ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1230–1237

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958:535.42

СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ПРОНИЦАЕМОМ ТЕЛЕ

© 2021 г. Ю. А. Еремин, Е. В. Захаров

Исследуется линейная система интегральных уравнений первого рода, возникающая в задаче о дифракции волн на локальном проницаемом теле. Установлена эквивалентность системы и исходной граничной задачи дифракции. Доказаны существование и единственность решения системы и диссипативность её матричного оператора. Рассмотрены вопросы существования неизлучающих токов и их связь со свойствами матричного оператора системы.

DOI: 10.31857/S0374064121090090

Введение. При построении вычислительных алгоритмов для решения задач рассеяния акустических и электромагнитных волн на локальных проницаемых телах метод интегральных уравнений зарекомендовал себя как достаточно эффективный [1, 2]. До сих пор актуальной остаётся задача поиска таких подходов в методе интегральных уравнений, которые приводили бы к построению численных схем с хорошими вычислительными свойствами и характеристиками. При этом рассматриваются системы интегральных уравнений как первого рода, так и второго [3, 4]. Использование систем уравнений второго рода формально представляется более предпочтительным, поскольку при реализации численной схемы они позволяют обходиться относительно простыми вычислительными средствами. Однако такие системы оказываются малоэффективными при рассмотрении, например, тонких пластин [5]: система уравнений Фредгольма второго рода Мюллера–Купрадзе в случае тонких тел зачастую оказывается вырожденной [3, 6]. В случае проницаемых тел применение систем уравнений первого рода является более подходящим, особенно, если учесть, что такие системы позволяют описывать наличие различных инородных включений внутри самих тел [4].

В настоящей работе для задачи дифракции плоской волны на прозрачном трёхмерном рассеивателе с использованием техники метода нулевого поля [7, 8] получена система интегральных уравнений первого рода. Доказана её однозначная разрешимость и эквивалентность исходной граничной задаче дифракции. Подробно исследованы свойства матричного оператора системы, установлена его диссипативность. При доказательстве, наряду с исходной задачей дифракции, рассматривается также “сопряжённая” задача, т.е. задача, в которой характеристики внешней и внутренней среды меняются местами.

В последнее время наблюдается значительное возрастание интереса к поиску рассеивателей, обладающих минимальной рассеянной энергией. В этом случае в качестве объектов предлагается использовать небольшие сферы с экстремально высокими значениями волнового числа [9]. В рамках этой тематики рассматриваются так называемые ананополи – источники, излучение которых концентрируется вблизи них и не распространяется на бесконечность. Все эти вопросы непосредственно примыкают к проблеме существования неизлучающих токов и невидимого рассеивателя. Показано, что существование подобных токов связано с потерей диссипативности матричного оператора линейной системы интегральных уравнений первого рода. Установлены необходимые и достаточные условия их существования, а также их связь с “невидимым” рассеивателем [10].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о дифракции поля плоской волны u^0 на локальном проницаемом препятствии $D_{\rm i}$ в $\mathbb{R}^3$, ограниченном гладкой замкнутой поверхностью $\partial D_{\rm i} \in C^{(2,\nu)}$. Обозначим $D_{\rm e} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_{\rm i}$. Пусть математическая постановка граничной задачи имеет вид

$$\triangle u_{\rm e,i}(M) + k_{\rm e,i}^2 u_{\rm e,i}(M) = 0, \quad M \in D_{\rm e,i},$$

$$u_{\mathrm{i}}(Q)-u_{\mathrm{e}}(Q)=u^0(Q),\quad \frac{\partial u_{\mathrm{i}}(Q)}{\partial n}-\frac{\partial u_{\mathrm{e}}(Q)}{\partial n}=\frac{\partial u^0(Q)}{\partial n},\quad Q\in\partial D_{\mathrm{i}},$$
$$\frac{\partial u_{\mathrm{e}}(M)}{\partial r}-ik_{\mathrm{e}}u_{\mathrm{e}}(M)=o(r^{-1})\quad\text{при}\quad r\to\infty,\tag{1}$$

где $k_{\mathrm{e,i}}$ – волновые числа в областях $D_{\mathrm{e,i}}$ соответственно, u_{i} – полное поле в D_{i}, u_{e} – рассеянное поле в D_{e}, n – нормаль к ∂D_{e}, внешняя к области D_{e}, а $r=|M|$. Здесь и далее для сокращения записи мы придерживаемся следующего соглашения. Наличие в некотором выражении или соотношении пары нижних индексов “ i, e ” означает, что рассматриваются два таких выражения или соотношения: одно с нижним индексом “ i ” вместо “ i, e ”, а другое – с нижним индексом “ e ”. Не ограничивая общности, будем считать, что $\operatorname{Im}k_{\mathrm{e}}=0$, $\operatorname{Im}k_{\mathrm{i}}\geqslant 0$. Как известно, поставленная задача сопряжения (1) имеет единственное классическое решение [2, с. 112–115] $u_{\mathrm{e,i}}\in C^{(2)}(D_{\mathrm{e}}\bigcup D_{\mathrm{i}})\bigcap C^{(1)}((D_{\mathrm{e}}\bigcup\partial D_{\mathrm{i}})\bigcup\overline{D}_{\mathrm{i}})$.

