ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1238–1254

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958:532+517.968.23

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ИСТОЧНИКАМИ НА ГРАНИЦАХ

© 2021 г. В. Ф. Пивень

Для трёхмерных фильтрационных течений в неоднородной среде ставятся и исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения с усложнёнными граничными условиями, содержащими сингулярные функции. Источники течения являются произвольными дискретными и располагаются как на границах, так и вне границ. Когда границы моделируются каноническими поверхностями (плоскость и сфера), решения задач представлены в конечном виде. В случае произвольных замкнутых гладких граничных поверхностей с расположенным на них точечными стоком (источником) использован обобщённый потенциал двойного слоя, что позволило редуцировать задачу сопряжения и вторую краевую задачу к сингулярному и гиперсингулярному интегральным уравнениям соответственно. Исследованные задачи – математические модели трёхмерных фильтрационных процессов в неоднородных средах, представляющие интерес, например, для практики разработки природных нефтеносных (водоносных) пластов грунта.

DOI: 10.31857/S0374064121090107

Введение. В аэродинамике и теории фильтрации исследуются возникающие на практике задачи, которые характеризуются сингулярными (негладкими) граничными условиями. Трёх- и двумерные задачи обтекания непроницаемых поверхностей летательных аппаратов при наличии отсоса внешнего потока и протекания воздуха через щели обтекаемых поверхностей исследуются в работах [1, с. 164; 2, 3]. Поставленная в них задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщённым краевым условием редуцируется к сингулярному (гиперсингулярному) интегральному уравнению, которое решается численным методом дискретных особенностей.

Ряд двумерных задач фильтрации в однородной среде (грунте) с источниками на непроницаемых границах, являющихся отрезком прямой или окружностью, изучен в работах [4, с. 87; 5, 6]. В статье [7] исследованы двумерные первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения с источниками течения, которые характеризуются сингулярностями (изолированными особыми точками логарифмического типа и полюсами), расположенными на границах и вне границ. Задачи решены в конечном виде в случае канонических границ (прямая и окружность), а в общем случае произвольных гладких границ редуцированы к сингулярным интегральным уравнениям. В настоящей работе аналогичный подход используется для исследования трёхмерных граничных задач фильтрации в неоднородной, вообще говоря, среде с обобщёнными (усложнёнными) граничными условиями, которые характеризуют источники течения, расположенные на произвольных гладких граничных поверхностях, а также вне этих поверхностей.

1. Постановка задач. Рассмотрим трёхмерное стационарное течение несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Течение характеризуем скоростью фильтрации $\vec{v}$ и обобщённым потенциалом φ, которые как функции точки M пространства удовлетворяют записанным в безразмерных величинах [8, с. 10] обобщённому закону Дарси

$$\vec{v} = K\nabla\varphi \quad \left(\varphi = -\frac{p+\rho\Pi}{\mu}\right) \tag{1.1}$$

и уравнению неразрывности

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $K = K(M) > 0$ – коэффициент проницаемости (проницаемость) среды, он моделируется непрерывно дифференцируемой функцией, p – давление, μ и ρ – вязкость и плотность жидкости соответственно, Π – потенциал массовых сил, ∇ – оператор Гамильтона.

Из уравнений (1.1) и (1.2) следует, что обобщённый потенциал $\varphi(M)$ удовлетворяет всюду в области D течения, за исключением его сингулярностей (изолированных особых точек), уравнению эллиптического типа

$$\nabla \cdot [K(M)\nabla\varphi(M)] = 0, \quad M \in D. \tag{1.3}$$

В частности, если среда однородная ($K = \mathrm{const}$), то уравнение (1.3) представляет собой уравнение Лапласа

$$\triangle\varphi(M) = 0, \quad M \in D; \tag{1.3$'$}$$

его решение $\varphi(M)$ – потенциал – гармоническая в области D функция координат.

Запишем условия для обобщённого потенциала $\varphi(M)$ на границах, которые моделируются гладкими поверхностями. Пусть на границе σ_1 области D задан обобщённый потенциал $\varphi(M)$ (давление $p(M)$ и потенциал $\Pi(M)$). Тогда выполняется условие

$$\varphi^+(M) = \alpha_1(M), \quad M \in \sigma_1, \tag{1.4}$$

где $\alpha_1(M)$ – непрерывная функция. Здесь и далее знаком “ $+$ ” (знаком “$-$ ”) обозначается предельное значение функции при подходе со стороны (противоположной стороны) орта нормали к границе. Считаем, что орт нормали $\vec{n}_M$, $M \in \sigma_1$, направлен внутрь области D. В случае напорной фильтрации, когда массовые силы пренебрежимо малы $(\rho|\nabla\Pi| \ll |\nabla p|)$, а давление p на границе σ_1 можно принять постоянным, $\varphi^+(M) = \mathrm{const}$, $M \in \sigma_1$, и, следовательно, условие (1.4) принимает вид

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_1. \tag{1.4$'$}$$

Если область D имеет непроницаемую для жидкости границу σ_2, то, согласно закону (1.1), нормальная составляющая скорости $v_n = K(M)\partial\varphi(M)/\partial n_M$ равна нулю, $M \in \sigma_2$. Тогда, учитывая, что $K(M) \neq 0$, $M \in \sigma_2$, имеем условие непротекания

$$\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_2. \tag{1.5}$$

Течение в области D среды проницаемости $K(M)$ может быть ограничено сингулярной поверхностью $\sigma_0 = \sigma_{01} \bigcup \sigma_{02}$, на которой $K(M) = \infty$, $M \in \sigma_{01}$, и/или $K(M) = 0$, $M \in \sigma_{02}$. Тогда, согласно закону (1.1), должны выполняться условия

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left(K(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \tag{1.6}$$

Пусть поверхность Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2 $(D = D_1 \bigcup D_2)$, проницаемости сред которых равны $K_1(M)$ и $K_2(M)$ соответственно, причём $K_\nu(M) = k_\nu K(M)$ ($k_\nu = \mathrm{const}$, $\nu = 1, 2$). Течение в областях D_1 и D_2 характеризуют обобщённые потенциалы $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$. На границе Γ имеем вытекающие из закона (1.1) условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения)

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M), \quad k_1\left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+ = k_2\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma, \tag{1.7}$$

в которых считаем, что орт нормали $\vec{n}_M$, $M \in \Gamma$, направлен в область D_1.

