ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1220–1229

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА РЕАКЦИИ В ДРОБНОМ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ

 У. Д. Дурдиев

Для дробного уравнения диффузии с коэффициентом реакции, зависящим только от первых двух компонент пространственного переменного $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и от времени $t \geqslant 0$, рассматривается обратная задача по определению этого коэффициента в предположении, что для решения уравнения известно начальное значение при $t = 0$ и в качестве дополнительного условия – граничное значение при $x_3 = 0$. Так поставленная обратная задача сводится к эквивалентным ей интегральным уравнениям, для доказательства существования решения которых применяется принцип сжимающих отображений. Доказаны теоремы локального существования и глобальной единственности. Получена также оценка устойчивости решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121090089

Введение. В настоящее время дробно-дифференциальные уравнения вызывают значительный интерес как в самой математике, так и в прикладных областях. Эти уравнения используются при моделировании многих физических и химических процессов, в частности, процессов массопереноса в средах с фрактальными свойствами (см., например, [1–6]). В работах [7–9] приведён ряд интересных особенностей уравнений дробной субдиффузии, свидетельствующих об определённом сходстве этих уравнений с параболическими дифференциальными уравнениями второго порядка.

Прямые задачи для уравнений дробной диффузии, такие как начальные и начально-краевые задачи, подробно изучались в [1–4] (см. также ссылки в них). В отличие от прямых задач, результатов по обратным задачам для уравнений дробного порядка сравнительно мало. Обратные задачи по определению коэффициента, который зависел только от пространственных переменных, для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка исследовались в работах [10, 11]. В настоящей работе искомая функция зависит не только от пространственных, но и от временно́й переменной. Отметим также, что обратные задачи по определению функции источника для уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования изучались в [12–14].

Обратные задачи для классических дифференциальных уравнений теплопроводности изучены достаточно широко. В литературе чаще всего встречаются линейные задачи по определению источника и нелинейные коэффициентные обратные задачи с различными типами условий переопределения (см., например, [15–19] и литературу в них). В этих работах исследуются однозначная разрешимость задач и устойчивость решения, а также построение численного решения таких задач. В работах [20–23] рассматривались задачи по восстановлению памяти для параболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с интегральным членом типа свёртки. В [24] доказано, что если в этих уравнениях свёрточное ядро выбрано в виде специальной функции Миттаг-Лёффлера, то рассматриваемые уравнения эквивалентны уравнениям аномальной диффузии.

Основными результатами данной работы являются теоремы локального существования, глобальной единственности, а также оценка устойчивости решения задачи об определении коэффициента реакции в диффузионном уравнении дробного порядка по времени.

Постановка задачи. Рассмотрим следующее диффузионное уравнение дробного порядка:

$$({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u)(x,t) - \Delta_x u(x,t) + q(x',t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+,$$

при условии
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$
где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3, $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$, а ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ – регуляризованная дробная производная по t (производная Герасимова–Капуто), $0 < \alpha < 1$, т.е.
$$({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u)(x,t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha},$$
а $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. Функцию q в уравнении (1) называем *коэффициентом реакции*; предполагаем, что она является также достаточно гладкой.

Обратная задача. Требуется определить функцию $q(x',t)$, $x' \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}_+$, – коэффициент реакции в уравнении (1), если решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию
$$u|_{x_3=0} = g(x',t), \quad x' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$
где $g(x',t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Назовём функцию $u(x,t)$ *классическим решением* задачи Коши (1), (2), если она:

(a) дважды непрерывно дифференцируема по x для каждого $t > 0$;

(b) при каждом $x \in \mathbb{R}^3$ непрерывна по t на $[0,T]$, а её дробный интеграл
$$(I_{0+}^\alpha u)(x,t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$
непрерывно дифференцируем по $t \in \mathbb{R}_+$;

(c) удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Пусть $u(x,t)$ – классическое решение задачи Коши (1), (2) и, как отмечено выше, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $g(x',t)$ – достаточно гладкие функции. Преобразуем обратную задачу (1)–(3). Для этого обозначим вторую производную функции $u(x,t)$ по переменной x_3 через $v(x,t)$, т.е. $v(x,t) := u_{x_3x_3}(x,t)$. Дифференцируя равенства (1) и (2) дважды по x_3, приходим к следующей задаче:
$$({}^C\mathcal{D}_t^\alpha v)(x,t) - \Delta_x v(x,t) + q(x',t)v(x,t) = f_{x_3x_3}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$
$$v|_{t=0} = \varphi_{x_3x_3}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{5}$$
т.е. к задаче вида (1), (2).

