_1(\bar u) \equiv D^\alpha \bar u + \sum_{\beta<\alpha} b_\beta(x,y,z,t) D^\beta \bar u = 0$$

переходит в эквивалентное ему по функции уравнение (2) при преобразовании $u = \lambda\bar u$, здесь

$$\lambda = \exp\bigg\{\int (a_{0111} - b_{0111})\,dx + (a_{1011} - b_{1011})\,dy + (a_{1101} - b_{1101})\,dz + (a_{1110} - b_{1110})\,dt\bigg\},$$

где криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Непосредственным вычислением убеждаемся, что инварианты Лапласа уравнения (2) при условиях (4), (5) и уравнения

$$u_{1xyzt} - \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t)u_1 = 0 \tag{6}$$

совпадают, т.е. эти уравнения эквивалентны по функции с множителем

$$\lambda = \lambda_1 = \exp\bigg\{\int a_{0111}\,dx + a_{1011}\,dy + a_{1101}\,dz + a_{1110}\,dt\bigg\}.$$

Действительно, рассмотрим для иллюстрации этого факта два инварианта Лапласа H_1 и H_2 для уравнения (2):

$$H_1 = (a_{0111})_{yz} + a_{1100}a_{0111} + a_{1010}a_{1011} + a_{0011}a_{1101} - 2a_{0111}a_{1011}a_{0111} - a_{0001},$$

$$H_2 = (a_{0111})_{yzt} + a_{1000}a_{0111} + a_{0100}a_{1011} + a_{0010}a_{1101} + a_{0001}a_{1110} + a_{1100}a_{0011} + a_{1010}a_{0101} +$$

$$+ a_{1001}a_{0110} - 2a_{0111}a_{1011}a_{0011} - 2a_{0111}a_{1101}a_{0101} - 2a_{0111}a_{1110}a_{1001} -$$
$$- 2a_{1011}a_{1101}a_{0110} - 2a_{1011}a_{1110}a_{0101} - 2a_{1101}a_{1110}a_{0011} + 6a_{0111}a_{1011}a_{1101}a_{1110} - a_{0000}.$$

Преобразуем сначала инвариант H_1 с учётом условий (4), (5), имеем

$$H_1 = (a_{0111})_{yz} + a_{0111}(a_{1001} - a_{1011}a_{1101}) + a_{1011}(a_{0101} - a_{0111}a_{1101}) + a_{0011}a_{1011} - a_{0001} =$$
$$= (a_{0111})_{yz} + a_{0111}(a_{1011})_z + a_{1011}(a_{0111})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001} =$$
$$= ((a_{0111})_y + a_{0111}a_{1011})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001} = (a_{0011})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001} = h_{12,3} \equiv 0.$$

Используя доказанное тождество $H_1 \equiv 0$, преобразуем инвариант H_2:

$$H_2 = (a_{0111})_{yzt} + a_{0111}(a_{1000} - a_{1110}a_{1001}) + a_{1001}(a_{0110} - a_{0111}a_{1110}) +$$
$$+ a_{1011}(a_{0100} - a_{1110}a_{0101}) + a_{0101}(a_{1010} - a_{1011}a_{1110}) + a_{1101}(a_{0010} - a_{1110}a_{0011}) +$$
$$+ a_{0011}(a_{1100} - a_{1101}a_{1110}) - 2a_{0111}a_{1011}(a_{1100} - a_{1101}a_{1110}) -$$
$$- 2a_{0111}a_{1101}(a_{1010} - a_{1011}a_{1110}) - 2a_{1011}a_{1101}(a_{0110} - a_{0111}a_{1110}) + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} =$$
$$= (a_{0111})_{yzt} + ((a_{0111})_t a_{1001} + a_{0111}(a_{1001})_t) + ((a_{1011})_t a_{0101} + a_{1011}(a_{0101})_t) +$$
$$+ ((a_{1101})_t a_{0011} + a_{1101}(a_{0011})_t) + -2a_{0111}a_{1011}(a_{1101})_t - 2a_{0111}a_{1101}(a_{1011})_t -$$
$$- 2a_{1011}a_{1101}(a_{0111})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} =$$
$$= ((a_{0111})_{yz} + a_{1100}a_{0111} + a_{1010}a_{1011} + a_{0011}a_{1101} - 2a_{0111}a_{1011}a_{0111})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} =$$
$$= (a_{0001})_t + a_{1110}a_{0001} - a_{0000} = h_{123,4} = \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t).$$