Пусть течение вызвано произвольно заданными источниками в среде проницаемости $K(M)$ и характеризуется сингулярностями (изолированными особыми точками) обобщённого потенциала $\varphi_0(M)$. Потенциал удовлетворяет уравнению (1.3) всюду в области D течения, за исключением его особых точек, и является гладкой функцией вне них. Представим $\varphi_0(M)$ в виде

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M),$$

где сингулярности функции $f_0(M)$ расположены только на некоторых заданных гладких поверхностях, а функции $f(M)$ – вне этих поверхностей. Учтём источники течения. Обобщённый потенциал $\varphi(M)$ в случае, когда заданная поверхность – это граница σ_1 или σ_2 области D течения, имеет вид

$$\varphi(M)=\varphi_0(M)+\varphi_*(M)=f_0(M)+f(M)+\varphi_*(M),\quad M\in D, \tag{1.8}$$

а в случае, когда заданная поверхность – это граница Γ сопряжения областей D_1 и D_2 $(D=D_1\bigcup D_2)$ среды с проницаемостями $K_1(M)$ и $K_2(M)$ соответственно $(K_\nu=k_\nu K(M)$, $k_\nu=\mathrm{const})$, – вид

$$\varphi_\nu(M)=\frac{1}{k_\nu}(\varphi_0(M)+\varphi_*(M))=\frac{1}{k_\nu}(f_0(M)+f(M)+\varphi_*(M)),\quad M\in D_\nu,\quad \nu=1,2. \tag{1.9}$$

Здесь $\varphi_*(M)$ – обобщённый потенциал возмущений, обусловленных каждой границей σ_1, σ_2 и Γ.

Учитывая представления (1.8) и (1.9), запишем для обобщённого потенциала $\varphi_*(M)$ граничные условия (1.4)–(1.7), а также условия в бесконечности в случае неограниченной области D. Условия (1.4) и $(1.4')$ принимают соответственно вид

$$\varphi_*^+(M)=\alpha_1(M)-f_0(M)-f(M),\quad M\in\sigma_1, \tag{1.10}$$

$$\varphi_*^+(M)=-f_0(M)-f(M),\quad M\in\sigma_1, \tag{1.10$'$}$$

а условия (1.5) – вид

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M}\right)^+=-\frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M}-\frac{\partial f(M)}{\partial n_M},\quad M\in\sigma_2. \tag{1.11}$$

Пусть функции $f_0(M)$ и $f(M)$ удовлетворяют условиям (1.6). Тогда имеем

$$\varphi_*^+(M)=0,\quad M\in\sigma_{01};\quad \left(K(M)\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M}\right)^+=0,\quad M\in\sigma_{02}. \tag{1.12}$$

Полагая, что на границе Γ выполняются равенства

$$f_0^+(M)=f_0^-(M)=f_0(M),\quad f^+(M)=f^-(M)=f(M),$$

$$\left(\frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M}\right)^+=\left(\frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M}\right)^-,\quad \left(\frac{\partial f(M)}{\partial n_M}\right)^+=\left(\frac{\partial f(M)}{\partial n_M}\right)^-,\quad M\in\Gamma,$$

получаем условия сопряжения

$$(1-\lambda)\varphi_*^+(M)-(1+\lambda)\varphi_*^-(M)=2\lambda[f_0(M)+f(M)],$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M}\right)^+=\left(\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M}\right)^-,\quad M\in\Gamma, \tag{1.13}$$

где $\lambda=(k_1-k_2)/(k_1+k_2)$, $\lambda\in(-1,1)$, а орт $\vec{n}_M$, $M\in\Gamma$, как и выше, направлен внутрь области D_1.

В условиях (1.10), (1.11) и (1.13) функция $f_0(M)$ и её производная $\partial f_0(M)/\partial n_M$ имеют сингулярности на границах. Поэтому обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ будет иметь такие же сингулярности на границах, что и функция $f_0(M)$, и должен удовлетворять указанным условиям всюду на границах, за исключением изолированных особых точек функции $f_0(M)$.

Потребуем для обобщённого потенциала $\varphi_*(M)$ выполнения в бесконечности условий регулярности [8, с. 20]

$$\varphi_*(M) = O(1/r), \quad K(M)|\nabla\varphi_*(M)| = O(1/r^2) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{1.14}$$

где r – расстояние от точки M до некоторой фиксированной точки M_0 области D. Условия (1.14) выражают затухание обобщённого потенциала и скорости возмущений на бесконечности и обеспечивают единственность решения поставленных задач.

Постановка задач состоит в следующем. Заданы источники течения (задан обобщённый потенциал $\varphi_0(M)$) и проницаемость среды $K(M)$ (проницаемости $K_\nu(M) = k_\nu K(M)$, $k_\nu = \mathrm{const}$, $\nu = 1, 2$). Найти обобщённый потенциал $\varphi_*(M)$, удовлетворяющий уравнению (1.3) и одному из следующих условий: условию (1.10) (первая краевая задача), условию (1.11) (вторая краевая задача), условию (1.13) (задача сопряжения). Если область D ограничена сингулярной поверхностью σ_0 или/и содержит бесконечно удалённую точку, то $\varphi_*(M)$ должен также удовлетворять условию (1.12) или/и (1.14). По найденному обобщённому потенциалу $\varphi_*(M)$ согласно представлениям (1.8) и (1.9) находим искомые обобщённые потенциалы $\varphi(M)$ и $\varphi_\nu(M)$, $\nu = 1, 2$.

