УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА НЕЙМАНА–ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2021 г. Р. С. Хайруллин

Для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u=0$ с параметром $\alpha\leqslant-1/2$, заданного в смешанной области, лежащей в правой полуплоскости и ограниченной полуосью $y\geqslant 0$ и характеристикой $x=2\sqrt{-y}$, рассматривается задача Неймана–Трикоми, в которой на полуоси задаются значения нормальной производной искомой функции, на характеристике – значения самой функции, а на особой линии – условия склеивания. Решение ищется в классе функций, имеющих на бесконечности особенности порядка не выше заданного. Получены достаточные условия на входные данные задачи, при выполнении которых она однозначно разрешима. Доказательство проводится методом интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121090065

1. Постановка задачи. Начало исследованиям краевых задач для уравнений смешанного типа положено работой Ф. Трикоми [1]. Позднее подобные задачи широко изучались для разных уравнений, главным образом для уравнений со слабым вырождением. Для уравнений же с сильным вырождением такие задачи исследованы гораздо хуже: для них имеются только отдельные разрозненные результаты (см., например, [2–15]).

В работах автора [12; 15, с. 117] рассматривалась задача Трикоми для уравнения

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0,\quad \alpha\leqslant-1/2, \tag{1}$$

в смешанной области D, эллиптическая часть которой D_1 совпадает с первым квадрантом, а гиперболическая часть D_2 представляет собой криволинейный угол, ограниченный характеристиками $x-2\sqrt{-y}=0$ и $y=0$.

В данной статье для уравнения (1) в указанной области исследуется задача Неймана–Трикоми.

Через n и m обозначим натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$-1/2<\alpha+n=\alpha_0\leqslant 1/2\quad \text{и}\quad 0<2\alpha+m-1=\delta\leqslant 1.$$

Очевидно, что $m=2n+2$, $\delta=2\alpha_0+1$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и $m=2n+1$, $\delta=2\alpha_0$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

Задача NT_α. В области D найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит классу

$$C(D\bigcup\{(0,y):y>0\}\bigcup\{(x,y):x-2\sqrt{-y}=0\})\bigcap C^1(D_1\bigcup\{(0,y):y>0\});$$

2) для $(x,y)\in D_1$ имеют место соотношения

$$u=o(R^{2-2\alpha}),\quad u_x=o(R^{1-2\alpha}),\quad u_y=o(R^{-2\alpha})\quad \text{при}\quad R\to+\infty, \tag{2}$$

где $R^2=x^2+4y$;

3) функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D_1\bigcup D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D_1\bigcup D_2$;

4) существуют пределы $(i=1,2)$

$$\nu_i(x)=\lim_{\substack{y\to0\\(x,y)\in D_i}}|y|^\alpha(u(x,y)-A_\alpha(x,y,\tau))_y,\quad x>0, \tag{3}$$

и выполняется условие склеивания

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad x > 0, \tag{4}$$

здесь принято обозначение

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

а функция $A_\alpha(x,y,\tau)$ определяется формулами

$$A_\alpha(x,y,\tau) = \sum_{s=1}^{[m/2]} \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s y^s}{(\alpha)_s s!}, \quad \alpha \neq -n,$$

$$A_\alpha(x,y,\tau) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s y^s}{(\alpha)_s s!} - \frac{\tau^{(2n+2)}(x) y^{n+1}}{n!(n+1)!}\left(\ln|y| - \sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\right), \quad \alpha = -n,$$

$[\cdot]$ – целая часть числа, $(\alpha)_s$ – символ Похгаммера;

5) функция $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u_x(0,y) = \varphi(y), \quad y > 0, \tag{6}$$

$$u(x,y)\,|_{x-2\sqrt{-y}=0} = \omega(x), \quad x \geqslant 0, \tag{7}$$

где $\varphi(y)$ и $\omega(x)$ – заданные функции.