Очевидно, что полученные значения инвариантов уравнения (2) совпадают с соответствующими инвариантами Лапласа уравнения (6).

Сопряжённое к (6) уравнение

$$v_{1xyzt} - \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\chi(t)v_1 = 0 \tag{7}$$

эквивалентно сопряжённому к (2) уравнению с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (4), (5). Очевидно, что соответствующее преобразование имеет вид

$$v = \lambda_2 v_1, \quad \lambda_2 = \exp\left\{ -\int a_{0111}\,dx + a_{1011}\,dy + a_{1101}\,dz + a_{1110}\,dt \right\}.$$

Таким образом, в теореме 2 фактически построена функция Римана для класса эквивалентных по функции уравнений, одним из представителей этого класса является уравнение (6).

Сформулируем теперь достаточные условия на коэффициенты уравнения (2), обеспечивающие построение функции Римана–Адамара в явном виде.

Теорема 3. *Если для уравнения (2) выполняются условия (4), (5), то функция Римана–Адамара даётся формулой*

$$H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = \begin{cases} R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t) \in D^1, \\ V(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t) \in D^2, \end{cases}$$

здесь

$$R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = E(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)\,{}_0F_3(1,1,1;\omega),$$
$$V(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = E(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)({}_0F_3(1,1,1;\omega) - {}_0F_3(1,1,1;\rho)),$$
$$E(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = \exp\left\{ \int\limits_\xi^x a_{0111}(\alpha,y,z,t)\,d\alpha + \int\limits_\eta^y a_{1011}(\xi,\beta,z,t)\,d\beta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\zeta^z a_{1101}(\xi,\eta,\gamma,t)\,d\gamma + \int\limits_\tau^t a_{1110}(\xi,\eta,\zeta,\delta)\,d\delta \right\},$$

где

$$\omega = \int\limits_{\xi}^{x} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int\limits_{\eta}^{y} \psi(\beta)\, d\beta \int\limits_{\zeta}^{z} \theta(\gamma)\, d\gamma \int\limits_{\tau}^{t} \chi(\delta)\, d\delta, \quad \rho = \int\limits_{\xi}^{t} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int\limits_{\eta}^{y} \psi(\beta)\, d\beta \int\limits_{\zeta}^{z} \varphi(\gamma)\, d\gamma \int\limits_{\tau}^{x} \chi(\delta)\, d\delta.$$

Доказательство. Обозначим

$$F_1(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = {}_0F_2(1,1,1;\omega), \quad F_2(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = {}_0F_2(1,1,1;\rho),$$

$$V(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = E(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)(F_1(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) - F_2(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)).$$

Отметим, что при $y = \eta$ или при $z = \zeta$ выполняются тождества $\omega = \rho \equiv 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} &F_1(x,\eta,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = F_2(x,\eta,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = \\ &= F_1(x,y,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = F_2(x,y,\zeta,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) \equiv 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Перейдём к проверке условий 1°–9°, определяющих функцию Римана–Адамара.

Выполнение условия 1° очевидно.

Условие 2° принимает вид

$$(V_x - a_{0111}V)(x,\eta,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau) = (R_x - a_{0111}R)(x,\eta,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau).$$

Проверяем его непосредственным вычислением с учётом тождеств (8).

Условие 3°

$$A^-_{1001} = V_{xt} - (a_{1110}V)_x - (a_{0111}V)_t + a_{0110}V = 0$$

при $y = \eta$, $z = \zeta$ выполняется, поскольку $V = 0$ при таких t и z в силу (8).