Замечание. В случае второй внутренней краевой задачи для $\varphi_*(M)$, когда область D течения ограничена непроницаемой поверхностью σ_2, алгебраическая сумма мощностей источников и стоков, расположенных внутри и на поверхности σ_2, должна быть равна нулю в силу уравнения (1.2) неразрывности. Это означает, что характеризующий заданные источники обобщённый потенциал $\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M)$ должен удовлетворять условию

$$\int\limits_{\sigma_2} K(M)\frac{\partial\varphi_0(M)}{\partial n_M}\,d\sigma_M = \int\limits_{\sigma_2} K(M)\left(\frac{\partial f_0(M)}{\partial n_M} + \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}\right)d\sigma_M = 0, \tag{1.15}$$

которое выражает отсутствие потока жидкости через поверхность σ_2. Равенство (1.15) – условие разрешимости второй внутренней краевой задачи [8, с. 39].

Решение поставленных задач представим в конечном виде в случае однородной и кусочно-однородной среды с каноническими границами (плоскость и сфера), а в случае неоднородной среды и произвольных замкнутых гладких границ редуцируем задачи к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

2. Задачи с каноническими границами. Рассмотрим трёхмерное течение в однородной среде. Каждую границу Γ, σ_1 и σ_2 будем моделировать поверхностью в виде плоскости, уравнение которой $x = 0$ $(y, z \in (-\infty, \infty))$.

Теорема 1 (сопряжения на плоскости). *Пусть течение в однородной безграничной среде проницаемости $K = 1$ описывает потенциал*

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f_1(M) + f_2(M), \tag{2.1}$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(M)$ расположены только на плоскости $x = 0$, а функций $f_1(M)$ и $f_2(M)$ – только вне её в полупространствах $x > 0$ и $x < 0$ соответственно. Причём имеют место соотношения

$$f_j(M) = O(1/r) \quad \textit{при} \quad r \to \infty, \quad j = 0, 1, 2, \tag{2.2}$$

если эти функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в областях $D_1(x > 0)$ и $D_2(x < 0)$ среды с проницаемостями k_1 и k_2 соответственно, сопрягающихся по граничной плоскости $\Gamma = \{x = 0,\ y, z \in (-\infty, \infty)\}$, характеризуют потенциалы $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$:

$$\begin{gathered} k_1\varphi_1(M) = \varphi_0(M) + \lambda(f_0(M_*) + f_1(M_*) + f_2(M)), \quad M \in D_1, \\ k_2\varphi_2(M) = \varphi_0(M) - \lambda(f_0(M) + f_1(M) + f_2(M_*)), \quad M \in D_2, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$, а точки $M = (x, y, z)$ и $M_* = (-x, y, z)$ симметричны относительно плоскости $x = 0$.

Доказательство. Учитывая представления (1.9) и (2.3), потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ ищем в виде

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} A_1(f_0(M_*) + f_1(M_*) + f_2(M)), & M \in D_1, \\ A_2(f_0(M) + f_1(M) + f_2(M_*)), & M \in D_2, \end{cases}$$

в которых A_1 и A_2 – константы. Функция $f_0(M_*)$ так же, как и заданная функция $f_0(M)$, имеет сингулярности только на границе Γ. Поэтому $f_0(M_*)$ – гармоническая функция всюду в области $D = D_1 \bigcup D_2$. Функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ имеют заданные сингулярности в областях $D_1(x > 0)$ и $D_2(x < 0)$. Функции $f_1(M_*)$, $M_* \in D_2$, и $f_2(M_*)$, $M_* \in D_1$, имеют сингулярности в областях D_2 и D_1, так как они являются аналитическими продолжениями в эти области функций $f_1(M)$, $M \in D_1$, и $f_2(M)$, $M \in D_2$, соответственно. Поэтому $f_1(M_*)$ и $f_2(M_*)$ – гармонические функции соответственно в областях D_1 и D_2. Тогда потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ – гармоническая функция, удовлетворяющая в области $D = D_1 \bigcup D_2$ уравнению $(1.3')$.

Найдём константы A_1 и A_2, удовлетворив потенциал $\varphi_*(M)$ условиям (1.13), в которых в рассматриваемом случае орт нормали $\vec{n}_M$, $M \in \Gamma$, сонаправлен с осью Ox. Учтём потенциал (2.1) и выполняющиеся на границе Γ равенства

$$f_j(M) = f_j(M_*), \quad \frac{\partial f_j(M)}{\partial x} = -\frac{\partial f_j(M_*)}{\partial(-x)}, \quad j = 0, 1, 2, \quad M = M_* = (0, y, z).$$

Получим равенство $((1-\lambda)A_1 - (1+\lambda)A_2 - 2\lambda)\varphi_0(M) = 0$, т.е.

$$(A_1 + A_2)\left(\frac{\partial f_0(M)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(M)}{\partial x} - \frac{\partial f_2(M)}{\partial x}\right) = 0, \quad M = (0, y, z),$$

которое тождественно удовлетворяется всюду на границе Γ, исключая точки сингулярности функции $f_0(M)$, $M \in \Gamma$, если $A_1 = \lambda$ и $A_2 = -\lambda$. Тогда для потенциала $\varphi_*(M)$ справедливо представление

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} \lambda(f_0(M_*) + f_1(M_*) + f_2(M)), & M \in D_1, \\ -\lambda(f_0(M) + f_1(M) + f_2(M_*)), & M \in D_2. \end{cases} \tag{2.4}$$

В силу условий (2.2) потенциал (2.4) удовлетворяет в бесконечности условиям (1.14) при $K = \text{const}$. Согласно представлениям (1.9) и (2.4) имеем искомые потенциалы (2.3) течения. Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи задания источников течения и запишем для них потенциалы (2.3). Если источники течения на границе Γ отсутствуют $(f_0(M) = 0)$, то [8, с. 257]

$$k_1\varphi_1(M) = f_1(M) + \lambda f_1(M_*) + (1+\lambda)f_2(M), \quad M \in D_1,$$

$$k_2\varphi_2(M) = (1-\lambda)(f_1(M) + f_2(M)), \quad M \in D_2.$$

Когда источники располагаются только на границе Γ, а вне Γ источников нет $(f_1(M) = 0$, $f_2(M) = 0)$, то

$$k_1\varphi_1(M) = f_0(M) + \lambda f_0(M_*), \quad M \in D_1, \quad k_2\varphi_2(M) = (1-\lambda)f_0(M), \quad M \in D_2. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость $x = 0$ $(y, z \in (-\infty, \infty))$ моделирует границу σ_1 или границу σ_2.