2. Система интегральных уравнений. К решению граничной задачи дифракции (1) существуют различные подходы, такие как переход к системе интегральных уравнений второго рода Мюллера–Купрадзе [5], метод нулевого поля [8, с. 35–38] и другие. Вместе с тем для граничной задачи (1) можно получить систему интегральных уравнений первого рода, которая обладает рядом особенностей. Для построения такой системы применим к решению u_{e} задачи (1) формулу Грина [8, с. 32–34] в D_{e}, помещая точку наблюдения в D_{i}, и к решению u_{i} этой задачи формулу Грина в D_{i}, помещая точку наблюдения в D_{e}. В результате приходим к следующим соотношениям:

$$0=\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\{\partial_P\Psi_{\mathrm{e}}(M,P)u_{\mathrm{e}}(P)-\Psi_{\mathrm{e}}(M,P)\partial_P u_{\mathrm{e}}(P)\}\,d\sigma_P,\quad M\in D_{\mathrm{i}},\tag{2}$$

$$0=\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\{\Psi_{\mathrm{i}}(M,P)\partial u_{\mathrm{i}}(P)-\partial_P\Psi_{\mathrm{i}}(M,P)u_{\mathrm{i}}(P)\}\,d\sigma_P,\quad M\in D_{\mathrm{e}},\tag{3}$$

здесь $\Psi_{\mathrm{e,i}}(M,P)=i(4\pi)^{-1}h_0^{(1)}(k_{\mathrm{e,i}}R_{MP})$ – фундаментальные решения уравнений Гельмгольца, $h_0^{(1)}$ – сферическая функция Ханкеля, удовлетворяющая условию излучения, $R_{MP}=|M-P|$, для краткости записи введено обозначение $\partial_P=\partial/\partial n_P$. Полученные соотношения (2), (3) известны как соотношения метода нулевого поля [7].

Так как плоская волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца с волновым числом k_{e} всюду в D_{i} и непрерывна вместе с производными в $\overline{D}_{\mathrm{i}}$, то, используя для её представления в D_{i} третью формулу Грина [2, с. 113] и прибавляя полученное соотношение к (2), получаем

$$\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\{\partial_P\Psi_{\mathrm{e}}(M,P)u_{\mathrm{i}}(P)-\Psi_{\mathrm{e}}(M,P)\partial u_{\mathrm{i}}(P)\}\,d\sigma_P=u_0(M),\quad M\in D_{\mathrm{i}}.\tag{4}$$

В равенстве (4) учтены граничные условия (1) на ∂D_{i}.

Преобразуем соотношения (3) и (4), при этом будем существенно учитывать свойства потенциалов простого и двойного слоёв [2, с. 57–68]. Устремляя в (3) точку M, расположенную снаружи области D_{i}, к поверхности ∂D_{i} $(D_{\mathrm{e}}\ni M\to Q\in\partial D_{\mathrm{i}})$ и одновременно в (4) точку M, расположенную внутри области D_{i}, к поверхности ∂D_{i} $(D_{\mathrm{i}}\ni M\to Q\in\partial D_{\mathrm{i}})$ и вычитая затем полученные соотношения на поверхности ∂D_{i}, будем иметь

$$\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\{[\partial_P\Psi_{\mathrm{e}}(Q,P)+\partial_P\Psi_{\mathrm{i}}(Q,P)]u_{\mathrm{i}}(P)-$$
$$-[\Psi_{\mathrm{e}}(Q,P)+\Psi_{\mathrm{i}}(Q,P)]\partial u_{\mathrm{i}}(P)\}\,d\sigma_P=u_0(Q),\quad Q\in\partial D_{\mathrm{i}}.\tag{5}$$

Аналогично предыдущему, беря теперь производную по внешней нормали от правой части (3) и левой части (4) и устремляя точки к поверхности ∂D_{i}, получаем, используя для потенциала двойного слоя $W(M)$, следующее свойство [2, с. 66]:

$$\lim_{h\to+0}\left[\frac{\partial}{\partial n}W(Q+hn_Q)-\frac{\partial}{\partial n}W(Q-hn_Q)\right]=0.$$

