ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1210–1219

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С СУММАРНЫМ ЯДРОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

© 2021 г. С. Н. Асхабов

Получены точные априорные оценки решения интегрального уравнения с суммарным ядром, степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Используя эти оценки, методом весовых метрик доказана глобальная теорема существования и единственности решения в конусе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений, и найдена оценка скорости сходимости этих приближений к точному решению. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064121090077

Введение. Среди "именных" линейных интегральных уравнений хорошо известно уравнение Фокса. Это уравнение относится к классу уравнений с суммарным ядром, т.е. ядром, зависящим от суммы независимой переменной и переменной интегрирования, и его решение в замкнутой форме с помощью преобразования Фурье приведено в монографии [1, с. 421]. Уравнения с суммарным ядром приводят [2, с. 84] после применения преобразования Фурье к так называемым краевым задачам со сдвигом, а в некоторых частных случаях заменой переменных сводят к линейным интегральным уравнениям типа свёртки [3, с. 19]. Как отмечено в работе [4], линейные интегральные уравнения с суммарным ядром, в отличие от соответствующих уравнений с разностным ядром, изучены сравнительно мало.

Нелинейные интегральные уравнения с суммарным ядром тесно связаны с уравнениями типа свёртки, и их теория в настоящее время находится в стадии становления. Опубликовано не так много работ, в которых рассматриваются нелинейные интегральные уравнения с чисто суммарными ядрами (см., например, справочник [3, пп. 5 и 6] и приведённый в нём список литературы), при этом наиболее полно изучено уравнение Чандрасекхара с суммарным ядром и отрицательной степенной нелинейностью, возникающее в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением (см., например, [5, 6]).

Отметим, что имеющиеся к настоящему времени теория линейных и теория нелинейных интегральных уравнений с суммарным ядром отличаются друг от друга как по методам исследования, так и по характеру полученных результатов. В частности, нелинейные однородные уравнения могут иметь нетривиальные решения, в то время как соответствующие линейные уравнения имеют лишь нулевое (тривиальное) решение [7, с. 211]. Известно [7, с. 160] также, что исследование возникающих при решении некоторых задач гидроаэродинамики, популяционной генетики и других областей естествознания нелинейных интегральных уравнений типа свёртки с симметричными переменными пределами интегрирования приводит к уравнениям с суммарными ядрами и системам нелинейных вольтерровских уравнений типа свёртки (подробнее см. [7–9]). При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные непрерывные решения таких уравнений.

В данной работе в классе

$$Q_+ = \{u(x) : u \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ u(x) > 0 \ \text{ при } \ x > 0\}$$

мы изучаем нелинейное интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x k(x+t)u(t)\,dt + f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

где $u(x)$ – искомое решение, α – параметр, а ядро $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k \in C[0,\infty), \ \ k(x) \ \text{не убывает на} \ [0,\infty) \ \text{и} \ \int\limits_0^\delta k(t)\,dt > 0 \ \text{для любого} \ \delta > 0, \tag{2}$$

$$f \in C[0,\infty), \ \ f(x) \ \text{не убывает на} \ [0,\infty) \ \text{и} \ f(0) \geqslant 0. \tag{3}$$

Отметим, что класс Q_+ представляет собой конус в линейном пространстве $C[0,\infty)$, поэтому в дальнейшем иногда будем называть его конусом Q_+.

Цель данной работы доказать, что уравнение (1) имеет единственное решение в классе Q_+, а также показать, что это решение можно найти методом последовательных приближений и получить оценку скорости сходимости этих приближений к точному решению. Исследование основано на методе весовых метрик (аналог метода Белицкого [10, с. 218]), позволяющем установить глобальную теорему существования и единственности решения уравнения (1) в классе Q_+. При этом важную роль играют полученные в работе точные априорные оценки решения уравнения (1), а также то, что при построении метрики, в отличие от случая соответствующих уравнений с разностным ядром, в качестве весовой функции берётся не нижняя, а верхняя априорная оценка решения уравнения (1) в классе Q_+.

1. Свойства неотрицательных решений. При доказательстве различных неравенств далее будут использоваться следующие две простые леммы.