На функции $\varphi(y)$ и $\omega(x)$ наложим следующие условия.

Условие 1. Функция $\varphi(y)$ принадлежит классу $C[0,+\infty)$ и имеет представления

$$\varphi(y) = \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\varphi^{\{s\}}(0)}{s!} y^s + \varphi_0(y) y^\epsilon \quad \text{при} \quad y \to 0,$$

$$\varphi(y) = \varphi_\infty(y) y^\chi \quad \text{при} \quad y \to +\infty,$$

где $\epsilon > (-1-2\alpha)/4$, если $-1/2 < \alpha_0 \leqslant 0$, и $\epsilon > (-2\alpha - n)/2$, если $0 < \alpha_0 \leqslant 1/2$; $\chi < -\alpha/2$, если n – чётное, и $\chi < (1-\delta+n)/2$, если n – нечётное; $\varphi_0(x)$ и $\varphi_\infty(x)$ – ограниченные функции; $\varphi^{\{s\}}(0)$ – разностные производные порядка s в точке 0.

Условие 2. Функция $\omega(x)$ принадлежит классу $C^n[0,+\infty)\bigcap C^{n+1,\gamma}(0,+\infty)$, $\gamma > 1/2 - \alpha_0$; её производная $\omega^{(n+1)}(x)$ может иметь особенность при $x=0$ только порядка ниже $\min(1/2+\alpha_0,\delta)$, и при $x \to +\infty$ справедливо представление

$$\omega^{(n+1)}(x) = \omega_\infty(x) x^\beta,$$

где $\beta < -\alpha_0$, если n – чётное, и $\beta < 1-\delta$, если n – нечётное, $\omega_\infty(x)$ – ограниченная функция.

Условие 3. Выполняются условия сопряжения

$$(-1)^s \varphi^{\{s\}}(0)(\alpha - 1/2)_{2s+1} = \omega^{(2s+1)}(0)(\alpha-1/2)_{s+1}, \quad s = \overline{0,[(n-1)/2]}.$$

Обозначим каждую из частей равенства (4) через $\nu(x)$ и потребуем, чтобы функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ удовлетворяли следующим условиям.

Условие 4. Функция $\tau(x)$ принадлежит классу $C^n[0,+\infty)\bigcap C^{m,\lambda}(0,+\infty)$, $\lambda > 1-\delta$; её производная $\tau^{(n+1)}(x)$ может иметь при $x=0$ особенность только порядка ниже $\min(1/2+\alpha_0,\delta)$, и при $x \to +\infty$ справедливо представление

$$\tau^{(n+1)}(x) = \tau_\infty(x) x^\theta,$$

где $\theta < -\alpha_0$, если n – чётное, и $\theta < 1-\delta$, если n – нечётное, $\tau_\infty(x)$ – ограниченная функция.

Условие 5. Функция $\nu(x)$ принадлежит классу $C(0,+\infty)$ и может иметь особенность при $x=0$ только порядка ниже $3/2-\alpha$.

Задачу NT_α исследуем методом интегральных уравнений. При этом важную роль играют основные соотношения между функциями τ и ν, полученные из эллиптической D_1 и гиперболической D_2 подобластей.

2. Основное соотношение из гиперболической подобласти. В гиперболической подобласти D_2 задача совпадает с задачей Трикоми. Для вывода соотношения используется представление решения задачи Коши с начальными условиями вида (5) и (3), из которого с учётом краевого условия (7) вытекает справедливость следующих утверждений (см., например, [15, с. 25, 26, 157]).

