ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1177–1190

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:621.372.8+517.984.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ОТКРЫТОГО НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

© 2021 г. **Е. Ю. Смолькин**

Рассматривается задача о поверхностных волнах регулярной открытой неоднородной волноведущей структуры прямоугольного сечения. Эта задача сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Для нахождения решения использована вариационная формулировка задачи. Доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости. Характеристические числа задачи соответствуют постоянным распространения волновода.

DOI: 10.31857/S0374064121090041

Введение. Важный класс существенно векторных электродинамических задач составляют задачи о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах. При исследовании процессов распространения волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением возникают краевые задачи на собственные значения для систем уравнений Гельмгольца с разрывными коэффициентами. При этом на линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов ставятся дополнительные условия, называемые условиями сопряжения. В простейших задачах спектральный параметр присутствует лишь в уравнениях, в результате возникает задача на собственные значения для некоторого самосопряжённого оператора. Однако при анализе достаточно сложных моделей спектральный параметр входит уже не только в уравнения, но и в условия сопряжения, причём нелинейным образом. Задача становится несамосопряжённой [1–3].

Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным использовать метод операторных пучков. После того как исходная краевая задача сведена к изучению некоторого операторного пучка, для изучения его спектральных свойств можно применять аппарат функционального анализ (см. [2–4]). В работах [1–5] в целом построена теория распространения нормальных волн в закрытых (экранированных) волноводах: доказана дискретность спектра задачи, получены результаты о распределении (локализации) характеристических чисел на комплексной плоскости, а также доказан ряд теорем о кратной полноте по Келдышу системы собственных и присоединённых векторов задачи в специальных пространствах.

Открытые (неэкранированные) волноведущие структуры исследовались рядом авторов [1, 6, 7]. Однако для таких структур достаточно полной теории распространения волн не построено. В этом случае задача становится значительно сложнее (в силу некомпактности соответствующих операторов из-за неограниченности области). В статье рассматриваются именно открытые структуры – случай неограниченной внешней области. Первые результаты по исследованию этой задачи получены недавно в работах [8–11].

Указанные трудности удаётся преодолеть при помощи введения фиктивной внешней области – внешности круга – и представления решения в этой области через функцию Грина. Это приводит к тому, что в вариационном соотношении появляется оператор следа (на границе фиктивной области), сложным нелинейным образом зависящий от спектрального параметра. Поэтому в данном случае нужно анализировать уже не операторный пучок (как в [5]), а оператор-функцию. Тем не менее удаётся достаточно подробно изучить свойства оператор-функции и получить результаты о её спектре. В статье доказывается дискретность спектра задачи о нормальных волнах неоднородной волноведущей структуры.

Отметим, что в работе рассматриваются лишь волны, убывающие на удалении от волновода (удовлетворяющие соответствующим условиям на бесконечности). Другие типы волн не рассматриваются.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_c\varepsilon_0 \equiv \mathrm{const}$ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu_c\mu_0 \equiv \mathrm{const}$, где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а $\varepsilon_c \geqslant 1$ и $\mu_c \geqslant 1$ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ_1. Рассмотрим область $\Omega_0 \subset Q$ с кусочно-гладкой границей Γ_0 такую, что $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_0 = \varnothing$. Обозначим $\Omega_1 := Q \setminus \overline{\Omega}_0$.

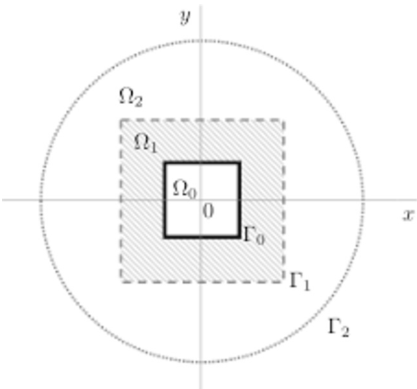

Рисунок. Геометрия задачи.

Будем рассматривать математическую модель регулярной (вдоль оси Oz) открытой волноведущей структуры W, поперечное сечение которой плоскостью $z = \mathrm{const}$ представляет собой двухсвязную область Ω_1 с границами Γ_0 и Γ_1. Волновод заполнен неоднородным изотропным материалом с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon(\rho,\varphi)$, $\operatorname{Im}\varepsilon = 0$, и $\mu(\rho,\varphi)$, $\operatorname{Im}\mu = 0$, соответственно. Мы также предполагаем, что $\varepsilon(\rho,\varphi)$, $\mu(\rho,\varphi) \in C^1(\overline{\Omega}_1)$ и $\min\varepsilon > \varepsilon_c$, $\min\mu > \mu_c$. Границы Γ_0 – проекция поверхности идеально проводящего бесконечно тонкого экрана, Γ_1 – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков.

Выберем $r > 0$ так, чтобы выполнялось включение $B_r := \{x = (\rho,\varphi) : \rho < r\} \supset \overline{Q}$. Введём в рассмотрение область $\Omega_2 := B_r \setminus \overline{Q}$; обозначим $\Gamma_2 := \{x : \rho = r\}$ (рисунок).

Диэлектрическая и магнитная проницаемости во всём пространстве имеют вид $\varepsilon_0\widetilde{\varepsilon}$ и $\mu_0\widetilde{\mu}$, где

$$\widetilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(x), & x \in \Omega_1, \\ \varepsilon_c, & x \in \Omega_2, \\ \varepsilon_c, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_1 \bigcup \Omega_2), \end{cases} \qquad \widetilde{\mu} = \begin{cases} \mu(x), & x \in \Omega_1, \\ \mu_c, & x \in \Omega_2, \\ \mu_c, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_1 \bigcup \Omega_2). \end{cases}$$

Будем рассматривать монохроматические волны

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(\mathrm{E}_\rho, \mathrm{E}_\varphi, \mathrm{E}_z)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(\mathrm{H}_\rho, \mathrm{H}_\varphi, \mathrm{H}_z)^{\mathrm{T}},$$

где ω – частота.

Задача об электромагнитных поверхностных волнах, распространяющихся в неоднородном волноводе прямоугольного сечения, состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\widetilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\widetilde{\mu}\mathbf{H}, \tag{1}$$

причём должны быть удовлетворены следующие условия: обращение в нуль на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$E_\tau|_{\Gamma_0} = 0, \tag{2}$$

непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$[E_\tau]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [H_\tau]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [E_\tau]|_{\Gamma_2} = 0, \quad [H_\tau]|_{\Gamma_2} = 0, \tag{3}$$

ограниченность энергии поля в любом конечном объёме волновода

$$\int\limits_V (\widetilde{\varepsilon}|\mathbf{E}|^2 + \widetilde{\mu}|\mathbf{E}|^2)\, dX < \infty, \tag{4}$$

а также условие излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(1/\rho)$ при $\rho \to \infty$.