Лемма 1. *Если $a(x)$ и $b(x)$ – неотрицательные неубывающие функции, определённые на полуоси $[0,\infty)$, то при всех $x \geqslant 0$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^x a(x+t)b(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^x (2a(2t)-a(t))b(t)\,dt. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^x a(x+t)b(t)\,dt = \int\limits_x^{2x} a(t)b(t-x)\,dt \leqslant \int\limits_x^{2x} a(t)b\biggl(\frac{t}{2}\biggr)\,dt$$

в силу очевидного неравенства $t-x \leqslant t/2$, если $t \leqslant 2x$, и того, что функция b не убывает, а функция a неотрицательна. Поэтому неравенство (4) является следствием неравенства

$$c(x) \equiv \int\limits_x^{2x} a(t)b\biggl(\frac{t}{2}\biggr)\,dt - \int\limits_0^x (2a(2t)-a(t))b(t)\,dt \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x \geqslant 0.$$

Но последнее неравенство верно, поскольку для почти всех по мере Лебега $x \in [0,\infty)$ получаем оценку

$$c'(x) = a(2x)b(x) - a(x)b\biggl(\frac{x}{2}\biggr) - (2a(2x)-a(x))b(x) = (a(x)-a(2x))b(x) - a(x)b\biggl(\frac{x}{2}\biggr) \leqslant 0$$

вследствие того, что функция a не убывает, а функции a и b неотрицательны. Следовательно, функция c не возрастает, а значит, $c(x) \leqslant c(0) = 0$. Лемма доказана.

Заметим, что если $a(x) = \mathrm{const}$ или $b(x) = \mathrm{const}$, то неравенство (4) обращается в равенство. В частности, справедлива

Лемма 2. *Если функция $a(x)$ локально интегрируема на $[0,\infty)$, то*

$$\int\limits_0^x a(x+t)\,dt = \int\limits_0^x (2a(2t)-a(t))\,dt \quad \text{при всех} \quad x \geqslant 0. \tag{5}$$

Доказательство. Запишем доказываемое равенство в виде

$$\int\limits_0^x a(x+t)\,dt = 2\int\limits_0^x a(2t)\,dt - \int\limits_0^x a(s)\,ds. \tag{6}$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (6), достаточно сделать замены $x+t=s$ в левой части и $2t=s$ в первом интеграле правой части этого равенства. В результате получим очевидное равенство

$$\int\limits_x^{2x} a(s)\,ds = \int\limits_0^{2x} a(s)\,ds - \int\limits_0^x a(s)\,ds.$$

Лемма доказана.

Важные в дальнейшем оценки возможных решений уравнения (1) в конусе Q_+ даёт

Теорема 1. *Если выполнены условия (2), (3) и $u(x)\in Q_+$ является решением уравнения (1), то функция $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и удовлетворяет неравенствам*

$$F_+(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(2t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{1/(\alpha-1)} \leqslant u(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(x+t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G_+(x). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $u(x)\in Q_+$ – решение уравнения (1). Тогда при любых $x_1,x_2\in$ $\in[0,\infty)$ таких, что $x_1<x_2$, имеем оценку

$$u^\alpha(x_2)-u^\alpha(x_1) = \int\limits_0^{x_2} k(x_2+t)u(t)\,dt - \int\limits_0^{x_1} k(x_1+t)u(t)\,dt + f(x_2)-f(x_1) =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} [k(x_2+t)-k(x_1+t)]u(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} k(x_2+t)u(t)\,dt + f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0,$$

поскольку функции $k(x)$, $f(x)$ и $u(x)$ неотрицательны и в силу условий (2), (3) функции $k(x)$ и $f(x)$ не убывают на $[0,\infty)$. Значит, $u^\alpha(x_2)\geqslant u^\alpha(x_1)$, т.е. $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

Покажем, что $u(x)\geqslant F_+(x)$. Так как функция $k(x)$ не убывает, а функция $u(x)$ неотрицательна, то из уравнения (1) следует, что

$$u^\alpha(x) \geqslant \int\limits_0^x k(2t)u(t)\,dt + f(x) \quad \text{для любого} \quad x>0,$$

откуда

$$u(x) \geqslant \left(\int\limits_0^x k(2t)u(t)\,dt + f(x)\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого} \quad x>0.$$

Так как (см., например, [7, теорема 17.8]) $\int_0^x f'(t)\,dt \leqslant f(x)-f(0)$, то

$$u(x) \geqslant \left(\int\limits_0^x k(2t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x f'(t)\,dt + f(0)\right)^{1/\alpha} = \left(\int\limits_0^x (k(2t)u(t)+f'(t))\,dt + f(0)\right)^{1/\alpha}. \tag{8}$$