Чтобы найти дополнительное условие для функции $v(x,t)$, заметим, что третий член лапласиана в уравнении (1) равен $v(x,t)$. Полагая $x_3 = 0$ в уравнении (1) и используя равенство (3), получаем
$$v|_{x_3=0} = ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha g)(x',t) - \Delta_{x'} g(x',t) + q(x',t)g(x',t) - f(x',0,t), \tag{6}$$
$$x' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

При выполнении условия согласования $\varphi(x',0) = g(x',0)$ из (4)–(6) несложно вывести равенства (1)–(3).

Для заданных функций $q(x',t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и числа $\alpha \in (0,1)$ задачу определения решения задачи Коши (4) и (5) назовём *прямой задачей.*

Через $\Phi_T := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T\}$ обозначим слой толщиной T, где $T > 0$ – фиксированное число, которое может быть любым.

Пусть $C^{\alpha,m}(\Phi_T)$ – класс m раз непрерывно дифференцируемых по переменной $x \in \mathbb{R}^3$ и непрерывных по t функций, для которых дробный интеграл I_{0+}^α порядка α непрерывно дифференцируем по t на $[0,T]$. Пусть l – нецелое положительное число, $l \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, а $n \in \mathbb{N}$. Через $C([0,T], H^l(\mathbb{R}^n))$ обозначим класс непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в $H^l(\mathbb{R}^n)$, где $H^l(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, имеющих непрерывные частные производные по порядка $[l]$ включительно (здесь $[\cdot]$ – целая часть числа), таких, что конечна величина [25, с. 15–16]

$$|\varphi|^l = \sum_{([l])} \sup_{\substack{|x^1-x^2|\leqslant\rho_0 \\ x^1,x^2\in\mathbb{R}^n}} \frac{|D_x^{[l]}\varphi(x^1) - D_x^{[l]}\varphi(x^2)|}{|x^1-x^2|^\alpha} + \sum_{j=0}^{[l]}\sum_{(j)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D_x^j\varphi(x))|,$$

где ρ_0 – некоторое фиксированное положительное число (которое можно выбрать любым), $\alpha = l - [l]$, а $\sum_{(j)}$ – сумма по всем мультииндексам длины j, в частности, $\sum_{([l])}$ – сумма по всем мультииндексам длины $[l]$. Норму в $H^l(\mathbb{R}^n)$ значения функции $\phi(t,x) \in C([0,T], H^l(\mathbb{R}^n))$ при фиксированном $t \in [0,T]$ обозначим через $|\phi|^l(t)$. Такое же обозначение используем и для функций, зависящих только от переменной x. Норма функции $\phi(t,x) \in C([0,T], H^l(\mathbb{R}^n))$ определяется равенством

$$\|\phi\|^l := \max_{t\in[0,T]} |\phi|^l(t).$$

В дальнейшем мы рассматриваем пространства $C([0,T], H^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $C([0,T], H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ и $C([0,T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$, где $\alpha \in (0,1)$.

1. Исследование прямой задачи (4), (5). В работе [9] найдено представление решения с помощью фундаментального решения следующей задачи Коши:

$$({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u)(x,t) - Bu(x,t) = F(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in(0,T],$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где

$$B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)$$

– равномерно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными непрерывными вещественными коэффициентами. В случае $B\equiv\Delta$, где Δ – n-мерный лапласиан, для любой ограниченной непрерывной функции $u_0(x)$ (локально непрерывной по Гёльдеру, если $n>1$) и любой ограниченной непрерывной по обеим переменным x, t и локально непрерывной по Гёльдеру по x функции $F(x,t)$ это решение имеет вид

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(x-\xi,t)u_0(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{7}$$

здесь

$$Z(x,t) = \pi^{-n/2}|x|^{-n}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{1}{4}t^{-\alpha}|x|^2\middle|\begin{matrix}(1,\alpha)\\ \\ (n/2,1),(1,1)\end{matrix}\right],$$

$$Y(x,t) = \pi^{-n/2}|x|^{-n}t^{\alpha-1}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{1}{4}t^{-\alpha}|x|^2\middle|\begin{matrix}(\alpha,\alpha)\\ \\ (n/2,1),(1,1)\end{matrix}\right],$$

где через H обозначена H-функция Фокса [26, с. 2–6]. Фактически функция $Y(x,t)$ является производной Римана–Лиувилля от $Z(x,t)$ относительно t порядка $1-\alpha$ (если $x\neq0$, то $Z(x,t)\to0$ при $t\to0$; производная Римана–Лиувилля в этом случае совпадает с производной Герасимова–Капуто, т.е. $Y(x,t) = ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha Z)(x,t))$ [9].