Теорема 2. *Пусть в безграничной среде проницаемости $K = 1$ источники течения располагаются в полупространстве $x \geqslant 0$ и течение характеризует потенциал*

$$\varphi_0(M) = f_0(M) + f(M),$$

в котором сингулярности функции $f_0(M)$ лежат только на плоскости $x = 0$, а функции $f(M)$ – только в полупространстве $D(x > 0)$. Причём имеют место соотношения

$$f_0(M) = O(1/r) \quad \textit{и} \quad f(M) = O(1/r) \quad \textit{при} \quad r \to \infty, \tag{2.6}$$

если функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в области $D(x>0)$ *среды проницаемости* $K=1$, *которая ограничена плоскостью* $x=0$, *если эта плоскость является границей* σ_1, *характеризует потенциал*

$$\varphi(M)=\varphi_0(M)-\varphi_0(M_*),\quad M\in D, \tag{2.7}$$

а если плоскость $x=0$ *является границей* σ_2 – *потенциал*

$$\varphi(M)=\varphi_0(M)+\varphi_0(M_*),\quad M\in D, \tag{2.8}$$

где $\varphi_0(M_*)=f_0(M_*)+f(M_*)$, *а точка* $M_*=(-x,y,z)$ *симметрична точке* $M=(x,y,z)$ *относительно плоскости* $x=0$.

Доказательство. Сингулярности функции $\varphi_0(M_*)$ расположены на границах σ_1 или σ_2, а функции $f(M_*)$ – при $x<0$. Поэтому потенциалы возмущений $\varphi_*(M)=-\varphi_0(M_*)$ и $\varphi_*(M)=\varphi_0(M_*)$ $(\varphi_0(M_*)=f_0(M_*)+f(M_*))$ – гармонические функции, удовлетворяющие уравнению $(1.3')$ в области $D(x>0)$. Так как на границах σ_1 и σ_2 (орт $\vec{n}_M\in\sigma_2$ направлен вдоль оси Ox) справедливы равенства

$$\varphi_0(M)=\varphi_0(M_*),\quad \frac{\partial\varphi_0(M)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi_0(M_*)}{\partial(-x)},\quad M=M_*=(0,y,z),$$

то потенциалы возмущений $\varphi_*(M)$ удовлетворяют условиям $(1.10')$ и (1.11) на этих границах всюду, за исключением особых точек функции $f_0(M)$. В силу условий (2.6) потенциалы возмущений $\varphi_*(M)$ удовлетворяют в бесконечности условиям (1.14) при $K=1$. Тогда выражения (2.7) и (2.8) – действительно искомые потенциалы течений. Теорема доказана.

Отметим, что потенциалы (2.7) и (2.8) можно рассматривать как предельные случаи потенциала $\varphi_1(M)$ представления (2.3) при $\lambda\to-1$ и $\lambda\to1$, когда $k_1=1$ и $\varphi_0(M)=f_0(M)+$ $+f(M)$ $(f_1(M)=f(M),\ f_2(M)=0)$.

Из представлений (2.7) и (2.8) вытекают частные случаи потенциалов в зависимости от заданных источников течения: когда на границах σ_1 и σ_2 нет источников $(f_0(M)=0)$, то в представлениях (2.7) и (2.8) $\varphi_0(M)=f(M)$ [8, с. 260], и, если источники располагаются только на этих границах, а вне них источников нет $(f(M)=0)$, то $\varphi_0(M)=f_0(M)$.

Пусть сфера радиуса a с центром в начале координат – модель границ Γ, σ_1 и σ_2. Рассмотрим сначала случай, когда эта сфера – граница сопряжения областей $D_1(r>a)$ и $D_2(r<a)$ среды с проницаемостями k_1 и k_2 соответственно.

Теорема 3 (сопряжения на сфере). *Пусть течение в безграничной среде проницаемости* $K=1$ *характеризует потенциал*

$$\varphi_0(M)=f_0(M)+f_1(M)+f_2(M), \tag{2.9}$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(M)$ *располагаются только на расстоянии* $r=a$ *от начала координат, а функций* $f_1(M)$ *и* $f_2(M)$ – *только при* $r>a$ *и* $r<a$ *соответственно. Причём имеют место соотношения*

$$f_j(M)=O(1)\quad\text{при}\quad r\to0,\quad j=0,1,\quad f_2(M)=O(1/r)\quad\text{при}\quad r\to\infty,\quad j=0,1,2. \tag{2.10}$$

Тогда течения в областях $D_1(r>a)$ *и* $D_2(r<a)$ *сред с проницаемостями* k_1 *и* k_2 *соответственно, сопрягающихся по граничной сфере* $\Gamma=\{r=a\}$, *определяют потенциалы* $\varphi_1(M)$ *и* $\varphi_2(M)$:

$$k_1\varphi_1(M)=\varphi_0(M)+\lambda\left\{\frac{a}{r}\sum_{j=0}^{1}\left(f_j(M_*)-\frac{1+\lambda}{2}\Phi_j(M_*)\right)+f_2(M)+\frac{1+\lambda}{2}\Phi_2(M)\right\},\quad M\in D_1,$$

$$k_2\varphi_2(M)=\varphi_0(M)-\lambda\left\{\sum_{j=0}^{1}\left(f_j(M)+\frac{1-\lambda}{2}\Phi_j(M)\right)+\frac{a}{r}\left(f_2(M_*)-\frac{1-\lambda}{2}\Phi_2(M_*)\right)\right\},\quad M\in D_2. \tag{2.11}$$