Теорема 1. *Основное соотношение между τ и ν из гиперболической подобласти имеет вид*

$$\Gamma(1-\alpha)\nu(x) = (-1)^n\Gamma(\alpha)\tau^{(m)}(x) - \Omega_\alpha(x,\omega^{(n+1)}) \quad \textit{при} \quad \alpha_0 = 1/2; \tag{8}$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu(x) = \frac{2}{n!}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\int\limits_0^x \tau^{(n+1)}(\xi)\ln(x-\xi)\,d\xi - \Omega_\alpha(x,\omega^{(n+1)}) \quad \textit{при} \quad \alpha_0 = 0; \tag{9}$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\delta)}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int\limits_0^x \tau^{(n+1)}(\sigma)(x-\sigma)^{\delta-1}\,d\sigma - \Omega_\alpha(x,\omega^{(n+1)}) \quad \textit{при} \quad \delta<1, \tag{10}$$

где

$$\Omega_\alpha(x,\omega^{(n+1)}) = \frac{(-1)^n 2^{1-2\alpha-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha_0+1/2)}x^{\alpha-1/2}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \omega^{(n+1)}(\sigma/2)(x-\sigma)^{\alpha_0-1/2}\,d\sigma.$$

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$\tau^{(s)}(0) = \omega^{(s)}(0)2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s, \quad s=\overline{0,n}.$$

Лемма 1. *Пусть функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию 2. Тогда функция $\Omega_\alpha(x,\omega^{(n+1)})$ может иметь при $x=0$ особенность только порядка ниже $\min\{3/2-\alpha, m-n\}$, а при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $1-\alpha$, если n – чётное, и порядка выше $m-n-1$, если n – нечётное.*

3. Смешанная задача для первого квадранта. Для вывода основного соотношения из эллиптической подобласти воспользуемся решением смешанной задачи для уравнения (1) в первом квадранте с краевыми условиями (5), (6) в классе функций, удовлетворяющих на бесконечности условиям (2). Его построим методом функции Грина. Фундаментальное решение уравнения (1) найдено в работе [4], оно имеет вид

$$q(x,y;x_0,y_0) = ky_0^{1-\alpha}(r_1^2)^{\alpha-3/2}F\left(\frac{3}{2}-\alpha,\frac{3}{2}-\alpha,3-2\alpha,1-\frac{r^2}{r_1^2}\right), \tag{11}$$

где

$$r^2=(x-x_0)^2+4(\sqrt{y}-\sqrt{y_0})^2, \quad r_1^2=(x-x_0)^2+4(\sqrt{y}+\sqrt{y_0})^2, \quad k=\Gamma^2(3/2-\alpha)4^{2-2\alpha}/\pi\Gamma(3-2\alpha).$$

Функция (11) по переменным (x,y) является решением уравнения

$$v_{xx}+yv_{yy}+(2-\alpha)v_y=0, \tag{12}$$

а по переменным (x_0,y_0) – решением уравнения (1), при $(x,y)=(x_0,y_0)$ она имеет логарифмическую особенность.

Определение. Функция $G(x,y;x_0,y_0)$ называется *функцией Грина* смешанной задачи (2), (5), (6) для уравнения (1), если она обладает следующими свойствами:

1) для неё имеет место представление

$$G(x,y;x_0,y_0)=q(x,y;x_0,y_0)+u_0(x,y;x_0,y_0),$$

где $u_0(x,y;x_0,y_0)$ – регулярное решение уравнения (1) по переменным (x_0,y_0) и уравнения (12) по переменным (x,y) при $(x,y)\in D_1$, $(x_0,y_0)\in D_1$;

2) она удовлетворяет краевым условиям $((x_0,y_0)\in D_1)$

$$|G(x,0;x_0,y_0)|<+\infty,$$

$$G_x(x,y;x_0,y_0)=O(x)\quad \text{при}\quad x\to 0,\quad y>0;$$

3) для неё выполняются соотношения на бесконечности

$$G=O(R^{2\alpha-3}),\quad G_x=O(R^{2\alpha-4}),\quad G_y=O(R^{2\alpha-5})\quad \text{при}\quad R\to+\infty,$$

где $R^2=x^2+4y$, $(x,y)\in D_1$, $(x_0,y_0)\in D_1$.