Вводя в уравнении (4) обозначение $f_{x_3x_3}(x,t) - q(x',t)v(x,t) =: F(x,t)$, для прямой задачи (4), (5) при $n=3$ вследствие представления (7) получаем интегральное уравнение для определения функции $v(x,t)$:

$$v(x,t) = v_0(x,t) - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} Y(x-\xi,t-\tau)q(\xi_1,\xi_2,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{8}$$

где

$$v_0(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} Z(x-\xi,t)\varphi_{\xi_3\xi_3}(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x-\xi,t-\tau) f_{\xi_3\xi_3}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{9}$$

$$\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3), \quad d\xi = d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3.$$

Справедлива

Лемма. *Если* $q(x,t) \in C([0,T],H^{\alpha}(\mathbb{R}))$, $f(x,t) \in C([0,T],H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3))$, $\varphi(x) \in H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3)$, *то существует единственное решение интегрального уравнения (8) такое, что* $v(x,t) \in C^{1-\alpha,2}(\Phi_T)$, *где* $\alpha \in (0,1)$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений и рассмотрим последовательность $(v_n(x,t))$ функций, определив их рекуррентно формулами

$$v_n(x,t) = -\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x-\xi,t-\tau) q(x',\tau) v_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{10}$$

где функция $v_0(x,t)$ задана равенством (9). Далее нам понадобятся оценки функций $Z(t,x)$, $Y(t,x)$ и некоторых их производных. Пусть $m = (m_1,m_2,\ldots,m_n)$ – мультииндекс n-го порядка, $|m| = m_1+m_2+\ldots+m_n$ – его длина и

$$D_x^m u = \frac{\partial^{|m|}u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}, \quad D_x^0 u = u.$$

Для функций $Z(x,t)$ и $Y(t,x)$ и их производных справедливы следующие оценки [9]:

a) если $|x|^2 \geqslant t^{\alpha}$, то

$$|D_x^m Z(x,t)| \leqslant Ct^{-\alpha(3+m)/2} e^{-\mu_m t^{-\alpha/(2-\alpha)}|x|^{2/(2-\alpha)}}$$

при $n=3$, $|m| \leqslant 3$;

$$|{}^C\mathcal{D}_t^{\alpha} Z(x,t)| \leqslant Ct^{-5\alpha/2} e^{-\mu_n t^{-\alpha/(2-\alpha)}|x|^{2/(2-\alpha)}} \tag{11}$$

при $n=3$;

b) если $|x|^2 < t^{\alpha}$, $x \neq 0$, то

$$|D_x^m Z(x,t)| \leqslant Ct^{-\alpha}|x|^{-1-m}, \quad |m| \leqslant 3,$$

при $n=3$, $m \neq 0$;

$$|Z(x,t)| \leqslant Ct^{-\alpha}|x|^{-1}, \quad |m| \leqslant 3, \tag{12}$$

при $n=3$;

c) если $|x|^2 < t^{\alpha}$, $x \neq 0$, то

$$|{}^C\mathcal{D}_t^{\alpha} Z(x,t)| \leqslant Ct^{-2\alpha}|x|^{-1}$$

при $n=3$;

d) если $|x|^2 \geqslant t^{\alpha}$, то

$$|D_x^m Y(x,t)| \leqslant Ct^{-1+\alpha-\alpha(3+m)/2} e^{-\mu_m t^{-\alpha/(2-\alpha)}|x|^{2/(2-\alpha)}}, \quad |m| \leqslant 3, \tag{13}$$

при $n=3$;

e) если $|x|^2 < t^{\alpha}$, $x \neq 0$, $n=3$, то

$$|Y(x,t)| \leqslant Ct^{-1-\alpha/2}, \quad |D_x Y(x,t)| \leqslant Ct^{-\alpha-1},$$

$$|D_x^m Y(x,t)| \leqslant Ct^{-\alpha-1}|x|^{-1}, \quad |m| = 2, \tag{14}$$

$$|D_x^m Y(x,t)| \leqslant Ct^{-\alpha-1}|x|^{-2}, \quad |m| = 3; \tag{15}$$

в этих оценках $\mu_0 := (2-\alpha)\alpha^{\alpha/(2-\alpha)}$, в качестве μ_m можно взять любое положительное число, меньшее μ_0, через C обозначена положительная постоянная, значение которой в разных оценках, вообще говоря, различно.

Из построения функции $Z(x,t)$ следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} Z(\xi,t)\,d\xi = 1; \tag{16}$$

кроме того, как показано в [9],

$$\int_{\mathbb{R}^3} Y(\xi,t)\,d\xi = C_0 t^{\alpha-1}, \quad t\in(0,T], \tag{17}$$

здесь постоянная C_0 зависит только от α.