Здесь $X = (\rho, \varphi, z)$, $V \subset \mathbb{R}^3$ – любой конечный объём. Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Осуществлён переход к безразмерным величинам [5]: $k_0 x \to \to x$, $\gamma \to \gamma/k_0$, $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ (временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен).

Будем искать решение системы (1) в виде бегущей волны [12, 13], т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z, вдоль которой структура регулярна:

$$\mathrm{E}_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad \mathrm{E}_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad \mathrm{E}_z = E_z(x)e^{i\gamma z},$$

$$\mathrm{H}_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad \mathrm{H}_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad \mathrm{H}_z = H_z(x)e^{i\gamma z},$$

где γ – постоянная распространения (неизвестный спектральный параметр задачи).

Задача о поверхностных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Принята следующая классификация волн [12–15] по параметру γ:

1) *распространяющаяся* волна, если $\operatorname{Im}\gamma = 0$;

2) *затухающая* волна, если $\operatorname{Re}\gamma = 0$;

3) *комплексная* волна, если $\operatorname{Re}\gamma \operatorname{Im}\gamma \neq 0$.

Мы будем рассматривать комплексные и распространяющиеся поверхностные волны.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - i\gamma H_\varphi = -i\widetilde{\varepsilon}E_\rho, \quad i\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\widetilde{\varepsilon}E_\varphi, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\widetilde{\varepsilon}E_z,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - i\gamma E_\varphi = i\widetilde{\mu}H_\rho, \quad i\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\widetilde{\mu}H_\varphi, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = i\widetilde{\mu}H_z \tag{5}$$

и, выразив функции E_ρ, H_ρ, E_φ, H_φ через E_z и H_z из 1, 2, 4 и 5-го уравнений системы (5), получим

$$E_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{i}{\widetilde{\kappa}^2}\left(\gamma\rho\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \widetilde{\mu}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right), \quad H_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{i}{\widetilde{\kappa}^2}\left(\gamma\rho\frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \widetilde{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\right),$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{i}{\widetilde{\kappa}^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \rho\widetilde{\mu}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right), \quad H_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{i}{\widetilde{\kappa}^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \rho\widetilde{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right), \tag{6}$$

где $\widetilde{\kappa}^2 = \gamma^2 - \widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}$.

Из последних формул следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций: $\Pi(\rho,\varphi) := E_z(\rho,\varphi)$, $\Phi(\rho,\varphi) := H_z(\rho,\varphi)$.

Тем самым задача сводится к нахождению функций Π и Φ – продольных компонент электрического и магнитного полей.

Для продольных компонент Π и Φ поля имеем следующую задачу на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\mathcal{L}\Pi := \Delta\Pi - \widetilde{\kappa}^2\Pi = -\left(\frac{\nabla\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\varepsilon}} + \frac{\nabla\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}\right)\nabla\Pi - \frac{\gamma}{\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\kappa}^2}J\left(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}, \Phi\right),$$

$$\mathcal{L}\Phi := \Delta\Phi - \widetilde{\kappa}^2\Phi = -\left(\frac{\nabla\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}} + \frac{\nabla\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}\right)\nabla\Phi + \frac{\gamma}{\widetilde{\mu}\widetilde{\kappa}^2}J\left(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}, \Pi\right), \tag{7}$$

где

$$J(u,v) := \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \rho},$$

удовлетворяющие краевым условиям на Γ_0:

$$\Pi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_0} = 0, \tag{8}$$

условиям сопряжения на Γ_1:

$$[\Pi]|_{\Gamma_1} = 0, \quad [\Phi]|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\gamma\left.\left[\frac{1}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\right]\right|_{\Gamma_1} - \left.\left[\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \gamma\left.\left[\frac{1}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right]\right|_{\Gamma_1} + \left.\left[\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\kappa}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\right]\right|_{\Gamma_1} = 0, \tag{9}$$

условиям сопряжения на Γ_2:

$$[\Pi]|_{\Gamma_2} = 0, \quad [\Phi]|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left.\left[\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right]\right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left.\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right]\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

условию ограниченности энергии:

$$\int\limits_{\Omega}(|\nabla\Pi|^2 + |\nabla\Phi|^2 + |\Pi|^2 + |\Phi|^2)\,dx < \infty, \tag{11}$$

где $\Omega = \Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup\Gamma_1$, и условию излучения на бесконечности:

$$\Pi(\rho,\varphi) = O(1/\rho), \quad \Phi(\rho,\varphi) = O(1/\rho) \quad \text{при } \rho\to\infty \text{ равномерно по } \varphi. \tag{12}$$

Зная продольные компоненты Π и Φ поля, его поперечные составляющие находим по формулам (6). Определённое так поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет всем условиям (1)–(4). Эквивалентность перехода к задаче (7)–(12) нарушается лишь при $\gamma^2 = \widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}$; в этом случае требуется отдельное рассмотрение системы (1).

2. Вариационная формулировка. Будем искать решения Π и Φ задачи (7)–(12) в пространствах Соболева

$$H_0^1(\Omega) = \{f : f\in H^1(\Omega), \quad f|_{\Gamma_0} = 0\} \quad \text{и} \quad H^1(\Omega)$$

соответственно; скалярное произведение и норма в них задаются равенствами

$$(f,g)_1 = \int\limits_{\Omega}(\nabla f\nabla\overline{g} + f\overline{g})\,dx, \quad \|f\|_1^2 = (f,f)_1.$$

Здесь мы используем обозначение для пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$, не совпадающее со стандартным: в нашем случае $f|_{\Gamma_0} = 0$, но, вообще говоря $f|_{\Gamma_1} \neq 0$.

Дадим другую, вариационную, формулировку задачи (7)–(12). Умножим уравнения (7) на произвольные пробные функции $u\in H_0^1(\Omega)$ и $v\in H^1(\Omega)$ соответственно, считая их пока непрерывно дифференцируемыми в Ω_1 и Ω_2, и применим формулу Грина [16, с. 329] отдельно для каждой области (возможность применения формулы Грина обоснована в [5]). Тогда с учётом граничного условия (8) будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_1}\frac{\varepsilon\overline{u}}{\kappa^2}\mathcal{L}\Pi\,dx = \int\limits_{\Gamma_1}\frac{\varepsilon\overline{u}}{\kappa^2}\overline{u}\left.\frac{\partial\Pi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}d\tau - \int\limits_{\Omega_1}\frac{\varepsilon}{\kappa^2}\nabla\Pi\nabla\overline{u}\,dx - \int\limits_{\Omega_1}\frac{\overline{u}}{\kappa^2}\left(\nabla\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Pi\,dx - \int\limits_{\Omega_1}\varepsilon\Pi\overline{u}\,dx$$

и

$$\int\limits_{\Omega_1}\frac{\mu\overline{v}}{\kappa^2}\mathcal{L}\Phi\,dx = \int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mu\overline{v}}{\kappa^2}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}d\tau - \int\limits_{\Omega_1}\frac{\mu}{\kappa^2}\nabla\Phi\nabla\overline{v}\,dx - \int\limits_{\Omega_1}\frac{\overline{v}}{\kappa^2}\left(\nabla\mu + \frac{\mu}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Phi\,dx - \int\limits_{\Omega_1}\mu\Phi\overline{v}\,dx,$$

где $\kappa^2 = \gamma^2 - \varepsilon\mu$.