В силу теоремы Лебега (см. [7, теорема 17.7]) функция $f(x)$ почти всюду на $[0,\infty)$ дифференцируема, поэтому из оценки (8) вытекает, что для почти всех $t \in [0,\infty)$ выполняется неравенство

$$k(2t)u(t) + f'(t) \geqslant k(2t)\biggl(\int\limits_0^t (k(2s)u(s) + f'(s))\,ds + f(0)\biggr)^{1/\alpha} + f'(t),$$

откуда

$$\biggl(\int\limits_0^t (k(2s)u(s) + f'(s))\,ds + f(0)\biggr)^{-1/\alpha}(k(2t)u(t) + f'(t)) \geqslant k(2t).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, с учётом, что

$$d\biggl(\int\limits_0^t (k(2s)u(s) + f'(s))\,ds + f(0)\biggr) = (k(2t)u(t) + f'(t))\,dt,$$

получаем

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\biggl(\biggl(\int\limits_0^x (k(2s)u(s) + f'(s))\,ds + f(0)\biggr)^{(\alpha-1)/\alpha} - (f(0))^{(\alpha-1)/\alpha}\biggr) \geqslant \int\limits_0^x k(2t)\,dt,$$

или

$$\biggl(\int\limits_0^x (k(2t)u(t) + f'(t))\,dt + f(0)\biggr)^{1/\alpha} \geqslant \biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(2t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\biggr)^{1/(\alpha-1)}.$$

Из этой оценки и неравенства (8) непосредственно следует, что $u(x) \geqslant F_+(x)$.

Докажем, что $u(x) \leqslant G_+(x)$. Так как функции $k(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то из уравнения (1), воспользовавшись леммой 1, получаем

$$u(x) \leqslant \biggl(\int\limits_0^x (2k(2t) - k(t))u(t)\,dt + f(x)\biggr)^{1/\alpha} \quad \text{для любого} \quad x > 0. \tag{9}$$

Обозначим $h(x) = 2k(2x) - k(x)$, тогда из оценки (9) следует, что для почти всех $t \in [0,\infty)$ выполняется неравенство

$$h(t)u(t) + f'(t) \leqslant h(t)\biggl(\int\limits_0^t h(s)u(s)\,ds + f(t)\biggr)^{1/\alpha} + f'(t),$$

или

$$\biggl(\int\limits_0^t h(s)u(s)\,ds + f(t)\biggr)^{-1/\alpha}(h(t)u(t) + f'(t)) \leqslant$$

$$\leqslant h(t) + f'(t)\biggl(\int\limits_0^t h(s)u(s)\,ds + f(t)\biggr)^{-1/\alpha} = h(t) + I(t), \quad t > 0, \tag{10}$$

где

$$I(t) \equiv f'(t)\biggl(\int\limits_0^t h(s)u(s)\,ds + f(t)\biggr)^{-1/\alpha}.$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}(f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)-f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)) \quad \text{для любого} \quad x>0. \tag{11}$$

В силу условия (3) возможны только три случая: либо $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\infty)$, либо существует $x_0>0$ такое, что $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,x_0]$ и $f(x)>0$ при $x>x_0$, либо $f(x)>0$ при всех $x>0$. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Если $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\infty)$, то неравенство (11) очевидно и обращается в тождество, так как при $x>0$ выполняются соотношения $h(x)>0$, $u(x)>0$ и $f'(x)\equiv 0$.

Если же существует $x_0>0$ такое, что $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,x_0]$ и $f(x)>0$ при $x>x_0$, то $\int_0^x I(t)\,dt=0$ при любом $x\in[0,x_0]$ и, значит, неравенство (11) выполняется при $x\in[0,x_0]$, обращаясь в тождество, а при $x>x_0$ с учётом того, что $f(x_0)=f(0)=0$ и что функция $f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)$ не убывает, имеем

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt=\int\limits_{x_0}^x I(t)\,dt\leqslant\int\limits_{x_0}^x f'(t)f^{-1/\alpha}(t)\,dt=\frac{\alpha}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^x [f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)]'\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}(f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)-f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)),$$

в силу [7, теорема 17.8], т.е. неравенство (11) выполняется и при любом $x>x_0$.