Положим $d_0 := \|q\|^{\alpha}$, $\varphi_0 := |\varphi|^{\alpha+2}$ и $f_0 := \|f\|^{\alpha+2}$. Используя определение (10) и равенства (16), (17), оценим модуль функции $v_n(x,t)$ в области Φ_T следующим образом:

$$|v_0(x,t)| \leqslant \varphi_0 + C_0 f_0\frac{T^{\alpha}}{\alpha} =: \lambda_0,$$

$$|v_1(x,t)| \leqslant C_0 d_0\lambda_0\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau = C_0 d_0\lambda_0\frac{t^{\alpha}}{\alpha} = \lambda_0\frac{C_0 d_0\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha},$$

$$|v_2(x,t)| \leqslant \lambda_0(C_0 d_0\Gamma(\alpha))^2\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{\tau^{\alpha}\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \lambda_0\frac{(C_0 d_0\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(1+\alpha)}I_{0+}^{\alpha}t^{\alpha},$$

где $I_{0+}^{\alpha}t^{\alpha}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля от степенной функции t^{α} и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Нетрудно убедиться [27, с. 15], что справедливо равенство

$$I_{0+}^{\alpha}t^{n\alpha} = \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)}t^{(1+n)\alpha}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

воспользовавшись которым, продолжим оценку функции $v_2(x,t)$:

$$|v_2(x,t)| \leqslant \lambda_0\frac{(C_0 d_0\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(1+\alpha)}I_{0+}^{\alpha}t^{\alpha} = \lambda_0\frac{(C_0 d_0\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(1+2\alpha)}t^{2\alpha}.$$

Аналогичным образом для произвольного $n=0,1,2,\ldots$ получаем

$$|v_n(x,t)| \leqslant \lambda_0\frac{(C_0 d_0\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(1+n\alpha)}t^{n\alpha}.$$

Из приведённых выше оценок следует, что ряд $v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)$ сходится равномерно в области Φ_T, так как в этой области его можно мажорировать сходящимся числовым рядом

$$\lambda_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(C_0 d_0\Gamma(\alpha)T^{\alpha})^n}{\Gamma(1+n\alpha)}.$$

Это означает, что имеет место следующая оценка решения интегрального уравнения (8):

$$|v(x,t)| \leqslant \lambda_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(C_0 d_0\Gamma(\alpha)T^{\alpha})^n}{\Gamma(1+n\alpha)} = \lambda_0 E_{\alpha}(C_0 d_0\Gamma(\alpha)T^{\alpha}), \quad (x,t)\in\Phi_T, \tag{18}$$

где $E_\alpha(\cdot)$ – функция Миттаг-Лёффлера неотрицательного вещественного аргумента [27, с. 40–45].

Далее заметим, что при выполнении условий леммы функция $v_0(x,t)$ принадлежит пространству $C^2(\mathbb{R}^n)$ при каждом фиксированном $t>0$. Для доказательства этого факта, фиксируя $x^0\in\mathbb{R}^3$, разобьём область интегрирования $\mathbb{R}^3$ в представлении (9) на два множества: $\Omega_1=\{\xi\in\mathbb{R}^3 : |\xi-x^0|\geqslant t^\alpha\}$ и $\Omega_2=\mathbb{R}^3\backslash\Omega_1$. Тогда функцию $v_0(x,t)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: $v_0^1(x,t)+v_0^2(x,t)$ (функция $v_0^i(x,t)$ определяется правой частью равенства (9) с заменой в нём $\mathbb{R}^3$ на Ω_i, $i=1,2$).

Если точка x лежит в малой окрестности точки x^0, а $\xi\in\Omega_1$, то величина $|x-\xi|$ отделена от нуля. Таким образом, чтобы вычислять $\partial^2 v_0^1(x,t)/\partial x_j^2$ можно дифференцировать под знаком интеграла, так что

$$v_0^1(x,t)=\int\limits_{\Omega_1}\frac{\partial^2 Z(x-\xi,t)}{\partial x_j^2}\varphi_{\xi_3\xi_3}(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_1}\frac{\partial^2 Y(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j^2}f_{\xi_3\xi_3}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$j=1,2,3$, т.е. $v_0^1(x,t)\in C^2(\Omega_1)$.