Принимая во внимания правые части уравнений системы (7), получаем

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\varepsilon\overline{u}}{\kappa^2}\mathcal{L}\Pi\,dx = -\int\limits_{\Omega_1} \frac{\overline{u}}{\kappa^2}\left(\nabla\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Pi\,dx - \int\limits_{\Omega_1} \frac{\gamma\overline{u}}{\kappa^4}J(\varepsilon\mu,\Phi)\,dx$$

и

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\mu\overline{v}}{\kappa^2}\mathcal{L}\Phi\,dx = -\int\limits_{\Omega_1} \frac{\overline{v}}{\kappa^2}\left(\nabla\mu + \frac{\mu}{\kappa^2}\nabla\varepsilon\mu\right)\nabla\Phi\,dx + \int\limits_{\Omega_1} \frac{\gamma\overline{v}}{\kappa^4}J(\varepsilon\mu,\Pi)\,dx.$$

Таким образом, приходим к равенствам

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\varepsilon}{\kappa^2}\nabla\Pi\nabla\overline{u}\,dx + \int\limits_{\Omega_1} \varepsilon\Pi\overline{u}\,dx - \int\limits_{\Omega_1} \frac{\gamma\overline{u}}{\kappa^4}J(\varepsilon\mu,\Phi)\,dx = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon\overline{u}}{\kappa^2}\overline{u}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau \tag{13}$$

и

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\mu}{\kappa^2}\nabla\Phi\nabla\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Omega_1} \mu\Phi\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Omega_1} \frac{\gamma\overline{v}}{\kappa^4}J(\varepsilon\mu,\Pi)\,dx = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\mu\overline{v}}{\kappa^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau. \tag{14}$$

Аналогично, для области Ω_2 выполняются равенства

$$-\int\limits_{\Omega_2} \frac{1}{\kappa_0^2}\nabla\Pi\nabla\overline{u}\,dx - \int\limits_{\Omega_2} \Pi\overline{u}\,dx + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_c\overline{u}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} d\tau = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\varepsilon_c\overline{u}}{\kappa_0^2}\overline{u}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau \tag{15}$$

и

$$-\int\limits_{\Omega_2} \frac{1}{\kappa_0^2}\nabla\Phi\nabla\overline{v}\,dx - \int\limits_{\Omega_2} \Phi\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\mu_c\overline{v}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} d\tau = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\mu_c\overline{v}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau, \tag{16}$$

где $\kappa_0^2 = \gamma^2 - \varepsilon_c\mu_c$.

В силу условий сопряжения (9) из равенств (13), (15) и равенств (14), (16) соответственно следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\Pi\nabla\overline{u}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\gamma\overline{u}}{\widetilde{\kappa}^4}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Phi)\,dx + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c}{\kappa_0^2\kappa^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{u}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau - \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_c\overline{u}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Pi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} d\tau = 0$$

и

$$\int\limits_{\Omega} \widetilde{\mu}\Phi\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\Phi\nabla\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\gamma\overline{v}}{\widetilde{\kappa}^4}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Pi)\,dx - \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c}{\kappa_0^2\kappa^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{v}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau - \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\mu_c\overline{v}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} d\tau = 0.$$

Так как граница Γ_2 – окружность с радиусом r, последние формулы, можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\varepsilon_c\overline{u}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}dl = \int\limits_{\Omega} \widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\Pi\nabla\overline{u}\,dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\gamma\overline{u}}{\widetilde{\kappa}^4}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Phi)\,dx + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c}{\kappa_0^2\kappa^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{u}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\mu_c\overline{u}}{\kappa_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}dl = \int\limits_{\Omega} \widetilde{\mu}\Phi\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\Phi\nabla\overline{v}\,dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\gamma\overline{v}}{\widetilde{\kappa}^4}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Pi)\,dx - \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c}{\kappa_0^2\kappa^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{v}\bigg|_{\Gamma_1} d\tau.$$

Вне области Ω_2 имеем $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\mu} = 1$. Тогда система (7) примет вид

$$\mathcal{L}\Pi := \Delta\Pi - \kappa_0^2\Pi = 0, \quad \mathcal{L}\Phi := \Delta\Phi - \kappa_0^2\Phi = 0. \tag{17}$$

Функция Грина G внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (17) во внешности окружности Γ_2 определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\mathcal{L}G = -\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{\rho}, \quad \rho_0 > r;$$

$$G(x,x_0)|_{\Gamma_2} = 0,$$
$$G(x,x_0) = O(1/\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to \infty.$$

Здесь $G(x,x_0) = G(x_0,x)$, $x = (\rho,\varphi)$ и $x_0 = (\rho_0,\varphi_0)$.

Имеем [17, с. 203] в смысле распределений

$$\delta(\varphi-\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos(m(\varphi-\varphi_0)),$$

где в качестве основного пространства берётся пространство $C_0^\infty(-\pi,\pi)$ бесконечно дифференцируемых функций, определённых на интервале $(-\pi,\pi)$ и обращающихся в нуль в окрестности его концов. Тогда функция Грина $G(x,x_0)$ примет вид

$$G(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(\rho,\rho_0)\cos(m(\varphi-\varphi_0)),$$

где $G_m(\rho,\rho_0)$ – функция Грина следующей краевой задачи:

$$\mathcal{L}_m G_m := \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dG_m}{d\rho}\right) - \left(\frac{m^2}{\rho^2}+k_2^2\right)G_m = -\frac{\delta(\rho-\rho_0)}{2\pi\rho}, \quad \rho_0 \geqslant r;$$

$$G_m(r,\rho_0) = 0,$$
$$G_m(\rho,\rho_0) = O(1/\rho) \quad \text{равномерно по } m \text{ при } \rho \to \infty.$$

Нетрудно проверить, что функция Грина G_m имеет вид

$$G_m(\rho,\rho_0) = \begin{cases} \dfrac{K_m(\kappa_0\rho_0)}{K_m(\kappa_0 r)}(I_m(\kappa_0 r)K_m(\kappa_0\rho) - I_m(\kappa_0\rho)K_m(\kappa_0 r)), & r \leqslant \rho < \rho_0, \\ \dfrac{K_m(\kappa_0\rho)}{K_m(\kappa_0 r)}(I_m(\kappa_0\rho_0)K_m(\kappa_0 r) - I_m(\kappa_0 r)K_m(\kappa_0\rho_0)), & r \leqslant \rho_0 < \rho, \end{cases}$$

где функция K_m – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда), функция I_m – модифицированная функция Бесселя (функция Инфельда) [18, с. 198].