Методом точечных источников доказывается

Лемма 2. *Функция Грина имеет вид*

$$G(x,y;x_0,y_0)=q(x,y;x_0,y_0)+q(-x,y;x_0,y_0).$$

Имеет место

Теорема 3. *Смешанная задача (1), (2), (5), (6) имеет единственное решение*

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(3/2-\alpha)y^{1-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)4^{\alpha-1}}\int\limits_0^{+\infty}\tau(\xi)\Big(((\xi-x)^2+4y)^{\alpha-3/2}+((\xi+x)^2+4y)^{\alpha-3/2}\Big)\,d\xi-$$

$$-\frac{2\Gamma(3/2-\alpha)y^{1-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2-\alpha)4^{\alpha-1}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(\eta)}{(x^2+4(\sqrt{\eta}+\sqrt{y})^2)^{3/2-\alpha}}\times$$

$$\times F\bigg(\frac{3}{2}-\alpha,\frac{3}{2}-\alpha,3-2\alpha,\frac{16\sqrt{\eta y}}{x^2+4(\sqrt{\eta}+\sqrt{y})^2}\bigg)\,d\eta. \tag{13}$$

4. Основное соотношение из эллиптической подобласти. Воспользовавшись формулой (13), получим основное соотношение между функциями τ и ν из эллиптической подобласти D_1. Зафиксируем какое-либо $x>0$ и выберем a из условия $a>x$. Затем, подставив функцию (13) в предельное соотношение (3), придём к следующему утверждению.

Теорема 4. *Основное соотношение из эллиптической подобласти имеет вид*

$$\Gamma(1-\alpha)\nu(x)=\frac{\Gamma(3/2-\alpha)(1-\alpha)}{\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}(2\alpha-2)_{m+1}}\bigg(\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int\limits_0^x\tau^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{\delta-1}\,d\xi-$$

$$-(-1)^m\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int\limits_x^a\tau^{(n+1)}(\xi)(\xi-x)^{\delta-1}\,d\xi+(-1)^m(\delta-1)\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int\limits_a^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\xi)(\xi-x)^{\delta-2}\,d\xi-$$

$$-(-1)^n(\delta-1)\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int\limits_0^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\xi)(\xi+x)^{\delta-2}\,d\xi\bigg)-\Phi_\alpha(x,\varphi)\quad \textit{при}\quad \delta<1, \tag{14}$$

$$\Gamma(1-\alpha)\nu(x)=\frac{\Gamma(3/2-\alpha)(1-\alpha)}{\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}m!}\bigg((-1)^m\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int\limits_0^x\tau^{(n+1)}(\xi)\ln{(x-\xi)}\,d\xi-$$

$$-\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int\limits_x^a \tau^{(n+1)}(\xi)\ln(\xi-x)\,d\xi+\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int\limits_a^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\xi)\,d\xi}{\xi-x}-$$

$$-(-1)^{m-n}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\xi)\,d\xi}{\xi+x}\Bigg)-\Phi_\alpha(x,\varphi)\quad \textit{при}\quad \delta=1, \tag{15}$$

где

$$\Phi_\alpha(x,\varphi)=\frac{2\Gamma(3/2-\alpha)}{\sqrt{\pi}4^{\alpha-1}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{(x^2+4\eta)^{3/2-\alpha}}-\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\frac{2\Gamma(1/2-\alpha-s)\varphi^{\{s\}}(0)x^{2\alpha+2s-1}}{\sqrt{\pi}4^{\alpha+s}}.$$

Теорема 5. *Имеют место равенства*

$$\tau^{(2s+1)}(0)=(-1)^s(\alpha)_s\varphi^{\{s\}}(0),\quad s=\overline{0,[(n-1)/2]}.$$

Рассмотрим поведение функции $\Phi_\alpha(x,\varphi)$ в концевых точках.