Для вычисления $\partial^2 v_0^2(x,t)/\partial x_j^2$ заметим, что оценки (11), (12), (14), (15) для функций $Z(x-\xi,t)$ и $Y(x-\xi,t-\tau)$ содержат особенности вида $|x-\xi|^{-k}$ с показателем $k>0$. Следовательно, такими особенностями будут обладать интегралы по Ω_2 в оценках функций $\partial v_0^2(x,t)/\partial x_j$ и $\partial^2 v_0^2(x,t)/\partial x_j^2$. Из теории ньютоновского потенциала следует, что несобственные интегралы, имеющие такие особенности, сходятся равномерно по x и определяют непрерывную в Ω_2 функцию, если только k меньше, чем число измерений области Ω_2, т.е. $k<3$ [28, с. 335]. В силу этого и локальной гёльдеровости функций $\varphi_{x_3x_3}$, $f_{x_3x_3}$ по x производные $\partial v_0^2(x,t)/\partial x_j$ и $\partial^2 v_0^2(x,t)/\partial x_j^2$ являются непрерывными в Ω_2 функциями. Таким образом, $v_0(x,t)\in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Так как функции $Z(x-\xi,t)$ и $Y(x-\xi,t-\tau)$ удовлетворяют однородному уравнению, соответствующему уравнению (4), то $\mathcal{D}^\alpha v_0(x,t)\in C^2(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, $v_0(x,t)\in C^{1-\alpha,2}(\Phi_T)$. В силу определения (10) нетрудно видеть, что таким свойством обладают все $v_j(x,t)$. Тогда из общей теории интегральных уравнений следует включение $v(x,t)\in C^{1-\alpha,2}(\Phi_T)$, т.е. функция $v(x,t)$ является классическим решением задачи Коши (4), (5).

Обозначим теперь через $\tilde v(x,t)$ решение исходного интегрального уравнения (8), в котором функции q, $f_{x_3x_3}$ и $\varphi_{x_3x_3}$ заменены на возмущённые функции $\tilde q$, $\tilde f_{x_3x_3}$ и $\tilde\varphi_{x_3x_3}$ соответственно, т.е. уравнения

$$\tilde v(x,t)=\tilde v_0(x,t)-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}Y(x-\xi,t-\tau)\tilde q(x',\tau)\tilde v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{19}$$

где

$$\tilde v_0(x,t):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}Z(x-\xi,t)\tilde\varphi_{\xi_3\xi_3}(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}Y(x-\xi,t-\tau)\tilde f_{\xi_3\xi_3}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{20}$$

Найдём оценку нормы разности между решением $v(x,t)$ уравнения (8) и решением $\tilde v(x,t)$ уравнения (19). Составляя разность $v-\tilde v$ с помощью уравнений (8) и (19), для неё получим интегральное уравнение

$$v(x,t)-\tilde v(x,t)=v_0(x,t)-\tilde v_0(x,t)-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}Y(x-\xi,t-\tau)(q(x',\tau)-\tilde q(x',\tau))v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}Y(x-\xi,t-\tau)\tilde q(x',\tau)(v(\xi,\tau)-\tilde v(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,$$

откуда выводится следующее линейное интегральное неравенство для $|v(x,t)-\tilde v(x,t)|$:

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)| \leqslant |v_0(x,t)-\tilde v_0(x,t)| + \lambda_0 C_0 \frac{T^\alpha}{\alpha} E_\alpha(C_0 d_0 \Gamma(\alpha)T^\alpha)\|q-\tilde q\|^\alpha +$$

$$+\tilde q_0 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x-\xi,t-\tau)|v(\xi,\tau)-\tilde v(\xi,\tau)|\,d\xi\,d\tau, \tag{21}$$

где $\tilde q_0 := \|\tilde q\|^\alpha$. Из равенств (9) и (20) вытекает оценка

$$|v_0(x,t)-\tilde v_0(x,t)| \leqslant \|\varphi_{x_3x_3}-\tilde\varphi_{x_3x_3}\| + C_0\frac{T^\alpha}{\alpha}\|f_{x_3x_3}-\tilde f_{x_3x_3}\|^\alpha.$$

Пусть $\sigma=\sigma(\alpha,T,d_0,\tilde q_0,\varphi_0,f_0)=\max\{1,\tilde q_0, C_0T^\alpha/\alpha, \lambda_0C_0T^\alpha/\alpha E_\alpha(C_0d_0\Gamma(\alpha)T^\alpha)\}$. Применив метод последовательных приближений к неравенству (21):

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)|_0 \leqslant \sigma(\|\varphi_{x_3x_3}-\tilde\varphi_{x_3x_3}\|^\alpha + \|f_{x_3x_3}-\tilde f_{x_3x_3}\|^\alpha + \|q-\tilde q\|^\alpha),$$

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)|_n \leqslant \tilde q_0 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x-\xi,t-\tau)|v(\xi,\tau)-\tilde v(\xi,\tau)|_{n-1}\,d\xi\,d\tau, \quad n=1,2,\ldots,$$

приходим к оценке

$$|v(x,t)-\tilde v(x,t)| \leqslant \sigma\lambda_0 E_\alpha(C_0d_0\Gamma(\alpha)T^\alpha)(\|\varphi_{x_3x_3}-\tilde\varphi_{x_3x_3}\|^\alpha + \|f_{x_3x_3}-\tilde f_{x_3x_3}\|^\alpha + \|q-\tilde q\|^\alpha), \tag{22}$$

представляющей собой оценку устойчивости решения задачи Коши (4), (5). Единственность решения этой задачи следует также из оценки (21).