Вычитая полученные соотношения друг из друга, приходим к равенству

$$\partial_Q\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\{[\partial_P\Psi_{\mathrm{e}}(Q,P)+\partial_P\Psi_{\mathrm{i}}(Q,P)]u_{\mathrm{i}}(P)-$$
$$-[\Psi_{\mathrm{e}}(Q,P)+\Psi_{\mathrm{i}}(Q,P)]\partial u_{\mathrm{i}}(P)\}\,d\sigma_P=\partial_Q u_0(Q),\quad Q\in\partial D_{\mathrm{i}}. \tag{6}$$

Введём в рассмотрение следующие восемь интегральных операторов:

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{e,i}}\alpha=\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\Psi_{\mathrm{e,i}}(Q,P)\alpha(P)\,d\sigma_P,\quad \boldsymbol{K}_{\mathrm{e,i}}\alpha=\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\partial_P\Psi_{\mathrm{e,i}}(Q,P)\alpha(P)\,d\sigma_P,$$

$$\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e,i}}\alpha=\partial_Q\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\Psi_{\mathrm{e,i}}(Q,P)\alpha(P)\,d\sigma_P,\quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{e,i}}\alpha=\partial_Q\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\partial_P\Psi_{\mathrm{e,i}}(Q,P)\alpha(P)\,d\sigma_P,$$

здесь $\boldsymbol{K}'$ представляет собой оператор, сопряжённый к оператору $\boldsymbol{K}$ по отношению к билинейной форме

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}}\alpha(P)\beta(P)\,d\sigma_P.$$

Систему уравнений (5), (6) запишем в операторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}) & -(\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{i}})\\ -(\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}) & (\boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{i}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_0\\ \partial u_0\end{bmatrix}, \tag{7}$$

где введены обозначения $\alpha=\partial u_{\mathrm{i}}$, $\beta=u_{\mathrm{i}}$. Исследуем полученную систему (7).

Рассмотрим подробнее свойства операторов, составляющих матричный оператор в (7):

1) операторы $\boldsymbol{S}_{\mathrm{e,i}}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{e,i}}$ и сопряжённые операторы $\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e,i}}$ представляют собой псевдодифференциальные операторы (ПДО) порядка -1 [11];

2) операторы $\boldsymbol{T}_{\mathrm{e,i}}$ являются ПДО порядка $+1$ [11];

3) для этих операторов имеют место следующие фундаментальные соотношения [2, с. 101–102]:

$$\boldsymbol{S}^{-1}=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}-0.5\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{E}+0.5\boldsymbol{K})^{-1}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}-0.5\boldsymbol{K}')^{-1}(\boldsymbol{E}+0.5\boldsymbol{K}')^{-1}. \tag{9}$$

Теорема 1. *В классе $H=C^{(1,\nu)}(\partial D_{\mathrm{i}})\times C^{(1,\nu)}(\partial D_{\mathrm{i}})$ вектор-функций система интегральных уравнений (7) эквивалентна исходной граничной задаче (1).*

Доказательство. 1. Покажем сначала, что однородная система уравнений (7) имеет только тривиальное решение.

Пусть существует нетривиальное решение $\boldsymbol{\gamma}=\{\alpha,\beta\}$ однородной системы (7). Покажем, что оно принадлежит классу H. Для этого воспользуемся приёмом регуляризации [6]. Выберем значения $k_{\mathrm{e}}=k_0$ таким образом, чтобы $\ker\boldsymbol{T}_0=\{0\}$ и $\ker\boldsymbol{S}_0=\{0\}$. Используем в качестве эквивалентного регуляризатора [12] системы (7) матричный оператор $\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{S}_0\end{bmatrix}$. В результате получим матричную систему второго рода следующего вида:

$$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=0,\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}' & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{L} & \boldsymbol{N}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Используя базовые соотношения (8), (9), несложно установить следующее: операторы $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}'$ являются операторами порядка -1, оператор $\boldsymbol{L}$ имеет порядок -2, а оператор $\boldsymbol{B}$ – порядок 0. Система (10) эквивалентна системе (7) и представляет собой систему с квазикомпактным матричным оператором [12] $\boldsymbol{A}$, поскольку нетрудно непосредственно установить, что оператор $\boldsymbol{A}^2$ компактен. Используя свойство гладкости решений (10) для правой части из H, получаем, что $\gamma \in H$ [12].

Установим теперь, что $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$. Предположим противное: $\boldsymbol{\gamma} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда построим поля $U_{\mathrm{e,i}}$, задав их формулами

$$U_{\mathrm{e}}(M) = \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \{\Psi_{\mathrm{e}}(M,P)\beta(P) - \partial_P \Psi_{\mathrm{e}}(M,P)\alpha(P)\}\, d\sigma_P, \quad M \in D_{\mathrm{e}}, \tag{11}$$

$$U_{\mathrm{i}}(M) = \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \{\partial_P \Psi_{\mathrm{i}}(M,P)\alpha(P) - \Psi_{\mathrm{i}}(M,P)\beta(P)\}\, d\sigma_P, \quad M \in D_{\mathrm{i}}. \tag{12}$$

Построенные поля $U_{\mathrm{e,i}}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и условию излучения граничной задачи (1). Покажем, что на поверхности ∂D_{i} выполняются условия сопряжения.