Если, наконец, $f(x)>0$ при всех $x>0$, то аналогично получаем

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^x f'(t)f^{-1/\alpha}(t)\,dt\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}(f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)-f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)).$$

Итак, неравенство (11) доказано во всех трёх случаях.

Интегрируя неравенство (10) в пределах от 0 до x, с учётом неравенства (11) будем иметь

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\biggl[\biggl(\int\limits_0^x h(s)u(s)\,ds+f(x)\biggr)^{(\alpha-1)/\alpha}-f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\biggr]\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^x h(t)\,dt+\frac{\alpha}{\alpha-1}(f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)-f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)),$$

т.е.

$$\biggl(\int\limits_0^x h(t)u(t)\,dt+f(x)\biggr)^{(\alpha-1)/\alpha}\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x h(t)\,dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x).$$

Следовательно, для правой части неравенства (9) справедлива оценка

$$\biggl(\int\limits_0^x h(t)u(t)\,dt+f(x)\biggr)^{1/\alpha}\leqslant\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x h(t)\,dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\biggr)^{1/(\alpha-1)},$$

учитывая которую, получаем

$$u(x)\leqslant\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x (2k(2t)-k(t))\,dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\biggr)^{1/(\alpha-1)},$$

или в силу леммы 2

$$u(x) \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(x+t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G_+(x).$$

Теорема доказана.

Заметим, что если $k(x) = C_1 = \mathrm{const} > 0$ и $f(x) = C_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, то нижняя и верхняя априорные оценки (7) совпадают:

$$F_+(x) \equiv G_+(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}C_1 x + C_2^{(\alpha-1)/\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)},$$

и, как несложно проверить, являются решением интегрального уравнения (1) с $k(x) = C_1$ и $f(x) = C_2$. Значит, в определённом смысле неравенства (7) неулучшаемы.

2. Теорема существования и единственности. Запишем уравнение (1) в операторном виде

$$u = T_+u, \quad \text{где} \quad (T_+u)(x) = \left(\int\limits_0^x k(x+t)u(t)\,dt + f(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Из теоремы 1 следует, что решение уравнения $u = T_+u$ естественно разыскивать в следующем классе функций:

$$P^+ = \{u(x) : u \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ F_+(x) \leqslant u(x) \leqslant G_+(x)\},$$

где функции $F_+(x)$ и $G_+(x)$ определены в (7).

Далее будем предполагать, что неоднородность $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$, т.е. представима в виде

$$f(x) = \int\limits_0^x f'(t)\,dt + f(0), \quad x \in [0,\infty). \tag{12}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (2), (3) и (12). Тогда оператор T_+ переводит класс P^+ в себя.*

Доказательство. Пусть $u \in P^+$ – произвольная функция. Нужно доказать, что тогда и $T_+u \in P^+$, т.е. $T_+u \in C[0,\infty)$ и $F_+(x) \leqslant (T_+u)(x) \leqslant G_+(x)$.

То, что $T_+u \in C[0,\infty)$, очевидно (см. [11, с. 288]).

Покажем, что $(T_+u)(x) \geqslant F_+(x)$. Так как $u(x) \geqslant F_+(x)$, а функции $k(x)$ и $f(x)$ не убывают, то

$$[(T_+u)(x)]^\alpha = \int\limits_0^x k(x+t)u(t)\,dt + f(x) \geqslant \int\limits_0^x k(2t)F_+(t)\,dt + f(0) =$$

$$= \int\limits_0^x k(2t)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t k(2s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{1/(\alpha-1)} dt + f(0) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t k(2s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{\alpha/(\alpha-1)}\Bigg|_0^x + f(0) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(2s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv F_+^\alpha(x),$$

т.е. $(T_+u)(x) \geqslant F_+(x)$.