Оценкой (21) мы воспользуемся и в следующем пункте работы.

2. Исследование обратной задачи (4)–(6). Положив в уравнении (8) и определении (9) $x_3=0$ и использовав дополнительное условие (6), после несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение для определения коэффициента $q(x',t)$:

$$q(x',t)=$$

$$=q_0(x',t)-\frac{1}{g(x',t)}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\xi_3,t-\tau)q(\xi_1,\xi_2,\tau)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\tau, \tag{23}$$

где

$$q_0(x',t) := \frac{1}{g(x',t)}\bigg[f(x',0,t)+\Delta_{x'}g(x',t)-({}^C\mathcal{D}_t^\alpha g)(x',t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} Z(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\xi_3,t)\varphi_{\xi_3\xi_3}(\xi_1,\xi_2,0)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x-\xi_1,x-\xi_2,\xi_3,t-\tau)f_{\xi_3\xi_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\tau\bigg].$$

Введём оператор A, определяя его действие правой частью уравнения (23), т.е.

$$A[q](x',t)=$$

$$=q_0(x',t)-\frac{1}{g(x',t)}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} Y(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\xi_3,t-\tau)q(\xi_1,\xi_2,\tau)v(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\tau. \tag{24}$$

Тогда уравнение (23) запишется в более компактном виде

$$q(x',t) = A[q](x',t).$$

Пусть $q_{00} := \|q_0\|^\alpha$. Зафиксируем число $\rho > 0$ и рассмотрим шар

$$B_T^\alpha(q_0,\rho) := \{q(x',t) : q(x',t) \in C([0,T],H^\alpha(\mathbb{R}^2)),\quad \|q-q_0\|^\alpha \leqslant \rho\},\quad \alpha \in (0,1).$$

Теорема 1. *Если* $f(x,t)\in C([0,T],H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3))$, $\varphi(x)\in H^{\alpha+2}(\mathbb{R}^3)$, $g(x',t)\in C([0,T],H^\alpha(\mathbb{R}^2))$, $\|g(x',t)\|^\alpha \geqslant g_0 > 0$, $g(x',0,0) = \varphi(x',0,0)$, *то существует такое число* $T^* \in (0,T]$, *что обратная задача (1)–(3) имеет единственное решение* $q(x',t) \in C([0,T^*],H^\alpha(\mathbb{R}^2))$.

Доказательство. Сначала докажем, что при достаточно малом $T > 0$ оператор A переводит шар $B_T^\alpha(q_0,\rho)$ в себя; т.е. из условия $q(x',t) \in B_T^\alpha(q_0,\rho)$ следует, что $A[q](x',t) \in B_T^\alpha(q_0,\rho)$. Действительно, для любой функции $q(x',t)\in C([0,T],H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ функция $A[q](x',t)$, вычисленная по формуле (24), принадлежит классу $C([0,T],H^\alpha(\mathbb{R}^2))$. Более того, для нормы разности функций $A[q]$ и q_0, воспользовавшись оценкой (18), получаем

$$\|A[q]-q_0\|^\alpha \leqslant \frac{C_0d_0\lambda_0}{\alpha g_0}T^\alpha E_\alpha(C_0d_0\Gamma(\alpha)T^\alpha). \tag{25}$$

Заметим, что функция, стоящая в правой части оценки (25), монотонно возрастает с ростом T и что из принадлежности функции $q(x',t)$ шару $B_T^\alpha(q_0,\rho)$ вытекает неравенство $\|q\|^\alpha \leqslant \rho + q_{00}$. Следовательно, оценка (25) останется верной, если в ней заменить $\|q\|^\alpha$ выражением $\rho + q_{00}$. Выполняя эти замены, приходим к оценке

$$\|A[q]-q_0\|^\alpha \leqslant \frac{C_0\lambda_0(\rho+q_{00})}{\alpha g_0}T^\alpha E_\alpha((\rho+q_{00})C_0\Gamma(\alpha)T^\alpha).$$

Пусть T_1 – положительный корень уравнения

$$\frac{C_0\lambda_0(\rho+q_{00})}{\alpha g_0}T^\alpha E_\alpha((\rho+q_{00})C_0\Gamma(\alpha)T^\alpha) = \rho.$$

Тогда при $T \in [0,T_1]$ очевидно включение $A[q](x',t) \in B_T^\alpha(q_0,\rho)$.