Устремляя в соотношении (11) точку M, расположенную снаружи области D_{i}, к поверхности ∂D_{i} $(D_{\mathrm{e}} \ni M \to Q \in \partial D_{\mathrm{i}})$ и одновременно в соотношении (12) точку M, расположенную внутри области D_{i}, к поверхности ∂D_{i} $(D_{\mathrm{i}} \ni M \to Q \in \partial D_{\mathrm{i}})$ и учитывая свойства поверхностных потенциалов, получаем

$$U_{\mathrm{e}}(Q) = -\frac{1}{2}\alpha(Q) + \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \{\Psi_{\mathrm{e}}(Q,P)\beta(P) - \partial_P \Psi_{\mathrm{e}}(Q,P)\alpha(P)\}\, d\sigma_P, \quad Q \in \partial D_{\mathrm{i}},$$

$$U_{\mathrm{i}}(Q) = -\frac{1}{2}\alpha(Q) + \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \{\partial_P \Psi_{\mathrm{i}}(Q,P)\alpha(P) - \Psi_{\mathrm{i}}(Q,P)\beta(P)\}\, d\sigma_P, \quad Q \in \partial D_{\mathrm{i}}.$$

Сравнивая последние соотношения и учитывая первую строку в (7), убеждаемся, что $U_{\mathrm{e}}(Q) = U_{\mathrm{i}}(Q)$, $Q \in \partial D_{\mathrm{i}}$. Аналогично показывается, что $\partial U_{\mathrm{e}}(Q) = \partial U_{\mathrm{i}}(Q)$, $Q \in \partial D_{\mathrm{i}}$. Таким образом, построенные на основе решения $\gamma = \{\alpha, \beta\}$ системы поля (11), (12) являются решением однородной граничной задачи (1). Так как однородная задача (1) имеет только тривиальное решение, то тем самым установлено, что $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$.

2. Покажем теперь, что система (7) эквивалентна граничной задаче (1).

Пусть существует классическое решение граничной задачи (1). Покажем, что его граничные значения $\{u_{\mathrm{i}}, \partial u_{\mathrm{i}}\}$ принадлежат пространству H и удовлетворяют системе (7). Для доказательства последнего утверждения достаточно воспользоваться представлением для решения задачи (1) вида (11), (12) и перейти к системе интегральных уравнений второго рода на поверхности ∂D_{i}, эквивалентной граничной задаче (1) [2, с. 114]. В силу гладкости поверхности и аналитичности правых частей $u_0, \partial u_0$ можно использовать свойство резольвенты Фредгольма для матричного оператора [12]. Отсюда и следует нужный результат: $\{u_{\mathrm{i}}, \partial u_{\mathrm{i}}\} \in H$.

Таким образом, установлено, что решение задачи (1) обладает нужной гладкостью на границе ∂D_{i}. Из способа получения системы (7) очевидно, что любое решение (1) также является решением системы (7), так как эта система получена непосредственным применением формул Грина к решению задачи (1). Теорема доказана.

3. Диссипативность матричного оператора. Введём в рассмотрение билинейную форму в пространстве комплексных функций

$$(\alpha, \beta) = \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \alpha(P)\beta^*(P)\, d\sigma_P,$$

где индекс звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Теорема 2. *Матричный оператор* $\boldsymbol{B}$ *системы (7) является диссипативным [11], т.е.*

$$\operatorname{Im}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})>0 \quad \textit{для всех} \quad \boldsymbol{\gamma}\in H, \quad \boldsymbol{\gamma}\neq \mathbf{0}.$$

Запишем подробно выражение $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})$, используя систему (7); получаем

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=((\boldsymbol{S}_{\rm e}+\boldsymbol{S}_{\rm i})\alpha,\alpha)-((\boldsymbol{K}_{\rm e}+\boldsymbol{K}_{\rm i})\beta,\alpha)-((\boldsymbol{K}'_{\rm e}+\boldsymbol{K}'_{\rm i})\alpha,\beta)+((\boldsymbol{T}_{\rm e}+\boldsymbol{T}_{\rm i})\beta,\beta). \tag{13}$$