Покажем, что $(T_+u)(x) \leqslant G_+(x)$. Так как $u(x) \leqslant G_+(x)$ и функции $k(x)$, $G_+(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то в силу неравенства (4) и условия (12) имеем

$$[(T_+u)(x)]^\alpha \leqslant \int\limits_0^x k(x+t)G_+(t)\,dt + f(x) \leqslant \int\limits_0^x [2k(2t)-k(t)]G_+(t)\,dt + f(x) =$$

$$= \int\limits_0^x ([2k(2t)-k(t)]G_+(t)+f'(t))\,dt + f(0) = \int\limits_0^x G_+(t)\biggl(2k(2t)-k(t)+\frac{f'(t)}{G_+(t)}\biggr)dt + f(0) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^x G_+(t)\biggl(2k(2t)-k(t)+\frac{f'(t)}{f^{1/\alpha}(t)}\biggr)dt + f(0) =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-1}\int\limits_0^x \biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t (2k(2s)-k(s))\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\biggr)^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times\, d\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t (2k(2s)-k(s))\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\biggr) + f(0) =$$

$$= \biggl(\int\limits_0^x \frac{\alpha-1}{\alpha}(2k(2s)-k(s))\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\biggr)^{\alpha/(\alpha-1)} - (f^{(\alpha-1)/\alpha}(0))^{\alpha/(\alpha-1)} + f(0) =$$

$$= \biggl(\int\limits_0^x \frac{\alpha-1}{\alpha}(2k(2t)-k(t))\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\biggr)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv G_+^\alpha(x),$$

т.е. $(T_+u)(x) \leqslant G_+(x)$ – что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Выберем произвольно и зафиксируем число $b>0$. Рассмотрим класс функций

$$P_b^+ = \{u(x) : u \in C[0,b] \ \text{ и } \ F_+(x) \leqslant u(x) \leqslant G_+(x)\}.$$

Из леммы 3 непосредственно вытекает

Следствие. *При выполнении условий (2), (3) и (12) оператор T_+ отображает класс P_b^+ в себя.*

Введём в классе P_b^+ метрику ϱ_b, положив

$$\varrho_b^+(u,v) = \sup_{0<x\leqslant b}\frac{|u(x)-v(x)|}{G_+(x)}$$

для любых $u,v \in P_b^+$.

Заметим, что в отличие от [7, §§ 17–19] и [12], где изучаются уравнения вида (1) с разностным ядром, в данной метрике в качестве весовой функции используется не нижняя, а верхняя априорная оценка решения уравнения (1).

Аналогично лемме 4 из [12] доказывается

Лемма 4. *Множество P_b^+ с метрикой ϱ_b^+ образует полное метрическое пространство.*

Для доказательства основной теоремы 2 нам понадобится дополнительное условие:

$$q \equiv \sup_{0<x\leqslant b}\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k(x+t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\biggr)\biggl((\alpha-1)\int\limits_0^x k(2t)\,dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\biggr)^{-1} < 1. \quad (13)$$

Теорема 2. *Если $\alpha > 1$ и выполнены условия (2), (3), (12), (13), то уравнение (1) в конусе Q_+ имеет единственное решение $u^*(x)$ $(u^* \in P_b^+)$. Это решение можно найти в метрическом пространстве P_b^+ методом последовательных приближений по формуле $u_n = T_+u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ϱ_b^+. При этом справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\varrho_b^+(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\varrho_b^+(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где число $q < 1$ определено в условии (13), а $u_0(x) \in P_b^+$ – начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Запишем уравнение (1) в операторном виде: $u = T_+u$. Покажем сначала, что это уравнение имеет единственное решение в пространстве P_b^+. Для этого в силу леммы 4 и следствия 1 достаточно доказать, что оператор T_+ является сжимающим. Воспользуемся теоремой Лагранжа (формулой конечных приращений), согласно которой при любых $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ справедливо равенство

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Theta^{(1-\alpha)/\alpha}(z_1 - z_2),$$

где $\Theta > 0$ – некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta > z_0$ и, значит,

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}. \tag{14}$$

Пусть $u, v \in P_b^+$ и $x \in (0, b]$. Тогда в силу неравенства (14), в котором роль z_0 играет $F_+^\alpha(x)$, для любых $u, v \in P_b^+$ и любого $x \in (0, b]$, последовательно получаем

$$|(T_+u)(x) - (T_+v)(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^x k(x+t)|u(t) - v(t)|\,dt\bigg(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k(2t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\bigg)^{-1} =$$

$$= \bigg((\alpha-1)\int_0^x k(2t)\,dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\bigg)^{-1}\int_0^x k(x+t)G_+(t)\frac{|u(t)-v(t)|}{G_+(t)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varrho_b^+(u,v)\bigg((\alpha-1)\int_0^x k(2t)\,dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\bigg)^{-1}\int_0^x k(x+t)G_+(t)\,dt.$$