Теперь рассмотрим две функции $q(x',t)$ и $\tilde q(x',t)$, принадлежащие шару $B_T^\alpha(q_0,\rho)$, и оценим расстояние между их образами $A[q](x',t)$ и $A[\tilde q](x',t)$ в пространстве $C([0,T],H^\alpha(\mathbb{R}^2))$. Функция $\tilde v(x,t)$, соответствующая коэффициенту $\tilde q(x',t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (19) с функциями $\varphi_{x_3x_3} = \tilde\varphi_{x_3x_3}$ и $f_{x_3x_3} = \tilde f_{x_3x_3}$. Составив разность $A[q](x',t) - A[\tilde q](x',t)$ с помощью уравнений (8), (19) и затем оценив её норму, получим

$$\|A[q](x',t) - A[\tilde q](x',t)\|^\alpha \leqslant \frac{C_0T^\alpha}{\alpha g_0}[\|v\|\|q-\tilde q\|^\alpha + \|q\|^\alpha\|v-\tilde v\|].$$

Используя неравенство (18) и оценку (22) с $\varphi_{x_3x_3} = \tilde\varphi_{x_3x_3}$ и $f_{x_3x_3} = \tilde f_{x_3x_3}$, продолжим предыдущее неравенство в виде

$$\|A[q](x',t) - A[\tilde q](x',t)\|^\alpha \leqslant \frac{C_0T^\alpha}{\alpha g_0}\lambda_0E_\alpha(C_0d_0\Gamma(\alpha)T^\alpha)(1+\sigma\tilde q_0)\|q-\tilde q\|^\alpha. \tag{26}$$

Функции $q(x',t)$ и $\tilde q(x',t)$ принадлежат шару $B_T^\alpha(q_0,\rho)$, поэтому норма $\|\cdot\|^\alpha$ каждой из них не превосходит $\rho + q_{00}$. Отметим, что функция в правой части неравенства (26) при множителе $\|q-\tilde q\|^\alpha$ монотонно возрастает с ростом $\|q\|^\alpha$, $\|\tilde q\|^\alpha$ и T.

Следовательно оценка (26), если заменить в ней (в том числе в σ) $\|q\|^\alpha$ и $\|\tilde q\|^\alpha$ на $\rho+q_{00}$, останется верной. Таким образом, имеем

$$\|A[q](x',t) - A[\tilde q](x',t)\|^\alpha \leqslant \frac{C_0T^\alpha}{\alpha g_0}\lambda_0E_\alpha((\rho+q_{00})C_0\Gamma(\alpha)T^\alpha)(1+\sigma(\rho+q_{00}))\|q-\tilde q\|^\alpha.$$

Пусть T_2 – положительный корень уравнения

$$r(T) := \frac{C_0 T^\alpha}{\alpha g_0} \lambda_0 E_\alpha((\rho + q_{00}) C_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha)(1 + \sigma(\rho + q_{00})) = 1.$$

Тогда при $T \in [0, T_2]$ расстояние между функциями $A[q](x', t)$ и $A[\tilde{q}](x', t)$ в функциональном пространстве $C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$ не превышает расстояния между функциями $q(x', t)$ и $\tilde{q}(x', t)$, умноженного на $r(T) < 1$. Следовательно, если мы выберем $T^* = \min(T_1, T_2)$, то A будет оператором сжатия в шаре $B_T^\alpha(q_0, \rho)$. Поэтому, согласно теореме Банаха, оператор A имеет единственную неподвижную точку в шаре $B_T^\alpha(q_0, \rho)$; т.е. существует единственное решение уравнения (24). Теорема доказана.

Пусть T – какое-либо положительное число. Рассмотрим множество $\Omega(\gamma_0)$ $(\gamma_0 > 0$ – некоторое фиксированное число) функций (f, φ, g), для которых выполнены все условия теоремы 1 и $\max\{\|f\|^{\alpha+2}, |\varphi|^{\alpha+2}, \|g\|^\alpha\} \leqslant \gamma_0$. Через $Q(\gamma_1)$ обозначим класс функций $q(x', t) \in \in C([0, T], H^\alpha(\mathbb{R}^2))$, удовлетворяющих неравенству $\|q\|^\alpha \leqslant \gamma_1$ с некоторым фиксированным положительным числом γ_0.

Теорема 2. *Пусть* $(f, \varphi, g) \in \Omega(\gamma_0)$, $(\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{g}) \in \Omega(\gamma_0)$ *и* $(q, \tilde{q}) \in Q(\gamma_1)$. *Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:*

$$\|q - \tilde{q}\|^\alpha \leqslant c(\|f - \tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^{\alpha+2} + \|g - \tilde{g}\|^\alpha), \tag{27}$$

где постоянная c *зависит только от* T, α, γ_0, γ_1.