Справедлива

Лемма 3. *Функция $\Phi_\alpha(x,\varphi)$ может иметь при $x=0$ особенность только порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и порядка ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $x\to+$ $+\infty$ имеет нуль порядка выше $1-\alpha$, если n – чётное, и порядка выше $m-n-1$, если n – нечётное.*

5. Вывод интегрального уравнения и решение задачи. Перейдём к выводу интегрального уравнения и его исследованию. Из соотношений (8)–(10), (14), (15) получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\mu(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi-x}-\frac{(-1)^{m-n}}{\xi+x}\right)\mu(\xi)\,d\xi=F'_\alpha(x)+\sum_{s=0}^{m-n-2}c_sx^s, \tag{16}$$

где c_s – произвольные постоянные,

$$\mu(x)=x^{\delta-1}\tau^{(n+1)}(x), \tag{17}$$

$$F_\alpha(x)=\frac{(-1)^{m-n-1}\Gamma(1-\alpha)}{\pi(m-n-2)!}\int\limits_x^{+\infty}(\Omega_\alpha(\sigma,\omega^{(n+1)})-\Phi_\alpha(\sigma,\varphi))(\sigma-x)^{m-n-2}\,d\sigma, \tag{18}$$

$$F'_\alpha(x)=\frac{x^{\delta-1}}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^x F_\alpha(\sigma)(x-\sigma)^{-\delta}\,d\sigma\quad \text{при}\quad \delta<1, \tag{19}$$

$$F'_\alpha(x)=F_\alpha(x)\quad \text{при}\quad \delta=1. \tag{20}$$

Исследуем поведение функций $\mu(x)$ и $F'_\alpha(x)$ в концевых точках.

Лемма 4. *Функция $F'_\alpha(x)$ может иметь при $x=0$ особенность только порядка ниже $1/2-\alpha_0$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и порядка ниже 1, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $x\to+\infty$ имеет нуль, если n – нечётное, и нуль порядка выше $1-\delta+\alpha_0$, если n – чётное.*

Доказательство следует из лемм 1, 3 с учётом обозначений (18)–(20).

Из равенства (17) следует, что функция $\mu(x)$ должна иметь аналогичное условию 4 поведение в соответствующих точках.

Приступим к решению интегрального уравнения (16). Пусть $m-n$ нечётное. Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\mu(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1}{\xi+x}\right)\mu(\xi)\,d\xi=F'_\alpha(x)+\sum_{s=0}^{m-n-2}c_sx^s.$$

Выполним замену
$$\eta = x^2, \quad \sigma = \xi^2 \tag{21}$$
и обозначим
$$\rho(\eta) = \mu(x), \quad g(\eta) = F'_\alpha(x).$$
В результате уравнение запишется следующим образом:
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\rho(\eta) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\eta} = g(\eta) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s\eta^{s/2}. \tag{22}$$

Для разрешимости уравнения (22) его правая часть должна обращаться на бесконечности в нуль [16, с. 491]. Поэтому все c_s должны равняться нулю.

Выполняя замену [16, с. 490]
$$\eta = \frac{t}{1-t}, \quad \sigma = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \rho(\eta) = v(t)(1-t), \quad g(\eta) = w(t)(1-t), \tag{23}$$
приведём уравнение (22) к виду
$$v(t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{v(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t} = w(t). \tag{24}$$

Функция $w(t)$ может иметь особенность при $t=0$ только порядка ниже $1/4-\alpha_0/2$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и порядка ниже $1/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $t=1$ – ниже 1, если $-1/2<$ $<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $1/2+\alpha_0/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$. Аналогичные особенности допускаются у функции $v(t)$.

Отметим, что решения уравнения (24), неограниченные при $t=0$, имеют в этой точке особенность порядка $(1-\alpha_0)/2$, а решения, неограниченные при $t=1$, имеют в этой точке особенность порядка $(1+\alpha_0)/2$. Следовательно, мы должны использовать формулу решения, ограниченного при $t=0$ в случае $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$ и ограниченного при $t=1$ в случае $0<\alpha_0\leqslant 1/2$. Эти решения единственны [15, с. 16].