В силу условия на бесконечности выбираем следующую ветвь корня:

$$\kappa_0 = \sqrt{\gamma^2-\varepsilon_c\mu_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|\gamma^2-\varepsilon_c\mu_c| + \operatorname{Re}(\gamma^2-\varepsilon_c\mu_c)} +$$
$$+ i\operatorname{sign}\operatorname{Im}(\gamma^2-\varepsilon_c\mu_c)\sqrt{|\gamma^2-\varepsilon_c\mu_c| - \operatorname{Re}(\gamma^2-\varepsilon_c\mu_c)}).$$

Функция $\kappa_0(\gamma)$ является аналитической [16] в области $\mathbb{C}\backslash\Lambda_0$, где $\Lambda_0 := \{\gamma : \operatorname{Im}\gamma^2 = 0, \gamma^2 \leqslant \varepsilon_c\mu_c\}$.

Окончательно получаем

$$G(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{K_m(\kappa_0\rho_0)}{K_m(\kappa_0 r)}(I_m(\kappa_0 r)K_m(\kappa_0\rho) - I_m(\kappa_0\rho)K_m(\kappa_0 r))\cos(m(\varphi-\varphi_0)), & r \leqslant \rho < \rho_0, \\ \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{K_m(\kappa_0\rho)}{K_m(\kappa_0 r)}(I_m(\kappa_0\rho_0)K_m(\kappa_0 r) - I_m(\kappa_0 r)K_m(\kappa_0\rho_0))\cos(m(\varphi-\varphi_0)), & r \leqslant \rho_0 < \rho. \end{cases}$$

Вследствие второй формулы Грина справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B_r} (u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}u)\,dx = r\int\limits_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial v}{\partial\rho} - v\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=r} d\varphi.$$

Далее, пусть $v = G$, тогда будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B_r} (u\mathcal{L}G - G\mathcal{L}u)\,dx = r\int\limits_0^{2\pi} u\frac{\partial G}{\partial\rho}\Big|_{\rho=r} d\varphi.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B_r} (u\mathcal{L}G - G\mathcal{L}u)\,dx = -u(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_r.$$

Окончательно получаем

$$u(x_0) = -r\int\limits_0^{2\pi} u(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=r} d\varphi, \quad x_0 \in \mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_r, \tag{18}$$

где

$$\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=r} = -\frac{1}{2\pi r}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{K_m(\kappa_0\rho_0)}{K_m(\kappa_0 r)}\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right]. \tag{19}$$

Учитывая теорему о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя на границе [16, с. 115] и используя равенство (18), определим на границе Γ_2 значение нормальной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho_0}\Big|_{\rho_0=r} = -r\int\limits_0^{2\pi} u(x)\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho_0\partial\rho}\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi,$$

причём

$$\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho_0\partial\rho}\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} = -\frac{\kappa_0}{2\pi r}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)}\cos(m(\varphi-\varphi_0)). \tag{20}$$

Сходимость рядов (19) и (20) понимается в смысле распределений [17, с. 203].

Далее, переставив переменные x и x_0 местами, домножив на тестовые функции u и v и взяв интегралы $\int_{\Gamma_2}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\overline{v}dl$, получим

$$\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\overline{u}dl = -r^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}\Pi(x_0)\overline{u}(x)\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0.$$

$$\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\overline{v}dl = -r^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}\Phi(x_0)\overline{v}(x)\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0.$$

Воспользовавшись условиями сопряжения (10), будем иметь

$$-\frac{r^2}{\kappa_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{u}(x)\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 =$$

$$= \int\limits_\Omega \widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}\,dx + \int\limits_\Omega\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\Pi\nabla\overline{u}\,dx - \int\limits_\Omega\frac{\gamma\overline{u}}{\widetilde{\kappa}^4}J(\widetilde{\varepsilon\mu},\Phi)\,dx + \int\limits_{\Gamma_1}\gamma\frac{\varepsilon\mu-\varepsilon_c\mu_c}{\kappa_0^2\kappa^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{u}\Big|_{\Gamma_1} d\tau,$$

$$-\frac{r^2}{\kappa_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}\mu_c\Phi(x_0)\overline{v}(x)\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}}d\varphi\,d\varphi_0=$$

$$=\int\limits_\Omega\widetilde{\mu}\Phi\overline{v}\,dx+\int\limits_\Omega\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}\nabla\Phi\nabla\overline{v}\,dx+\int\limits_\Omega\frac{\gamma\overline{v}}{\widetilde{\kappa}^4}J(\widetilde{\varepsilon\mu},\Pi)\,dx-\int\limits_{\Gamma_1}\gamma\frac{\varepsilon\mu-\varepsilon_c\mu_c}{\kappa_0^2\kappa^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{v}\Big|_{\Gamma_1}d\tau.$$

Складывая последние выражения и домножая на γ^2, получаем *вариационное соотношение*

$$\gamma^2\int\limits_\Omega(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx+\int\limits_\Omega(\widetilde{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{u}+\widetilde{\mu}\nabla\Phi\nabla\overline{v}+\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx-\int\limits_\Omega(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\frac{\widetilde{\varepsilon\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}(\widetilde{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{u}+\widetilde{\mu}\nabla\Phi\nabla\overline{v}+\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx-\int\limits_\Omega\frac{\widetilde{\varepsilon\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\frac{\gamma^3}{\widetilde{\kappa}^4}(\widetilde{\mu}\overline{v}J(\widetilde{\mu},\Pi)-\widetilde{\varepsilon}\overline{u}J(\widetilde{\varepsilon\mu},\Phi))\,dx-\int\limits_{\Gamma_1}\gamma^3\frac{\varepsilon\mu-\varepsilon_c\mu_c}{\kappa^2\kappa_0^2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{v}-\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{u}\right)\Big|_{\Gamma_1}d\tau+$$

$$+r^2\frac{\gamma^2}{\kappa_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}(\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{u}(x)+\mu_c\Phi(x_0)\overline{v}(x))\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}}d\varphi\,d\varphi_0=0. \qquad (21)$$

Вариационное соотношение (21) получено для гладких функций u и v. Соотношение (21) распространяется на любые функции $u\in H_0^1(\Omega)$, $v\in H^1(\Omega)$ по непрерывности, поскольку непрерывность соответствующих форм будет доказана в следующем пункте.

Определение. Пару функций $\Pi\in H_0^1(\Omega)$, $\Phi\in H^1(\Omega)$, $(\|\Pi\|_1+\|\Phi\|_1\neq 0)$ будем называть *собственным вектором* задачи (7)–(12), отвечающим характеристическому числу (х.ч) $\gamma_0\in\in\mathbb{C}$, если при $\gamma=\gamma_0$ вариационное соотношение (21) выполнено для любых $u\in H_0^1(\Omega)$, $v\in H^1(\Omega)$.