Доказательство. Используя уравнение (23), запишем уравнение для $\tilde{q}(x', t)$ и составим разность $q(x', t) - \tilde{q}(x', t)$. Затем, оценивая это выражение и используя неравенства (18), (22), получаем неравенство

$$|q - \tilde{q}|^\alpha(t) \leqslant c_0(\|f - \tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^{\alpha+2} + \|g - \tilde{g}\|^\alpha) + c_1 \int\limits_0^t |q - \tilde{q}|^\alpha(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{28}$$

постоянные c_0 и c_1 в котором зависят от тех же констант, что и c. Отсюда в силу неравенства Гронуолла получаем оценку

$$|q - \tilde{q}|^\alpha(t) \leqslant c_0 \exp(c_1 t)(\|f - \tilde{f}\|^{\alpha+2} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^{\alpha+2} + \|g - \tilde{g}\|^\alpha), \quad t \in [0, T],$$

из которой в свою очередь следует нужная оценка (27) с постоянной $c = c_0 \exp(c_1 t)$.

Из теоремы 2 очевидно вытекает единственность решения обратной задачи.

Теорема 3. *Пусть функции* $q(x', t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $g(x', t)$ *и* $\tilde{q}(x', t)$, $\tilde{f}(x, t)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{g}(x', t)$ *удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 2. Тогда, если* $f = \tilde{f}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$, $g = \tilde{g}$ *при* $(x, t) \in \Phi_T$, *имеет место равенство* $q(x', t) = \tilde{q}(x', t)$, $x' \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in an elastic solids // La Rivista del Nuovo Cimento. 1971. V. 1. № 2. P. 161–198.
2. *Бабенко Ю.И.* Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л., 1986.
3. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // Fractals Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds. A. Carpinteri and F. Mainar. New York, 1997. P. 223–276.
4. *Gorenflo R., Rutman R.* On ultraslow and intermediate processes // Transform Methods and Special Functions / Eds. P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova. Sofia, 1994. Science Culture Technology. Singapore, 1995. P. 61–81.
5. *Mainardi F.* Fractional relaxation and fractional diffusion equations, mathematical aspects // Proc. of the 12th IMACS World Congress / Ed. W.F. Ames. Georgia Tech Atlanta. 1994. V. 1. P. 329–332.

6. *Mainardi F.* Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds. A. Carpinteri and F. Mainar. New York, 1997. P. 291–348.
7. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 25. № 8. С. 1359–1368.
8. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 485–492.
9. *Eidelman S.D., Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // J. Differ. Equat. 2004. V. 199. P. 211–255.
10. *Miller L., Yamamoto M.* Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. 2013. V. 29. № 7. P. 075013.
11. *Bondarenko A.N., Ivaschenko D.S.* Numerical methods for solving inverse problems for time fractional diffusion equation with variable coefficient // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2009. V. 17. P. 419–440.
12. *Xiong T.X., Zhou Q., Hon C.Y.* An inverse problem for fractional diffusion equation in 2-dimensional case: stability analysis and regularization // J. Math. Anal. and Appl. 2012. V. 393. P. 185–199.
13. *Xiong X., Guo H., Liu X.* An inverse problem for a fractional diffusion equation // J. Comput. and Appl. Math. 2012. V. 236. P. 4474–4484.
14. *Kirane M., Malik S.A., Al-Gwaiz M.A.* An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Math. Meth. Appl. Sci. 2013. V. 36. P. 1056–1069.
15. *Romanov V.G.* An inverse problem for a layered film on a substrate // Eurasian J. Math. and Comput. Appl. 2016. V. 4. № 3. P. 29–38.
16. *Karuppiah K., Kim J.K., Balachandran K.* Parameter identification of an integro-differential equation // Nonlin. Func. Anal. and Appl. 2015. V. 20. № 2. P. 169–185.
17. *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two dimensional strongly degenerate heat equation // Electronic J. Differ. Equat. 2018. V. 77. P. 1–17.
18. *Huntul M.J., Lesnic D., Hussein M.S.* Reconstruction of time-dependent coefficients from heat moments // Appl. Math. and Comput. 2017. V. 301. P. 233–253.
19. *Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M.I., Kerimov N.B.* Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions // Appl. Math. and Comput. 2019. V. 346. P. 800–815.
20. *Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш.* Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 1. С. 110–116.
21. *Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh.* Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation // Methods of Func. Anal. and Topology. 2019. V. 25. № 3. P. 219–226.
22. *Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж.* Задача определения тепловой памяти проводящей среды // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 796–807.
23. *Durdiev D.K., Nuriddinov J.Z.* On investigation of the inverse problem for a parabolic integrodifferential equation with a variable coefficient of thermal conductivity // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2020. Т. 30. № 4. С. 572–584.
24. *Durdiev D.K., Shishkina E.L., Sitnik S.M.* The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space // arXiv:2009.10594v1 [math. CA]. 20 Sept. 2020.
25. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. С. 736.
26. *Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.* The H-function. Theory and Application. Berlin; Heidelberg, 2010.
27. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and application of fractional differetial equations // North-Holland Mathematical Studies. Amsterdam, 2006.
28. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 25.01.2021 г.
После доработки 07.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.