Здесь

$$\Phi_j(M) = \int\limits_0^1 \tau^{-(1-\lambda)/2} f_j(M\tau)\,d\tau, \quad j = 0,1, \quad \Phi_2(M) = \int\limits_\infty^1 \tau^{-(1+\lambda)/2} f_2(M\tau)\,d\tau,$$

$\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$, *а точки* $M = (x, y, z)$ *и* $M_* = (x_*, y_*, z_*)$ *сопряжены относительно сферы радиуса* a, *т.е. их радиус-векторы* $\vec{r}$ *и* $\vec{r}_*$ *(декартовы координаты) связаны преобразованием инверсии:*

$$\vec{r}_* = \frac{a^2}{r^2}\vec{r} \quad \left(x_* = \frac{a^2}{r^2}x, \quad y_* = \frac{a^2}{r^2}y, \quad z_* = \frac{a^2}{r^2}z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Доказательство. Согласно представлениям (1.9) и (2.11) потенциал возмущения $\varphi(M)$ ищем в виде

$$\varphi_*(M) = \begin{cases} A_1\Big\{\dfrac{a}{r}\displaystyle\sum_{j=0}^{1}(f_j(M_*) - \alpha_1\Phi_j(M_*)) + f_2(M) + \alpha_1\Phi_2(M)\Big\}, & M \in D_1, \\ A_2\Big\{\displaystyle\sum_{j=0}^{1}(f_j(M) + \alpha_2\Phi_j(M)) + \dfrac{a}{r}(f_2(M_*) - \alpha_2\Phi_2(M_*))\Big\}, & M \in D_2, \end{cases}$$

где

$$\Phi_j(M) = \int\limits_0^1 \tau^{\alpha_1 - 1} f_j(M\tau)\,d\tau, \quad j = 0,1, \quad \Phi_2(M) = \int\limits_\infty^1 \tau^{\alpha_2 - 1} f_2(M\tau)\,d\tau,$$

A_k, α_k, $k = 1, 2$, – константы.

По условию теоремы функция $f_0(M)$ имеет особые точки только на границе $\Gamma = \{r = a\}$ сопряжения областей, а функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ – только в областях $D_1 (r > a)$ и $D_2 (r < a)$ соответственно. Поэтому функция $f_0(M)$ – гармоническая всюду в области $D = D_1 \bigcup D_2$, а функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ – соответственно в областях D_2 и D_1. Функции $\Phi_j(M)$, $j = 0, 1$, и $\Phi_2(M)$ – непрерывные гармонические функции, удовлетворяющие уравнению $(1.3')$ в областях D_2 и D_1 соответственно, так как они определяются сходящимися в этих областях интегралами. Действительно, полагая в указанных интегралах $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ и учитывая условия (2.10), согласно обобщённой теореме о среднем значении [9, с. 114], находим

$$\Phi_j(M) = \int\limits_0^1 \tau^{\alpha_1 - 1} f_j(M\tau)\,d\tau = \lim_{\tau_0 \to 0}\int\limits_{\tau_0}^1 \tau^{\alpha_1 - 1} f_j(M\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1}\lim_{\tau_0 \to 0}[f_j(M) - f_j(M\tau_0)\tau_0^{\alpha_1}] = \frac{f_j(M)}{\alpha_1}, \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2,$$

$$\Phi_2(M) = \int\limits_\infty^1 \tau^{\alpha_2 - 1} f_2(M\tau)\,d\tau = \lim_{\tau_0 \to \infty}\int\limits_{\tau_0}^1 \tau^{\alpha_2 - 1} f_2(M\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\alpha_2}\lim_{\tau_0 \to \infty}[f_2(M) - f_2(M\tau_0)\tau_0^{\alpha_2}] = \frac{f_2(M)}{\alpha_2}, \quad M \in D_1.$$

Функции $f_j(M)$, $j = 0, 1$, $M \in D_2$, и $f_2(M)$, $M \in D_1$, – непрерывные гармонические функции, а поэтому такими же являются и функции $\Phi_j(M)$, $j = 0, 1$, $M \in D_2$, и $\Phi_2(M)$, $M \in D_1$, и, кроме того, они будут удовлетворять тем же условиям (2.10).

Точки M и M_* – инверсные относительно сферы радиуса a, их радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}_*$ связаны преобразованием $\vec{r}_* = a^2\vec{r}/r^2$. Поэтому, согласно теореме Кельвина [10, с. 282], функции $af_j(M_*)/r$, $a\Phi_j(M_*)/r$, $j = 0, 1,$ – гармонические в области D_1, а функции $af_2(M_*)/r$, $a\Phi_2(M_*)/r$ – гармонические в области D_2. Следовательно, потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ – гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению $(1.3')$ в области $D = D_1 \bigcup D_2$.