3. Задача о спектре оператор-функции. Пусть $H=H_0^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со стандартным скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=(u_1,v_1)_1+(u_2,v_2)_1,\quad \|\mathbf{u}\|^2=\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2;\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in H,$$

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2)^{\text{т}},\quad \mathbf{v}=(v_1,v_2)^{\text{т}},\quad u_1,v_1\in H_0^1(\Omega),\quad u_2,v_2\in H^1(\Omega).$$

Тогда интегралы, входящие в соотношение (21), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$ от аргументов $\mathbf{u}=(\Pi,\Phi)^{\text{т}}$, $\mathbf{v}=(u,v)^{\text{т}}$, заданные на H. Каждая полуторалинейная форма $\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H$, задаёт [19, с. 67] линейный оператор $\mathrm{T}:H\to H$ по формуле

$$\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathrm{T}\mathbf{u},\mathbf{v})\quad\text{для любого}\quad \mathbf{v}\in H.$$

Оператор T ограничен, если форма ограничена: $|\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v})|\leqslant C\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Линейность оператора следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$\|\mathrm{T}\mathbf{u}\|^2=\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathrm{T}\mathbf{u})\leqslant C\|\mathbf{u}\|\|\mathrm{T}\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими линейные операторы:

$$\mathrm{k}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx=(\mathrm{K}\mathbf{u},\mathbf{v})\quad\text{для любого}\quad \mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{k}_\gamma(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\int\limits_\Omega\frac{\widetilde{\varepsilon\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{u}+\widetilde{\mu}\Phi\overline{v})\,dx=(\mathrm{K}_\gamma(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v})\quad\text{для любого}\quad \mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_{\Omega} (\widehat{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{u} + \nabla\Phi\nabla\overline{v} + \widehat{\varepsilon}\Pi\overline{u} + \Phi\overline{v})\,dx = (\mathrm{A}\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{a}_\gamma(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu}}{\widetilde{\kappa}^2}(\widehat{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{u} + \widetilde{\mu}\nabla\Phi\nabla\overline{v} + \varepsilon\Pi\overline{u} + \mu\Phi\overline{v})\,dx = (\mathrm{A}_\gamma(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_{\Omega} \frac{\gamma^3}{\widetilde{\kappa}^4}(\overline{v}J(\widetilde{\mu},\Pi) - \widetilde{\varepsilon}\overline{u}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Phi))\,dx = (\mathrm{B}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{s}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c}{\kappa^2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{v} - \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{u}\right)\Big|_{\Gamma_1} d\tau = (\mathrm{S}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H,$$

$$\mathrm{p}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\varphi,\varphi_0)(\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{u}(x) +$$

$$+ \mu_c\Phi(x_0)\overline{v}(x))\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 = (\mathrm{P}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H,$$

$$F(\varphi,\varphi_0) := r^2\frac{\gamma^2}{\kappa_0^2}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}}.$$

Известно [16, с. 428], что функция Грина $G(x,x_0)$ имеет логарифмическую особенность, которую можно выделить. Тогда аналогично [20, с. 61] находим

$$\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho_0\partial\rho}\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} = -\frac{\kappa_0}{2\pi r}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)}\cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) =$$

$$= \frac{\kappa_0}{\pi r}\frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} - \frac{\kappa_0}{\pi r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)}\cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) =$$

$$= \frac{\kappa_0}{\pi r}\frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} - \frac{1}{\pi r^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\kappa_0 r\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m\right)\cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) + \frac{1}{\pi r^2}\sum_{m=1}^{\infty} m\cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) =$$

$$= \frac{\kappa_0}{\pi r}\frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)} - \frac{1}{\pi r^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\kappa_0 r\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m\right)\cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) - \frac{1}{\pi r^2}\frac{1}{1-\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)}.$$

Для общего члена последнего ряда имеем

$$\kappa_0 r\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m = O(1/m) \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

а значит, ряд сходится условно при $\varphi\neq\varphi_0$.

Оператор $\mathrm{P}(\gamma)$ представим как сумму компактного и гиперсингулярного операторов

$$\mathrm{P}(\gamma) = \mathrm{K_P} + \mathrm{P_G}, \tag{22}$$

где

$$\mathrm{k_p}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \frac{\kappa_0 r}{\pi}\frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{u}(x) + \mu_c\Phi(x_0)\overline{v}(x)\Big)\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\kappa_0 r\frac{K'_m(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)}+m\right)\cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right)(\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{u}(x)+\mu_c\Phi(x_0)\overline{v}(x))\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}}d\varphi\, d\varphi_0=$$

$$=(\mathrm{K_P}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v})\quad \text{для любого}\quad \mathbf{v}\in H$$

и

$$\mathrm{p_G}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{u}(x)+\mu_c\Phi(x_0)\overline{v}(x)}{1-\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)}\Big|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}}d\varphi\, d\varphi_0=(\mathrm{P_G}\mathbf{u},\mathbf{v})\quad \text{для любого}\quad \mathbf{v}\in H.$$

Так как функции $\Pi, u, \Phi, v \in H^1(\Omega)$, то следы этих функций на Γ_2 принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_2)$ [21, с. 59]. Гиперсингулярный оператор $\mathrm{P_G}: H^{1/2}(\Gamma_2)\to H^{-1/2}(\Gamma_2)$ ограничен [22, с. 19]. В силу антидуального спаривания пространств $H^{1/2}(\Gamma_2)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ [23, с. 258] получаем, что полуторалинейная форма $\mathrm{p_G}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ограничена в H. Далее, учитывая скорость убывания коэффициентов ряда для $\mathrm{k_p}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, заключаем, что этот ряд определяет интегральный оператор с логарифмической особенностью ядра и оператор $\mathrm{K_P}: H^{1/2}(\Gamma_2)\to H^{1/2}(\Gamma_2)$ будет компактным. Таким образом, оператор-функция $P(\gamma): H\to H$ ограничена.

Ограниченность форм $\mathrm{a}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $\mathrm{a}_\gamma(\mathbf{u},\mathbf{v})$ очевидна, а форм $\mathrm{k}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $\mathrm{k}_\gamma(\mathbf{u},\mathbf{v})$ следует из неравенства Пуанкаре [21, с. 59]. Ограниченность форм $\mathrm{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $\mathrm{s}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ установлена в [10].

Теперь вариационную задачу (21) можно записать в операторном виде

$$(\mathrm{N}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v})=0\quad \text{для любого}\quad \mathbf{v}\in H,$$

или равносильно

$$\mathrm{N}(\gamma)\mathbf{u}=0,\quad \mathrm{N}(\gamma): H\to H,$$

$$\mathrm{N}(\gamma):=\gamma^2\mathrm{K}+\mathrm{A}-\mathrm{K}+\mathrm{A}_\gamma-\mathrm{K}_\gamma+\mathrm{B}-\mathrm{S}+\mathrm{P}. \tag{23}$$

Уравнение (23) – операторная запись вариационного соотношения (21). Характеристические числа и собственные векторы оператор-функции N совпадают по определению с собственными значениями и собственными векторами задачи (7)–(10) при $\gamma^2\neq\widetilde{\varepsilon\mu}$.