Как и выше, докажем некоторые вспомогательные утверждения.
1. Для любых $\boldsymbol{\gamma}=\{\alpha,\beta\}\in H$ справедливо энергетическое соотношение

$$\operatorname{Im}(\boldsymbol{B}\gamma,\gamma)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{D_{\rm i}}\operatorname{Im}k_{\rm i}^2|U_{\rm i}|^2\,d\tau+\int\limits_{D_{\rm e}}\operatorname{Im}k_{\rm i}^2|\overline{U}_{\rm i}|^2\,d\tau+k_{\rm e}\|F_{\rm e}\|^2_{L_2(\varTheta)}, & \operatorname{Im}k_{\rm i}\geqslant 0,\\ k_{\rm e}\|F_{\rm e}\|^2_{L_2(\varTheta)}+k_{\rm e}\|F_{\rm i}\|^2_{L_2(\varTheta)}, & \operatorname{Im}k_{\rm i}=0.\end{cases} \tag{14}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U_{\rm e,i}(M)=\pm\int\limits_{\partial D_{\rm i}}\{\Psi_{\rm e,i}(M,P)\beta(P)-\partial_P\Psi_{\rm e,i}(M,P)\alpha(P)\}\,d\sigma_P, \quad \triangle U_{\rm e,i}+k^2_{\rm e,i}U_{\rm e,i}=0, \quad M\in D_{\rm e,i}, \tag{15}$$

$$\overline{U}_{i,e}(M)=\pm\int\limits_{\partial D_{\rm i}}\{\Psi_{i,e}(M,P)\beta(P)-\partial_P\Psi_{i,e}(M,P)\alpha(P)\}\,d\sigma_P, \quad \triangle\overline{U}_{\rm e,i}+k^2_{\rm e,i}\overline{U}_{\rm e,i}=0, \quad M\in D_{i,e}, \tag{16}$$

а $F_{\rm e,i}$ – диаграммы направленности рассеянного поля, определяемые следующим образом:

$$U_{\rm e}=\frac{e^{ik_{\rm e}r}}{r}F_{\rm e}(\theta,\varphi)+o(r^{-1}), \quad \text{если} \quad r\to\infty,$$

$$\overline{U}_{\rm i}=\frac{e^{ik_{\rm i}r}}{r}F_{\rm i}(\theta,\varphi)+o(r^{-1}), \quad \text{если} \quad \operatorname{Im}k_{\rm i}^2=0,$$

$\varTheta=\{0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$. Подчеркнём, что поле $\overline{U}_{i,e}(M)$ является решением уравнения Гельмгольца, соответствующего "сопряжённой" задаче, т.е. задаче, в которой внешняя среда описывается волновым числом $k_{\rm i}$, а внутренняя – числом $k_{\rm e}$.

Доказательство. Применяя вторую формулу Грина к полю $U_{\rm e,i}$ и $U^*_{\rm e,i}$ (см. (15)) последовательно в областях $D_{\rm e}$ и $D_{\rm i}$, получаем

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\partial D_{\rm i}}\{\partial U_{\rm i}U_{\rm i}^*-\partial U_{\rm e}U_{\rm e}^*\}\,d\sigma=\int\limits_{D_{\rm i}}\operatorname{Im}k_{\rm i}^2|U_{\rm i}|^2\,d\tau+k_{\rm e}\|F_{\rm e}\|^2_{L_2(\varTheta)}. \tag{17}$$

Действуя аналогичным образом для поля $\overline{U}_{\rm e,i}$ (см. (16)), будем иметь

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\partial D_{\rm i}}\{\partial\overline{U}_{\rm i}\overline{U}_{\rm i}^*-\partial\overline{U}_{\rm e}\overline{U}_{\rm e}^*\}\,d\sigma=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{D_{\rm e}}\operatorname{Im}k_{\rm i}^2|\overline{U}_{\rm i}|^2\,d\tau, & \text{если } \operatorname{Im}k_{\rm i}^2>0,\\ k_{\rm e}\|F_{\rm i}\|^2_{L_2(\varTheta)}, & \text{если } \operatorname{Im}k_{\rm i}^2=0.\end{cases} \tag{18}$$

При выводе соотношения (17) было учтено, что в случае $\operatorname{Im}k_{\rm i}^2>0$ выполняется соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\varSigma_R}\partial\overline{U}_{\rm i}\overline{U}_{\rm i}^*\,d\sigma=0,$$

где $\varSigma_R$ – сфера радиуса R.