Пусть $m-n$ – чётное. Тогда уравнение (16) примет вид
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\mu(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\xi-x}-\frac{1}{\xi+x}\right)\mu(\xi)\,d\xi = F'_\alpha(x) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s x^s.$$

Снова выполним замену. Для этого воспользуемся формулами (21) и обозначениями
$$\rho(\eta) = \frac{\mu(x)}{x}, \quad g(\eta) = \frac{F'_\alpha(x)}{x}.$$

В результате получим
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right)\rho(\eta) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\eta} = g(\eta) + \sum_{s=0}^{m-n-2} c_s\eta^{(s-1)/2}.$$

В данном случае от суммы остаётся только одно слагаемое – при $s=0$. После замены (23) уравнение запишется следующим образом:
$$v(t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha_0}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{v(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t} = w(t) + \frac{c_0}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{25}$$

Функция $w(t)$ может иметь при $t = 0$ особенность только порядка ниже $3/4 - \alpha_0/2$, если $-1/2 < \alpha_0 \leqslant 0$, и порядка ниже 1, если $0 < \alpha_0 \leqslant 1/2$, а при $t = 1$ – ниже $1/2 + \alpha_0/2$, если $-1/2 < \alpha_0 \leqslant 0$, и ниже $1/2$, если $0 < \alpha_0 \leqslant 1/2$. Аналогичные особенности допускаются у функции $v(t)$. Следовательно, необходимо использовать формулу решения, ограниченного при $t = 1$. Причём $c_0 = 0$, так как в противном случае у функции $v(t)$ при $t = 1$ получается особенность порядка $1/2$, чего быть не может. Поэтому найденное решение уравнения (25) единственно.

Далее решение исходной задачи строится стандартным образом.

Итак, доказана

Теорема 6. *Задача NT_α при выполнении условий 1–3 имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условиям 4, 5.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tricomi F.* Sulle equazione lineari alle derivate di secondo ordine, di tipo misto // Rendiconti, Alti dell' Accad. Nar. del Lincei. 1923. Ser. 5. V. 14. P. 134–247.
2. *Кароль И.Л.* К теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 3. С. 397–400.
3. *Кароль И.Л.* Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. № 5. С. 793–796.
4. *Кароль И.Л.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа // Вестн. Ленинград. гос. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия. 1956. Т. 1. № 1. С. 177–181.
5. *Кароль И.Л.* К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Мат. сб. 1956. Т. 38 (80). № 3. С. 261–283.
6. *Исамухамедов С.С.* О краевой задаче типа Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго рода // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1975. № 5. С. 28–37.
7. *Хе Кан Чер.* О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // Динамика сплошной среды. 1976. Вып. 26. С. 134–141.
8. *Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода // Сердика Бълг. мат. списание. 1977 (1978). Т. 3. № 3. С. 181–188.
9. *Крикунов Ю.М.* Аналог задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$ // Изв. вузов. Математика. 1982. № 1. С. 26–32.
10. *Салтыкова Н.М., Смирнов М.М.* Об одной краевой задаче типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области // Вестн. Ленинград. гос. ун-та. 1985. № 1. С. 43–49.
11. *Хайруллин Р.С.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1396–1407.
12. *Хайруллин Р.С.* К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 927–936.
13. *Хайруллин Р.С.* Аналог задачи Франкля для уравнения второго рода // Изв. вузов. Математика. 2002. № 4. С. 59–63.
14. *Хайруллин Р.С.* О задаче типа Геллерстедта для уравнения второго рода // Изв. вузов. Математика. 2005. № 10. С. 72–77.
15. *Хайруллин Р.С.* Задача Трикоми для уравнения второго рода в неограниченных областях. Казань, 2016.
16. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 11.02.2020 г.
После доработки 05.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.