4. Свойства оператор-функции. Приведём следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в оператор-функцию $\mathrm{N}(\gamma)$ (доказательства в [5, 10]).

Лемма 1. *Операторы* K *и* K_γ *компактные. Оператор* K *положительно определён и для его собственных чисел верна асимптотика*

$$\lambda_n(\mathrm{K})=O(n^{-1})\quad \text{при}\quad n\to\infty.$$

Лемма 2. *Ограниченный оператор* $\mathrm{A}: H\to H$ *является положительно определённым:* $\mathrm{A}\geqslant \mathrm{I}$.

Лемма 3. *Оператор* B_γ *компактен. Оператор-функция* $\mathrm{B}_\gamma(\gamma)$ *голоморфна в области* $\mathbb{C}\backslash\Lambda_B$, *где*

$$\Lambda_B:=\left\{\gamma: \operatorname{Im}\gamma=0,\quad |\gamma|=\sqrt{\varepsilon_c\mu_c},\quad \min_{x\in\overline{\Omega}_1}\sqrt{\varepsilon(x)\mu(x)}\leqslant|\gamma|\leqslant\max_{x\in\overline{\Omega}_1}\sqrt{\varepsilon(x)\mu(x)}\right\}.$$

Обозначим через $\varrho(\mathrm{N})$ резольвентное множество оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$, т.е. совокупность тех $\gamma\in\mathbb{C}$, при которых оператор $\mathrm{N}(\gamma)$ имеет ограниченный обратный. Спектр оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$ будем обозначать через $\sigma(\mathrm{N})$, т.е. $\sigma(\mathrm{N})=\mathbb{C}\setminus\varrho(\mathrm{N})$.

Лемма 4. *Существует* $\widetilde{\gamma}\in\mathbb{R}$ *такое, что оператор* $\mathrm{N}(\widetilde{\gamma})$ *непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество* $\varrho(\mathrm{N})$ *оператор-функции* $\mathrm{N}(\gamma)$ *не пусто;* $\varrho(\mathrm{N})\neq\varnothing$.

Доказательство. Пусть $\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma>0$ и $\gamma\to+\infty$. Рассмотрим следующую оператор-функцию:

$$\mathrm{N}(\gamma)=\mathrm{N}_1(\gamma)+\mathrm{N}_2(\gamma),$$

где $\mathrm{N}_1(\gamma) = \gamma^2\mathrm{K}+\mathrm{A}-\mathrm{K}+\gamma\mathrm{P}_0$ и $\mathrm{N}_2(\gamma) = \mathrm{A}_\gamma-\mathrm{K}_\gamma+\mathrm{B}-\mathrm{S}+\mathrm{P}(\gamma)-\gamma\mathrm{P}_0$, а оператор $\mathrm{P}_0 : H \to H$ определяется полуторалинейной формой

$$\mathrm{p}_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) d\varphi \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} (\varepsilon_c \Pi(x_0)\overline{u}(x) + \mu_c \Phi(x_0)\overline{v}(x))\bigg|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi_0 = (\mathrm{P}_0\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H.$$

Известно [17, с. 203], что (в смысле распределений)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\phi) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi l) = 2\pi\delta(\phi),$$

где $\phi = |\varphi-\varphi_0|$, $0 \leqslant |\phi| \leqslant \pi$ и в качестве основного пространства берётся, как и в п. 2, пространство $C_0^\infty(-\pi,\pi)$. Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(m(\varphi-\varphi_0)\right) = 2\pi\delta(\varphi-\varphi_0).$$

Тогда оператор P_0 определяется формой

$$(\mathrm{P}_0\mathbf{u},\mathbf{v}) := 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (\varepsilon_c \Pi(x)\overline{u}(x) + \mu_c \Phi(x)\overline{v}(x))|_{\rho=r}\, d\varphi \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v}\in H.$$

Очевидно, что $(\mathrm{P}_0\mathbf{u},\mathbf{u}) = 2\pi\int_0^{2\pi}(\varepsilon_c|\Pi(x)|^2 + \mu_c|\Phi(x)|^2)|_{\rho=r}\,d\varphi > 0$ при $\|\mathbf{u}\| \neq 0$. Так как следы функций Π, u, Φ, v на Γ_2 принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_2)$, заключаем, что оператор $P_0 : H \to H$ ограничен.

Принимая во внимание асимптотику функций K_m при $\gamma\to+\infty$ [18, с. 198], имеем

$$F(\varphi,\varphi_0) \sim \gamma + O(1/\gamma)$$

и, следовательно,

$$\|\mathrm{P}(\gamma) - \gamma\mathrm{P}_0\| = O(1/\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma\to+\infty.$$

Тогда оператор-функцию $\mathrm{N}(\gamma)$ можно рассматривать как возмущение операторного пучка N_1 оператор-функцией N_2 при больших γ.

Из свойств операторов K и A вытекает, что найдётся такое большое $\widetilde{\gamma} > 0$, при котором для любого $\mathbf{u}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{N}_1(\widetilde{\gamma})\mathbf{u},\mathbf{u}) = \widetilde{\gamma}^2(\mathrm{K}\mathbf{u},\mathbf{u}) + (\mathrm{A}\mathbf{u},\mathbf{u}) - (\mathrm{K}\mathbf{u},\mathbf{u}) + \widetilde{\gamma}(\mathrm{P}_0\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \|\mathbf{u}\|^2.$$

Поэтому $\widetilde{\gamma} \in \varrho(\mathrm{N}_1)$, где $\varrho(\mathrm{N}_1)$ – резольвентное множество пучка N_1. Причём, используя лемму 7.1 из [24, с. 309], имеем оценку $\|\mathrm{N}_1^{-1}(\widetilde{\gamma})\| \leqslant 1$. Выберем $\widetilde{\gamma}$ так, чтобы $\|\mathrm{N}_2(\widetilde{\gamma})\| < 1$. Получаем, что существует и ограничен оператор

$$(\mathrm{N}_1(\widetilde{\gamma}) + \mathrm{N}_2(\widetilde{\gamma}))^{-1} = (\mathrm{I} + \mathrm{N}_1^{-1}(\widetilde{\gamma})\mathrm{N}_2(\widetilde{\gamma}))\mathrm{N}_1^{-1}(\widetilde{\gamma}).$$

Лемма доказана.

Замечание. В дальнейшем нам понадобится продолжение функций $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ в Ω_2 с сохранением гладкости. Так как $\varepsilon,\mu \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, такое продолжение легко осуществить [25, с. 122]. При этом сохраним старые обозначения за продолженными функциями ε и μ.