Так как $\boldsymbol{\gamma} \in H,$ то вследствие представления для полей (15) получаем для предельных значений полей $U_{\mathrm{e,i}}$ и их нормальных производных на поверхности ∂D_{i} соотношения

$$\begin{gathered} U_{\mathrm{e}} = 0.5\alpha + \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\alpha, \quad U_{\mathrm{i}} = 0.5\alpha - \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\beta + \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\alpha, \\ \partial U_{\mathrm{e}} = 0.5\beta + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\alpha, \quad \partial U_{\mathrm{i}} = 0.5\beta - \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}\beta + \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}\alpha. \end{gathered} \tag{19}$$

Основываясь на соотношениях (19) на поверхности $\partial D_{\mathrm{i}},$ запишем равенство (17) в виде

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \{\partial U_{\mathrm{i}} U_{\mathrm{i}}^* - \partial U_{\mathrm{e}} U_{\mathrm{e}}^*\}\, d\sigma =$$

$$\begin{gathered} = (0.5\beta - \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}\beta + \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}\alpha, 0.5\alpha - \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\beta + \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\alpha) - (0.5\beta + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\alpha, 0.5\alpha + \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\alpha) = \\ = 0.5[((\boldsymbol{T}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}})\alpha, \alpha) - ((\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}})\beta, \alpha) + (\beta, (\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}})\alpha) - (\beta, (\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}})\beta)] + \\ + (\boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}\alpha, \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\alpha) - (\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\alpha, \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\alpha). \end{gathered} \tag{20}$$

Аналогично для предельных значений полей $\overline{U}_{\mathrm{e,i}}$ и их нормальных производных на ∂D_{i} имеем

$$\begin{gathered} \overline{U}_{\mathrm{i}} = 0.5\alpha + \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\alpha, \quad \overline{U}_{\mathrm{e}} = 0.5\alpha - \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}\beta + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\alpha, \\ \partial\overline{U}_{\mathrm{i}} = 0.5\beta + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}\alpha, \quad \partial\overline{U}_{\mathrm{e}} = 0.5\beta - \boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}\beta + \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\alpha. \end{gathered} \tag{21}$$

Воспользовавшись полученными соотношениями, преобразуем интеграл (18) следующим образом:

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\partial D_{\mathrm{i}}} \{\partial\overline{U}_{\mathrm{e}} \overline{U}_{\mathrm{e}}^* - \partial\overline{U}_{\mathrm{i}} \overline{U}_{\mathrm{i}}^*\}\, d\sigma =$$

$$\begin{gathered} = (0.5\beta - \boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}\beta + \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\alpha, 0.5\alpha - \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}\beta + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\alpha) - (0.5\beta + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}\alpha, 0.5\alpha + \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\alpha) = \\ = 0.5[((\boldsymbol{T}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}})\alpha, \alpha) - ((\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}})\beta, \alpha) + (\beta, (\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}})\alpha) - (\beta, (\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}})\alpha)] + \\ + (\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}\alpha, \boldsymbol{S}_{\mathrm{e}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\alpha) - (\boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}\alpha, \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\beta - \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\alpha). \end{gathered} \tag{22}$$

Видим, что в правых частях равенства (20) и равенства (22) первые четыре слагаемых совпадают друг с другом соответственно. Два же последних слагаемых отличаются только знаком, именно желание избавиться от этих “перекрёстных” членов и привело к необходимости рассмотрения “сопряжённой” задачи. Складывая полученные соотношения (20) и (22), беря от суммы мнимую часть и учитывая соотношения (17), (18), получаем окончательно

$$\operatorname{Im}\{((\boldsymbol{T}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{i}})\alpha, \alpha) - ((\boldsymbol{K}'_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{K}'_{\mathrm{i}})\beta, \alpha) - ((\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}})\alpha, \beta) + ((\boldsymbol{S}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}})\beta, \beta)\} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{D_{\mathrm{i}}} \operatorname{Im} k_{\mathrm{i}}^2 |U_{\mathrm{i}}|^2\, d\tau + \int\limits_{D_{\mathrm{e}}} \operatorname{Im} k_{\mathrm{i}}^2 |\overline{U}_{\mathrm{i}}|^2\, d\tau + k_{\mathrm{e}} \|F_{\mathrm{e}}\|^2_{L_2(\Theta)}, & \text{если} \quad \operatorname{Im} k_{\mathrm{i}}^2 > 0, \\ k_{\mathrm{e}} \|F_{\mathrm{e}}\|^2_{L_2(\Theta)} + k_{\mathrm{e}} \|F_{\mathrm{i}}\|^2_{L_2(\Theta)}, & \text{если} \quad \operatorname{Im} k_{\mathrm{i}}^2 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Сравнивая левую часть соотношения (23) и правую часть соотношения (13), видим, что соотношение (23) после замены в нём α на β и β на α совпадает с соотношением (14). Теорема доказана.

4. Неизлучающие токи. Как отмечалось во введении, в последнее время возрос интерес исследователей к формированию рассеивателей с минимальной энергией рассеяния. В частности, в качестве таких объектов рассматриваются небольшие сферы с очень высоким значением волнового числа k_{i} [9]. Это вопрос непосредственно примыкает к проблеме существования неизлучающих токов внутри тела [13] и невидимого рассеивателя [10].