Найдём теперь константы A_k, α_k, $k = 1, 2,$ используя условия (1.13) на сфере $\Gamma = \{r = a\}$. Заменяя переменные $M\tau$ на $r\tau$ $(r\tau = R)$, имеем

$$\Phi_j(M) = \frac{1}{r^{\alpha_1}} \int\limits_0^r R^{\alpha_1 - 1} f_j(R)\, dR, \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2,$$

$$\Phi_2(M) = \frac{1}{r^{\alpha_2}} \int\limits_\infty^r R^{\alpha_2 - 1} f_2(R)\, dR, \quad M \in D_1.$$

Находим

$$\frac{\partial \Phi_j(M)}{\partial r} = \frac{f_j(M)}{r} - \frac{\alpha_1}{r^{\alpha_1 - 1}} \int\limits_0^r R^{\alpha_1 - 1} f_j(R)\, dR = \frac{1}{r}[f_j(M) - \alpha_1 \Phi_j(M)], \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2,$$

$$\frac{\partial \Phi_2(M)}{\partial r} = \frac{f_2(M)}{r} - \frac{\alpha_2}{r^{\alpha_2 - 1}} \int\limits_\infty^r R^{\alpha_2 - 1} f_2(R)\, dR = \frac{1}{r}[f_2(M) - \alpha_2 \Phi_2(M)], \quad M \in D_1,$$

или

$$r\frac{\partial \Phi_j(M)}{\partial r} + \alpha_1 \Phi_j(M) = f_j(M), \quad j = 0, 1, \quad M \in D_2,$$
$$r\frac{\partial \Phi_2(M)}{\partial r} + \alpha_2 \Phi_2(M) = f_2(M), \quad M \in D_1. \tag{2.12}$$

Непрерывно продолжая эти равенства на границу $\Gamma = \{r = a\}$, получаем, что они будут справедливы для функций $f_1(M)$ и $f_2(M)$ всюду на границе, а для функции $f_0(M)$ – во всех точках границы за исключением особых точек этой функции.

Так как $r_* = a^2/r$, то $\partial/\partial r = -(a^2/r^2)\partial/\partial r_*$. Поэтому на границе Γ справедливы равенства

$$\frac{\partial f_j(M)}{\partial r} = -\frac{\partial f_j(M_*)}{\partial r_*}, \quad \frac{\partial \Phi_j(M)}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi_j(M_*)}{\partial r_*}, \quad j = 0, 1, 2, \quad M = M_* \quad (r = r_* = a). \tag{2.13}$$

Подставим потенциал $\varphi_*(M)$ в условия (1.13) на границе $\Gamma = \{r = a\}$ и учтём представление (2.9) и равенства (2.12) и (2.13) на границе. Тогда на границе, т.е. при $M = M_*$ $(r = r_* = a)$, имеем равенства

$$((1-\lambda)A_1 - (1+\lambda)A_2 - 2\lambda)\varphi_0(M) + ((1-\lambda)\alpha_1 A_1 + (1+\lambda)\alpha_2 A_2)\left(\Phi_2(M) - \sum_{j=0}^{1} \Phi_j(M)\right) = 0,$$

$$((\alpha_1 - 1)A_1 - \alpha_2 A_2)\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{j=0}^{1} f_j(M) + \Phi_j(M) - f_2(M)\right) +$$
$$+ (\alpha_1 A_1 + (1-\alpha_2)A_2)\frac{\partial}{\partial r}\left(f_2(M) + \Phi_2(M) - \sum_{j=0}^{1} f_j(M)\right) = 0.$$

Они тождественно удовлетворяются всюду на границе Γ, за исключением особых точек функции $f_0(M)$, если константы A_k, α_k, $k=1,2$, удовлетворяют системе равенств

$$(1-\lambda)A_1-(1+\lambda)A_2-2\lambda=0,\quad (1-\lambda)\alpha_1A_1+(1+\lambda)A_2=0,$$

$$(1-\alpha_1)A_1+\alpha_2A_2=0,\quad \alpha_1A_1+(1-\alpha_2)A_2=0.$$

Отсюда находим $A_1=\lambda$, $A_2=-\lambda$, $\alpha_1=(1+\lambda)/2$, $\alpha_2=(1-\lambda)/2$, причём $\alpha_1+\alpha_2=1$, и поскольку $\lambda\in(-1,1)$, то $\alpha_1\in(0,1)$, $\alpha_2\in(1,0)$.

Тогда потенциал $\varphi_*(M)$ принимает следующий вид:

$$\varphi_*(M)=\begin{cases}\lambda\Big\{\dfrac{a}{r}\displaystyle\sum_{j=0}^{1}\Big(f_j(M_*)-\frac{1+\lambda}{2}\Phi_j(M_*)\Big)+f_2(M)+\frac{1+\lambda}{2}\Phi_2(M)\Big\}, & M\in D_1,\\ -\lambda\Big\{\displaystyle\sum_{j=0}^{1}\Big(f_j(M)+\frac{1-\lambda}{2}\Phi_j(M)\Big)+\frac{a}{r}\Big(f_2(M_*)-\frac{1-\lambda}{2}\Phi_2(M)\Big)\Big\}, & M\in D_2,\end{cases}$$

где

$$\Phi_j(M)=\int\limits_0^1\tau^{-(1-\lambda)/2}f_j(M\tau)\,d\tau,\quad \Phi_2(M)=\int\limits_\infty^1\tau^{-(1+\lambda)/2}f_2(M\tau)\,d\tau.$$

Потенциал $\varphi_*(M)$, $M\in D_1$, удовлетворяет в бесконечности условию (1.14), поскольку заданные функции $f_j(M)$ и, следовательно, $\Phi_j(M)$, $j=0,1,2$, удовлетворяют условиям (2.10). Подставляя функцию $\varphi_*(M)$ в представление (1.9), получаем искомые потенциалы (2.11). Теорема доказана.