Условие 4° (оно имеет место при $z = \zeta$ и $t = \xi$) принимает вид

$$\begin{aligned} &(E(F_1 - F_2))_{xy} - (a_{1011}(E(F_1 - F_2)))_x - (a_{0111}(E(F_1 - F_2)))_y + \\ &+ a_{0011}(E(F_1 - F_2)) = (EF_1)_{xy} - (a_{1011}EF_1)_x - (a_{0111}EF_1)_y + a_{0011}EF_1, \end{aligned}$$

т.е. равносильно

$$(EF_2)_{xy} - (a_{1011}EF_2)_x - (a_{0111}EF_2)_y + a_{0011}EF_2 = 0.$$

Так как $F_2|_{t=\xi} \equiv 1$, получаем

$$(E)_{xy} - (a_{1011}E)_x - (a_{0111}E)_y + a_{0011}E = 0,$$

$$(a_{0111}E)_y - (a_{0111}E)_y - (a_{1011})_x E - a_{1011}a_{0111}E + a_{0011}E = 0.$$

Последнее соотношение является тождеством в силу (4), (5), поскольку $(a_{1011})_x + a_{1011}a_{0111} - - a_{0011} \equiv 0$.

Аналогично, в силу (4), (5) выполняется условие 5°, так как $(a_{1101})_x + a_{1101}a_{0111} - a_{0101} \equiv 0$.

Условие 6°

$$V_{xzt} - (a_{1110}V)_{xz} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{zt} + (a_{1100}V)_x + (a_{0110}V)_z + (a_{0101}V)_t - a_{0100}V = 0$$

при $y = \eta$ справедливо, поскольку $V|_{y=\eta} \equiv 0$ в силу (8).

Аналогично, условие 7°

$$V_{xyt} - (a_{1110}V)_{xy} - (a_{1101}V)_{xt} - (a_{0111}V)_{yt} + (a_{1010}V)_x + (a_{0110}V)_y + (a_{0011}V)_t - a_{0010}V = 0$$

при $z = \zeta$ выполняется, так как $V|_{z=\zeta} \equiv 0$ в силу (8).

Как и в случае 4° условие 8° на гиперплоскости $t = \xi$ с учётом тождества $F_2|_{t=\xi} \equiv 1$ принимает вид

$$\begin{aligned} &(((a_{1011})_z + a_{1011}a_{1101} - a_{1001})E)_x - (((a_{0111})_z + a_{1101}a_{0111} - a_{0101})E)_y - \\ &- ((a_{0011})_z + a_{0011}a_{1101} - a_{0001})E = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что данное равенство выполняется тождественно в силу (4).

Далее, очевидно, что функции F_1 и F_2 удовлетворяют уравнению (7). Тогда их разность также удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, функция $E(F_1 - F_2)$ является решением эквивалентного по функции уравнения с множителем $\lambda = E$, т.е. удовлетворяет уравнению, сопряжённому к уравнению (2) с условиями (4), (5). Условие 9° выполняется. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. *Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г.* Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
4. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С.* Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
5. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 63–70.
6. *Миронов А.Н.* О построении функции Римана–Адамара для трехмерного уравнения Бианки // Изв. вузов. Математика. 2021. № 3. С. 76–82.
7. *Жегалов В.И., Севастьянов В.А.* Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1429–1430.
8. *Севастьянов В.А.* Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1706–1707.
9. *Миронов А.Н.* О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1698–1701.
10. *Уткина Е.А.* К общему случаю задачи Гурса // Изв. вузов. Математика. 2005. № 8. С. 57–62.
11. *Миронов А.Н.* Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 3. С. 584–594.
12. *Миронов А.Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 27–32.
13. *Кощеева О.А.* О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. С. 40–46.
14. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 349–363.
15. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
16. *Миронов А.Н.* Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1144–1149.
17. *Миронов А.Н.* О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1572–1581.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета,
Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 31.03.2021 г.
После доработки 31.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.