Итак,

$$|(T_+u)(x) - (T_+v)(x)| \leqslant \int_0^x k(x+t)\bigg(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t k(t+s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\bigg)^{1/(\alpha-1)} dt \times$$

$$\times \bigg((\alpha-1)\int_0^x k(2t)\,dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\bigg)^{-1}\varrho_b^+(u,v). \tag{15}$$

Далее, в силу неравенства (4) и равенства (5) имеем

$$\int_0^x k(x+t)\bigg(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t k(t+s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\bigg)^{1/(\alpha-1)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^x (2k(2t)-k(t))\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t k(t+s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\biggr)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \int\limits_0^x (2k(2t)-k(t))\biggl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t (2k(2s)-k(s))\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\biggr)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \Bigl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Bigr)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x (2k(2t)-k(t))\biggl(\int\limits_0^t (2k(2s)-k(s))\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\biggr)^{1/(\alpha-1)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Bigr)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x (2k(2t)-k(t)+f^{-1/\alpha}(t)f'(t))\times$$

$$\times\biggl(\int\limits_0^t (2k(2s)-k(s))\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\biggr)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \Bigl(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Bigr)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha}\biggl(\biggl(\int\limits_0^x (2k(2s)-k(s))\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\biggr)^{\alpha/(\alpha-1)} -$$

$$- \Bigl(\frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\Bigr)^{\alpha/(\alpha-1)}\biggr) = G_+^\alpha(x) - f(0) \leqslant G_+^\alpha(x).$$

Учитывая полученную оценку в неравенстве (15), приходим при всех $x \in (0,b]$ к неравенству

$$\frac{|(T_+u)(x)-(T_+v)(x)|}{G_+(x)} \leqslant G_+^{\alpha-1}(x)\biggl((\alpha-1)\int\limits_0^x k(2t)\,dt + \alpha f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\biggr)^{-1} \varrho_b^+(u,v),$$

которое в силу условия (13) означает, что

$$\varrho_b^+(T_+u, T_+v) \leqslant q\varrho_b^+(u,v)$$

для любых $u, v \in P_b^+$, т.е. оператор T_+ является сжимающим.

Утверждение теоремы о единственности решения $u^*(x)$ в конусе Q_+ доказывается точно так же, как и в теореме 3 [12]. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает, что однородные уравнения, соответствующие нелинейному уравнению (1), могут иметь нетривиальные решения. В этом состоит принципиальное отличие нелинейных уравнений от соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными и разностными ядрами (подробнее см. [7, гл. IV]).

Замечание. Условие (13) может выполняться при любом $\alpha > 1$. Например, при $f(x) \equiv 0$ для степенных ядер $k(x) = Ax^r$, где $A > 0$, $r \geqslant 0$, оно заведомо выполняется при любом $\alpha > 2 - 2^{-r}$.

В заключение отметим, что, следуя работам [13–15], аналогично можно исследовать дискретные аналоги уравнения (1) в различных пространствах числовых последовательностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-41-200001) и в рамках выполнения государственного задания по проекту “Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи” (Соглашение № 075-03-2021-071 от 29.12.2020).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
2. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
3. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.
4. *Антипов В.Г.* Особое интегральное уравнение с суммарным ядром // Изв. вузов. Математика. 1959. № 6. С. 9–13.
5. *Какичев В.А., Рогожин В.С.* Об одном обобщении уравнения Чандрасекхара // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1264–1270.
6. *Измаилов А.Ф.* 2-регулярность и теоремы о разветвлении // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 65. С. 90–117.
7. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М., 2009.
8. *Okrasinski W.* On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Annal. Polon. Math. 1980. V. 37. № 3. P. 223–229.
9. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4. № 2. P. 51–74.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., 1969.
11. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л., 1951.
12. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 786–795.
13. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1777–1784.
14. *Askhabov S.N., Karapetian N.K.* Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in comples spaces // J. of Integral Equat. and Math. Phys. 1992. V. 1. № 1. P. 44–66.
15. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // Докл. РАН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1015–1018.

Чеченский государственный университет
им. А.А. Кадырова, г. Грозный,
Чеченский государственный педагогический
университет, г. Грозный

Поступила в редакцию 12.04.2021 г.
После доработки 07.06.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.