Запишем потенциалы (2.11) для частных случаев расположения источников течения. Если на границе Γ нет источников $(f_0(M)=0)$, то имеем [8, с. 378]

$$k_1\varphi_1(M)=f_1(M)+\frac{\lambda a}{r}\Big(f_1(M_*)-\frac{1+\lambda}{2}\Phi_1(M_*)\Big)+(1+\lambda)(f_2(M)+\lambda\Phi_2(M)),\quad M\in D_1,$$

$$k_2\varphi_2(M)=(1-\lambda)\Big(f_1(M)-\frac{\lambda}{2}\Phi_1(M)\Big)+f_2(M)-\frac{\lambda a}{r}\Big(f_2(M_*)-\frac{1-\lambda}{2}\Phi_2(M_*)\Big),\quad M\in D_2.\quad (2.14)$$

Сюда включены случаи, когда источники располагаются только в области $D_1(r>a)$ при $f_2(M)=0$ или только в области $D_2(r<a)$ при $f_1(M)=0$. Если источники лежат только на границе, а вне её источников нет $(f_1(M)=0$ и $f_2(M)=0)$, то находим, что

$$k_1\varphi_1(M)=f_0(M)+\frac{\lambda a}{r}\Big(f_0(M_*)-\frac{1+\lambda}{2}\Phi_0(M_*)\Big),\quad M\in D_1,$$

$$k_2\varphi_2(M)=(1-\lambda)\Big(f_0(M)-\frac{\lambda}{2}\Phi_0(M)\Big),\quad M\in D_2.\quad (2.15)$$

В потенциалах (2.14) и (2.15) функции $\Phi_j(M)$, $j=0,1,2$, такие же, как и в формулах (2.11).

Пусть теперь сфера радиуса a с центром в начале координат моделирует границу σ_1 или границу σ_2.

Теорема 4. *Пусть течение в безграничной среде проницаемости $K=1$ описывает потенциал*

$$\varphi_0(M)=f_0(M)+f(M),\quad (2.16)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(M)$ располагаются на расстоянии $r=a$ от начала координат, а функции $f(M)$ – только на расстоянии либо $r>a$, либо $r<a$. Причём имеют место соотношения

$$f_0(M)=O(1)\quad и\quad f(M)=O(1)\quad при\quad r\to 0,\quad (2.17)$$

если сингулярности функции $f(M)$ *лежат в области* $r > a$, *и*

$$f(M) = O(1/r) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{2.18}$$

если сингулярности функции $f(M)$ *лежат в области* $r < a$. *Тогда течение в области* D *с границей* σ_1 *характеризует потенциал*

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) - \frac{a}{r}\varphi_0(M_*), \quad M \in D, \tag{2.19}$$

а с границей σ_2 – *потенциал*

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \frac{a}{r}(\varphi_0(M_*) - \Phi_p(M_*)), \quad M \in D. \tag{2.20}$$

Здесь

$$\Phi_p(M_*) = \int\limits_p^1 \varphi_0(M_*\tau)\, d\tau, \quad p = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; M \in D(r > a), \\ \infty, & \text{если} \;\; M \in D(r < a), \end{cases}$$

$\varphi_0(M_*) = f_0(M_*) + f(M_*)$. *Точки* M *и* M_* – *сопряжённые относительно сферы радиуса* a, *их радиус-векторы* $\vec{r}$ *и* $\vec{r}_*$ *связаны преобразованием* $\vec{r}_* = a^2\vec{r}/r^2$.

Доказательство. Согласно представлениям (1.8), (2.17), (2.19) и (2.20) потенциалы возмущений имеют вид

$$\varphi_*(M) = -\frac{a}{r}\varphi_0(M_*) = -\frac{a}{r}(f_0(M_*) + f(M_*)), \quad M \in D, \tag{2.21}$$

$$\varphi_*(M) = \frac{a}{r}(\varphi_0(M_*) - \Phi_p(M_*)) = \frac{a}{r}(f_0(M_*) + f(M_*) - \Phi_p(M_*)), \quad M \in D, \tag{2.22}$$

где

$$\Phi_p(M_*) = \int\limits_p^1 (f_0(M_*\tau) + f(M_*\tau))\, d\tau.$$

Определяющий функцию $\Phi_p(M_*)$ интеграл существует (сходится) при $p = 0$ и $p = \infty$ в силу условий (2.17) и (2.18).

Функция $f_0(M_*)$ имеет заданные сингулярности только на сфере (при $r = a$) и, следовательно, является гармонической всюду в области D – вне и внутри сферы. Функция $f(M)$ имеет заданные сингулярности только либо вне (при $r > a$), либо внутри (при $r < a$) сферы. Поэтому, согласно представлению (2.16), функции $\varphi_0(M)$ и $\Phi_0(M)$ ($\varphi_0(M)$ и $\Phi_\infty(M)$) – гармонические в области $D(r > a)$ (в области $D(r < a)$). Тогда на основании теоремы Кельвина функции $a\varphi_0(M_*)/r$ и $a\Phi_0(M_*)/r$ (функции $a\varphi_0(M_*)/r$ и $a\Phi_\infty(M_*)/r$) будут гармоническими в области $D(r > a)$ (в области $D(r < a)$). Следовательно, будут гармоническими, т.е. будут удовлетворять в области D уравнению $(1.3')$, и потенциалы возмущений (2.21) и (2.22).

Подставляя потенциал (2.21) в условие $(1.10')$, убеждаемся, что на границе σ_1, т.е. при $M = M_*$ $(r = a)$, оно удовлетворяется тождественно.

Покажем, что потенциал (2.22) удовлетворяет условию (1.11) на границе σ_2, т.е. при $M = M_*$ $(r = a)$. Аналогично доказанным представлениям (2.12) имеем

$$r\frac{\partial \Phi_p(M)}{\partial r} + \Phi_p(M) = \varphi_0(M), \quad M \in D. \tag{2.23}$$

На сфере справедливы аналогичные (2.13) равенства

$$\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi_0(M_*)}{\partial r_*}, \quad \frac{\partial \Phi_p(M)}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi_p(M_*)}{\partial r_*}, \quad M = M_* \quad (r = a). \tag{2.24}$$

Непрерывно продолжим равенство (2.23) из области D на сферу $(r = a)$. Учитывая представления (2.16) и (2.24), находим для потенциала (2.22) на границе σ_2, т.е. при $M = M_*$ $(r = a)$, предельное значение

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial r}\right)^+ = \frac{1}{a}\left(a\frac{\partial\Phi_p(M)}{\partial r} + \Phi_p(M)\right) - \frac{\varphi_0(M)}{a} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = -\frac{\partial f_0(M)}{\partial r} - \frac{\partial f(M)}{\partial r}, \quad M \in \sigma_2.$$

Подставим его в граничное условие (1.11) и убедимся, что это условие тождественно удовлетворяется. Итак, потенциалы (2.21) и (2.22) удовлетворяют граничным условиям, причём всюду на границах σ_1 и σ_2 за исключением изолированных особых точек функции $f_0(M)$.