Поскольку соотношение (21) справедливо для любых $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, введём пробные функции u и v такие, что $\overline{\mathrm{u}} = \eta^{-1}\overline{u}$, $\overline{\mathrm{v}} = \eta^{-1}\overline{v}$, где $\eta = \gamma^2\chi - \epsilon$, $\chi = (\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c)^{-1} > 0$, $\epsilon = \varepsilon\mu(\varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c)^{-1} > 0$. Очевидно, что так определённые функции u и v принадлежат тем же пространствам, что и исходные функции u и v.

Соотношение (21) примет вид

$$\int\limits_\Omega \eta\kappa_0^2(1-\widetilde{\kappa}^{-2})(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{\mathrm{u}} + \widetilde{\mu}\Phi\overline{\mathrm{v}})\,dx + \int\limits_\Omega \eta\frac{\kappa_0^2}{\widetilde{\kappa}^2}(\widetilde{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{\mathrm{u}} + \widetilde{\mu}\nabla\Phi\nabla\overline{\mathrm{v}} + \varepsilon\Pi\overline{\mathrm{u}} + \mu\Phi\overline{\mathrm{v}})\,dx +$$

$$+\int\limits_\Omega \frac{\kappa_0^2}{\widetilde{\kappa}^2}(\widetilde{\varepsilon}\overline{\mathrm{u}}\nabla\Pi\nabla\eta + \widetilde{\mu}\overline{\mathrm{v}}\nabla\Phi\nabla\eta)\,dx + \int\limits_\Omega \gamma\eta\frac{\kappa_0^2}{\widetilde{\kappa}^4}(\widetilde{\mu}\overline{\mathrm{v}}J(\widetilde{\mu},\Pi) - \widetilde{\varepsilon}\overline{\mathrm{u}}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Phi))\,dx - \gamma\int\limits_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{\mathrm{v}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{\mathrm{u}}\right)\bigg|_{\Gamma_1} d\tau +$$

$$+ r^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 G(x,x_0)}{\partial\rho\partial\rho_0}\eta(\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{\mathrm{u}}(x) + \mu_c\Phi(x_0)\overline{\mathrm{v}}(x))\bigg|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 = 0. \qquad (24)$$

Имеем следующие ограниченные операторы:

$$\widetilde{\mathrm{k}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \eta\kappa_0^2(1-\widetilde{\kappa}^{-2})(\widetilde{\varepsilon}\Pi\overline{\mathrm{u}} + \widetilde{\mu}\Phi\overline{\mathrm{v}})\,dx = (\widetilde{\mathrm{K}}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

$$\widetilde{\mathrm{a}}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_\Omega \chi(\widetilde{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{\mathrm{u}} + \widetilde{\mu}\nabla\Phi\nabla\overline{\mathrm{v}} + \varepsilon\Pi\overline{\mathrm{u}} + \mu\Phi\overline{\mathrm{v}})d\mathrm{x} = (\widetilde{\mathrm{A}}_1\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

$$\widetilde{\mathrm{a}}_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_\Omega \widetilde{\epsilon}\epsilon(\widetilde{\varepsilon}\nabla\Pi\nabla\overline{\mathrm{u}} + \widetilde{\mu}\nabla\Phi\nabla\overline{\mathrm{v}} + \varepsilon\Pi\overline{\mathrm{u}} + \mu\Phi\overline{\mathrm{v}})d\mathrm{x} = (\widetilde{\mathrm{A}}_2\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

$$\widetilde{\mathrm{s}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\overline{\mathrm{v}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\overline{\mathrm{u}}\right)\bigg|_{\Gamma_1} d\tau = (\widetilde{\mathrm{S}}\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

$$\widetilde{\mathrm{b}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_\Omega \frac{\kappa_0^2}{\widetilde{\kappa}^2}((\widetilde{\varepsilon}\overline{\mathrm{u}}\nabla\Pi\nabla\eta + \widetilde{\mu}\overline{\mathrm{v}}\nabla\Phi\nabla\eta) +$$

$$+ \frac{\gamma\eta}{\widetilde{\kappa}^2}(\widetilde{\mu}\overline{\mathrm{v}}J(\widetilde{\mu},\Pi) - \widetilde{\varepsilon}\overline{\mathrm{u}}J(\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\mu},\Phi)))\,dx = (\widetilde{\mathrm{B}}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

$$\widetilde{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\kappa_0 r}{\pi}\frac{K_1(\kappa_0 r)}{K_0(\kappa_0 r)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{\mathrm{u}}(x) + \mu_c\Phi(x_0)\overline{\mathrm{v}}(x))\bigg|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta\sum_{m=1}^{\infty}\left(\kappa_0 r\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + m\right)\cos[m(\varphi-\varphi_0)](\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{\mathrm{u}}(x) + \mu_c\Phi(x_0)\overline{\mathrm{v}}(x))\bigg|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 =$$

$$= (\widetilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}}(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

$$\widetilde{\mathrm{p}}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\chi\frac{\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{\mathrm{u}}(x) + \mu_c\Phi(x_0)\overline{\mathrm{v}}(x)}{1-\cos(\varphi-\varphi_0)}\bigg|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 = (\widetilde{\mathrm{P}}_1\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H$$

и

$$\widetilde{\mathrm{p}}_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\epsilon\frac{\varepsilon_c\Pi(x_0)\overline{\mathrm{u}}(x) + \mu_c\Phi(x_0)\overline{\mathrm{v}}(x)}{1-\cos(\varphi-\varphi_0)}\bigg|_{\substack{\rho=r\\ \rho_0=r}} d\varphi\,d\varphi_0 = (\widetilde{\mathrm{P}}_2\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{v} \in H,$$

здесь $\widetilde{\epsilon} = \varepsilon_c\mu_c\varepsilon\mu\widetilde{\varepsilon}^{-1}\widetilde{\mu}^{-1}$.

Таким образом, мы получили следующую оператор-функцию:

$$\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \in H, \quad \widetilde{\mathrm{N}}(\gamma) : H \to H,$$

$$\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma) := \widetilde{\mathrm{K}} + \widetilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}} + \widetilde{\mathrm{B}} + \gamma^2(\widetilde{\mathrm{A}}_1 + \widetilde{\mathrm{P}}_1) - \gamma\widetilde{\mathrm{S}} - (\widetilde{\mathrm{A}}_2 + \widetilde{\mathrm{P}}_2). \tag{25}$$

Уравнение (25) – операторная запись вариационного соотношения (24). Спектры оператор-функций N и $\widetilde{\mathrm{N}}$ совпадают: $\sigma(\mathrm{N}(\gamma)) = \sigma(\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma))$. Операторы $\widetilde{\mathrm{K}}(\gamma)$, $\widetilde{\mathrm{B}}(\gamma)$, $\widetilde{\mathrm{K}}_P(\gamma)$, $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ и $\widetilde{\mathrm{A}}_2$ сохраняют все свойства операторов K, $\mathrm{B}(\gamma)$, $\mathrm{K}_P(\gamma)$ и A, перечисленные в леммах 1–3.