Необходимо предварительно сделать следующие пояснения. Предположим, что рассматривается граничная задача дифракции (1). Рассеянное поле u_{e} во внешнем пространстве D_{e} может быть представлено как через его граничные значения на поверхности ∂D_{i} вида (15), так и через объёмный “ток” внутри области D_{i}. Для этого применяют третью формулу Грина в D_i к u_i и Ψ_e, помещая при этом точку наблюдения в область D_e. Складывая полученные соотношения, получаем представление для рассеянного поля, выражающееся через объёмный ток $J(P)=(k_\mathrm{i}^2-k_\mathrm{e}^2)u_\mathrm{i}(P)$, именно,

$$u_\mathrm{e}(M)=\int\limits_{\partial D_\mathrm{i}}(k_\mathrm{i}^2-k_\mathrm{e}^2)\Psi_\mathrm{e}(M,P)u_\mathrm{i}(P)\,d\tau_P,\quad M\in D_\mathrm{e}. \tag{24}$$

Неизлучающим током $J(P)$ называют функцию, при которой объёмный потенциал (24) обращается в нуль, т.е. $\int_{\partial D_\mathrm{i}}\Psi_\mathrm{e}(M,P)J(P)\,d\tau_P\equiv 0$, $M\in D_\mathrm{e}$, тем самым обнуляя рассеянное поле во внешней области.

Само существование неизлучающих токов, распределённых в объёме D_i, не является чем-то исключительным. Так, в работе [13] показано, что любую функцию из $C^{(2)}(D_\mathrm{i})\bigcap C(\overline{D}_\mathrm{i})$ можно превратить в неизлучающий ток D_e. В нашем же случае мы стремимся установить существование неизлучающих токов в граничной задаче (1). Для этого дадим следующее

Определение. Назовём вектор-функцию $\boldsymbol{\gamma}=\{\alpha,\beta\}\in H$, $\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$, *неизлучающим током*, если для неё имеет место равенство

$$\operatorname{Im}(\boldsymbol{B}\gamma,\gamma)=0. \tag{25}$$

Отметим, что существование неизлучающего тока в данном случае не означает, что $\boldsymbol{B}\gamma=0$, так как из последнего соотношения в силу полученных выше результатов сразу следует, что $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием существования неизлучающих токов является существование нетривиальных решений следующей внутренней задачи Дирихле:*

$$\begin{gathered}(\triangle+k_\mathrm{i}^2)(\triangle+k_\mathrm{e}^2)w(M)=0,\quad M\in D_\mathrm{i},\\ w(P)=\frac{\partial}{\partial n_P}w(P)=0,\quad P\in\partial D_\mathrm{i}.\end{gathered} \tag{26}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует вектор-функция $\boldsymbol{\gamma}\in H$, $\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$, такая, что выполняется равенство (25). Построим поля $U_\mathrm{e,i}$ и $\overline{U}_\mathrm{e,i}$ согласно равенствам (15) и (16) соответственно. Предположим, что $\operatorname{Im}k_\mathrm{i}^2>0$, тогда в силу (14) получим

$$\begin{gathered}U_\mathrm{i}(M)\equiv 0,\quad M\in D_\mathrm{i},\\ \overline{U}_\mathrm{i}(M)\equiv 0,\quad U_\mathrm{e}(M)\equiv 0,\quad M\in D_\mathrm{e}.\end{gathered}$$

Последнее тождество вытекает из условия $\|F_\mathrm{e}\|^2_{L_2(\Theta)}=0$. Так как диаграмма направленности равна нулю, то и поле во внешней области равно нулю в силу леммы Реллиха [2, с. 86]. Тогда, используя соотношения (19) и (21), получаем, что на поверхности ∂D_i выполняются равенства

$$0.5\alpha-S_\mathrm{i}\beta+K_\mathrm{i}\alpha=0,\quad 0.5\beta-K_\mathrm{i}\beta+T_\mathrm{i}\alpha=0,\quad 0.5\alpha+S_\mathrm{i}\beta-K_\mathrm{i}\alpha=0,\quad 0.5\beta+K_\mathrm{i}\beta-T_\mathrm{i}\alpha=0,$$

из которых очевидно следует, что $\alpha=0$, $\beta=0$, т.е. $\gamma=\mathbf{0}$. Таким образом, в случае существования неизлучающих токов необходимо, чтобы $\operatorname{Im}k_\mathrm{i}^2=0$. Тогда соотношение (14) принимает вид $\operatorname{Im}(\boldsymbol{B}\gamma,\gamma)=k_\mathrm{e}\|F_\mathrm{e}\|^2_{L_2(\Theta)}+k_\mathrm{e}\|F_\mathrm{i}\|^2_{L_2(\Theta)}$. Откуда в силу (25) и леммы Реллиха получаем

$$\overline{U}_\mathrm{i}(M)\equiv 0,\quad U_\mathrm{e}(M)\equiv 0,\quad M\in D_\mathrm{e}. \tag{27}$$