Справедливы следующие леммы [5, 11].

Лемма 5. *Оператор $\widetilde{\mathrm{S}}$ самосопряжён, $\widetilde{\mathrm{S}} = \widetilde{\mathrm{S}}^*$, и имеют место неравенства*

$$-\frac{1}{2}\mathrm{I} \leqslant \widetilde{\mathrm{S}} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{I}. \tag{26}$$

Лемма 6. *Операторы $\widetilde{\mathrm{P}}_1$ и $\widetilde{\mathrm{P}}_2$ положительные, $\widetilde{\mathrm{P}}_1 > 0$, $\widetilde{\mathrm{P}}_2 > 0$.*

Теорема 1. *Оператор-функция $\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma) : H \to H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области $\Lambda := \mathbb{C}\backslash(\Lambda_B \bigcup \Lambda_0 \bigcup \Lambda_F)$, где $\Lambda_F := \{\gamma : \operatorname{Im}\gamma = 0,\ \ \gamma_* \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma^*\}$, а*

$$\gamma_* = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 + 4(\max\limits_{x\in\Omega} \varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c)^{-2}}}{2(\|\widetilde{\mathrm{A}}_1\| + \|\widetilde{\mathrm{P}}_1\|)}, \quad \gamma^* = \frac{1/2 + \sqrt{1/4 + 4(\|\widetilde{\mathrm{A}}_2\| + \|\widetilde{\mathrm{P}}_2\|)(\|\widetilde{\mathrm{A}}_1\| + \|\widetilde{\mathrm{P}}_1\|)}}{2(\max\limits_{x\in\Omega} \varepsilon\mu - \varepsilon_c\mu_c)^{-1}}.$$

Доказательство. В области $\mathbb{C}\backslash\Lambda_0$ функция

$$\kappa_0\frac{K_m'(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} = -\kappa_0\frac{K_{m+1}(\kappa_0 r)}{K_m(\kappa_0 r)} + \frac{m}{r}$$

является аналитической (как функция от γ). Так как $\operatorname{Re}\kappa_0 > 0$, функции $K_m(\kappa_0 r)$ не имеют нулей [18, с. 198]. Принимая во внимание лемму 3, получаем, что в области $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_B \bigcup \Lambda_0)$ оператор-функция $\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma)$ является аналитической.

Запишем оператор-функцию $\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma)$ следующим образом: $\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma) := \widetilde{\mathrm{N}}_K(\gamma) + \widetilde{\mathrm{N}}_0(\gamma)$, где $\widetilde{\mathrm{N}}_K(\gamma) = \widetilde{\mathrm{K}} + \widetilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}} + \widetilde{\mathrm{B}}$ и $\widetilde{\mathrm{N}}_0(\gamma) = \gamma^2(\widetilde{\mathrm{A}}_1 + \widetilde{\mathrm{P}}_1) - \gamma\widetilde{\mathrm{S}} - (\widetilde{\mathrm{A}}_2 + \widetilde{\mathrm{P}}_2)$.

Покажем, что оператор $\widetilde{\mathrm{N}}_0(\gamma)$ является обратимым. Пусть $\gamma = \gamma' + i\gamma''$, $\gamma'' \neq 0$, тогда

$$\frac{1}{\gamma''}\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{N}_0(\gamma)}{\gamma}\right) = \widetilde{\mathrm{A}}_1 + \frac{\widetilde{\mathrm{A}}_2}{|\gamma|^2} \geqslant \mathrm{I}.$$

Далее, пусть $\operatorname{Im}\gamma = 0$. Для квадратичной формы $(\mathrm{N}_0(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{u})$ рассмотрим уравнение

$$(\mathrm{N}_0(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = ((\gamma^2(\widetilde{\mathrm{A}}_1 + \widetilde{\mathrm{P}}_1) - \gamma\widetilde{\mathrm{S}} - (\widetilde{\mathrm{A}}_2 + \widetilde{\mathrm{P}}_2))\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Выражая из этого уравнения $(\widetilde{\mathrm{S}}\mathbf{u}, \mathbf{u})$ и принимая во внимание оценку (26), получаем двойное неравенство

$$-\frac{1}{2}\mathrm{I} \leqslant \frac{1}{\gamma}(\widetilde{\mathrm{A}}_2 + \widetilde{\mathrm{P}}_2) - \gamma(\widetilde{\mathrm{A}}_1 + \widetilde{\mathrm{P}}_1) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{I}. \tag{27}$$

Решая неравенства (27) относительно γ, получаем, что вне множества $\gamma_* \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma^*$ оператор $\mathrm{N}_0(\gamma)$ положительно или отрицательно определён и поэтому непрерывно обратим [24, с. 37], и, следовательно, оператор-функция $\widetilde{\mathrm{N}}(\gamma)$ является фредгольмовой как сумма обратимого $\widetilde{\mathrm{N}}_0(\gamma)$ и компактного $\widetilde{\mathrm{N}}_K(\gamma)$ операторов. Теорема доказана.

Теорема 2. *Спектр оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma) : H \to H$ является дискретным в Λ, т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $I_0 \subset \Lambda$.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [24].

Заключение. Доказаны теоремы о дискретности спектра на поверхностных волнах регулярной открытой неоднородной волноведущей структуры прямоугольного сечения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-31-70010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В.* Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М., 1989.
2. *Смирнов Ю.Г.* Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 140–147.
3. *Смирнов Ю.Г.* Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 3. С. 597–599.
4. *Делицин А.Л.* Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 629–633.
5. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.
6. *Ложечко В.В., Шестопалов Ю.В.* О задачах возбуждения открытых цилиндрических резонаторов с нерегулярной границей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 1. С. 71–82.
7. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории. Казань, 2009.
8. *Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.* О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1298–1309.
9. *Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.* Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 6. С. 1–4.
10. *Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.* Метод оператор-функций в задаче о нормальных волнах неоднородного волновода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1196–1206.
11. *Smirnov Y., Smolkin E.* Mathematical theory of normal waves in an open metal-dielectric regular waveguide of arbitrary cross section // Math. Model. and Anal. 2020. V. 25. № 3. P. 391–408.
12. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М., 1984.
13. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М., 1987.
14. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М., 1988.
15. *Маркузе Д.* Оптические волноводы. М., 1974.
16. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
17. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2004.
18. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
19. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
20. *Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G., Chernokozhin E.V.* Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. Holland, 2000.
21. *Adams R.A.* Sobolev Spaces. New York, 1975.
22. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. М., 1996.
23. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
24. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
25. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М., 1979.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 04.03.2021 г.
После доработки 04.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.