Из тождеств (27) на основании соотношений (19), (21) для предельных значений функций U_i и $\overline{U}_\mathrm{e}$ и их нормальных производных на ∂D_i вытекают равенства

$$U_\mathrm{i}(P)=\overline{U}_\mathrm{e}(P)=\alpha(P),\quad \partial U_\mathrm{i}(P)=\overline{\partial U}_\mathrm{e}(P)=\beta(P),\quad P\in\partial D_\mathrm{i}. \tag{28}$$

Так как определённые формулами (15) и (16) функции U_i и $\overline{U}_\mathrm{e}$ удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца в D_i, то легко видеть, что их разность $w=U_\mathrm{i}-\overline{U}_\mathrm{e}$ с учётом граничных условий (28) является нетривиальным решением граничной задачи (26). Необходимость установлена.

Достаточность. Пусть существует нетривиальное решение задачи (26). Заметим, что оно может существовать лишь при условии $\operatorname{Im} k_{\mathrm{i}}^2 = 0$ [10]. Тогда, следуя [10] и используя решение w этой задачи, зададим внутри области D_{i} функции $\overline{U}_{\mathrm{e}}$ и U_{i} равенствами

$$\overline{U}_{\mathrm{e}} = \frac{\triangle w + k_{\mathrm{i}}^2 w}{k_{\mathrm{e}}^2 - k_{\mathrm{i}}^2} \quad \text{и} \quad U_{\mathrm{i}} = \frac{\triangle w + k_{\mathrm{e}}^2 w}{k_{\mathrm{e}}^2 - k_{\mathrm{i}}^2}. \tag{29}$$

Из равенств (29) следует, что $w = \overline{U}_{\mathrm{e}} - U_{\mathrm{i}}$. Используя свойства гладкости решения и граничные условия задачи (26), получаем

$$\triangle \overline{U}_{\mathrm{e}} + k_{\mathrm{e}}^2 \overline{U}_{\mathrm{e}} = 0, \quad \triangle U_{\mathrm{i}} + k_{\mathrm{i}}^2 U_{\mathrm{i}} = 0 \quad \text{в} \quad D_{\mathrm{i}},$$

$$U_{\mathrm{i}}(P) = \overline{U}_{\mathrm{e}}(P) = \xi(P), \quad \partial U_{\mathrm{i}}(P) = \partial \overline{U}_{\mathrm{e}}(P) = \zeta(P), \quad P \in \partial D_{\mathrm{i}}, \tag{30}$$

и $\boldsymbol{\eta} = \{\xi, \zeta\} \in H$. Теперь, воспользовавшись представлениями для полей (15) и (16), определим в D_{e} поля U_{e} и $\overline{U}_{\mathrm{i}}$. Далее, учитывая соотношения для предельных значений на ∂D_{i} и граничные условия из (30), приходим к тождествам (27), которые служат эквивалентной формулировкой существования неизлучающих токов в силу (24). Достаточность установлена. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., 2008.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
3. *Martin P.A., Ola P.* Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogeneous dielectric obstacle // Proc. Roy. Soc. 1993. V. 123. P. 185–208.
4. *Захаров Е.В., Сетуха А.В.* Метод граничных интегральных уравнений в задаче дифракции монохроматической электромагнитной волны на системе идеально проводящих и кусочно-однородных диэлектрических объектов // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1187–1200.
5. *Еремин Ю.А.* Интегральные представления для полей в трёхмерных задачах дифракции на проницаемых телах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1182–1186.
6. *Купрадзе В.Д.* О приближенном решении задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. Вып. 2. С. 59–107.
7. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г., Скобелев С.П.* Метод нулевого поля в задачах дифракции волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 8. С. 1490–1494.
8. *Doicu A., Eremin Yu., Wriedt T.* Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources. San Diego, 2000. P. 18–38.
9. *Tribelsky M.I., Miroshnichenko A.E.* Giant in-particle field concentration and fano resonances at light scattering by high-refractive index particles // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. P. 053837.
10. *Еремин Ю.А.* К проблеме существования невидимого рассеивателя в теории дифракции // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С. 684–687.
11. *Агранович М.С.* Спектральные свойства задач дифракции // Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М., 1977. С. 289–416.
12. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техн. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. М., 1988. Т. 27. С. 131–228.
13. *Алексеев В.Г., Чеботарев А.Ю.* Обратные задачи акустического потенциала // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 8. С. 1189–1199.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 28.03.2021 г.
После доработки 28.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.