Видим, что потенциалы (2.21) и (2.22) возмущений $\varphi_*(M)$ удовлетворяют в бесконечности условиям (1.14) при $K = 1$. Подставляя эти потенциалы в представление (1.8), получаем искомые потенциалы (2.19) и (2.20) течений. Теорема доказана.

Из общих представлений (2.19) и (2.20) вытекают представления для потенциалов в частных случаях расположения источников течения: когда источники имеются либо только вне границ σ_1 и σ_2 $(f_0(M) = 0,\ \varphi_0(M) = f(M))$, либо только на границах $(f(M) = 0,\ \varphi_0(M) = f_0(M))$.

Применим теоремы 1–4 для исследования конкретных трёхмерных течений в среде с границами Γ, σ_1 и σ_2, моделируемых плоскостью и сферой. Ряд течений с источниками вне границ изучен в работе [8, с. 375]. Исследуем некоторые течения с источниками, заданными на границах.

Течение к точечному стоку мощности Q в безграничной среде проницаемости $K = 1$ характеризует потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) = \frac{Q}{4\pi r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

В случае задачи сопряжения на плоскости $x = 0$ $(y, z \in (-\infty, \infty))$ потенциалы течения в областях $D_1(x > 0)$ и $D_2(x < 0)$ среды с проницаемостями k_1 и k_2 соответственно в силу представления (2.5), вытекающего из теоремы 1, принимают вид

$$\varphi_\nu(M) = \frac{Q}{2\pi(k_1 + k_2)r}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2.$$

Поле скоростей течения, согласно закону (1.1), имеет только радиальную составляющую

$$v_{\nu r}(M) = k_\nu \frac{d\varphi_\nu(M)}{dr} = -\frac{Qk_\nu}{2\pi(k_1 + k_2)r^2}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

а поток жидкости через поверхность σ сферы радиуса r равен (как и должно быть) мощности стока Q:

$$\int\limits_{\sigma/2} \vec{v}_1 \cdot d\vec{\sigma} + \int\limits_{\sigma/2} \vec{v}_2 \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q}{2\pi}\int\limits_{\sigma/2} \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{Q}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\Omega = Q.$$

На основании представлений (2.7) и (2.8) теоремы 2 в области $D(x > 0)$ потенциал $\varphi(M)$ равен нулю (течение не существует), если плоскость $x = 0$ – эквипотенциальная граница σ_1, и потенциал $\varphi(M)$ течения к стоку мощности $2Q$, когда плоскость $x = 0$ – непроницаемая граница σ_2, равен $Q/(2\pi r)$.

Течение в безграничной среде проницаемости $K = 1$ от диполя, момент которого m ориентирован вдоль оси Ox, характеризует потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) = -\frac{mx}{4\pi r^3} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Используя представление (2.5), находим потенциалы течения в областях $D_1(x>0)$ и $D_2(x<0)$ среды с проницаемостями k_1 и k_2 соответственно:

$$\varphi_1(M) = -\frac{2mk_2x}{k_1(k_1+k_2)r^3}, \quad M \in D_1, \quad \varphi_2(M) = -\frac{2mx}{(k_1+k_2)r^3}, \quad M \in D_2.$$

Согласно теореме 2 в области $D(x>0)$ потенциал течения $\varphi(M)$ от диполя с моментом $2m$ равен $-mx/(2\pi r^3)$, если плоскость $x=0$ – эквипотенциальная граница σ_2, и равен нулю (такого течения нет), когда плоскость $x=0$ – непроницаемая граница σ_2. В случае границы $\sigma_2(x=0)$ существует течение от диполя, момент которого $2m$ ортогонален оси Ox (направлен, например, вдоль оси Oy), которое характеризует потенциал $\varphi(M) = -my/(2\pi r^3)$, $M \in D(x>0)$.

Исследуем теперь течение от стока мощности Q, расположенного на сфере радиуса a с центром в начале координат. Течение в безграничной среде проницаемости $K=1$ описывает потенциал

$$\varphi_0(M) = f_0(M) = \frac{Q}{4\pi R} \quad (R = \sqrt{r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2}),$$

где γ – угол между радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ произвольной точки M пространства и точки M_0 расположения стока, отстоящей на расстоянии a от начала координат. Согласно представлению (2.15), вытекающему из теоремы 3, находим потенциалы течения в областях $D_1(r>a)$ и $D_2(r<a)$ среды с проницаемостями k_1 и k_2 соответственно:

$$\varphi_1(M) = \frac{Q}{4\pi(k_1+k_2)}\left(\frac{2}{R} - \lambda\int\limits_0^1 \frac{\tau^{(\lambda-1)/2}\,d\tau}{|\vec{r}-\tau\vec{r}_0|}\right), \quad M \in D_1,$$

$$\varphi_2(M) = \frac{Q}{4\pi(k_1+k_2)}\left(\frac{2}{R} - \lambda\int\limits_0^1 \frac{\tau^{(\lambda-1)/2}\,d\tau}{|\tau\vec{r}-\vec{r}_0|}\right), \quad M \in D_2,$$

где $|\vec{r}-\tau\vec{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2\tau ra\cos\gamma + (\tau a)^2}$, $|\tau\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(\tau r)^2 - 2\tau ra\cos\gamma + a^2}$.

На основании представлений (2.19) и (2.20) теоремы 4 находим, что потенциал $\varphi(M)$ равен нулю (течения нет), когда сфера – эквипотенциальная граница σ_1, и что для потенциала течения в области $D(r>a)$ справедливо равенство

$$\varphi(M) = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{2}{R} - \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{|\vec{r}-\tau\vec{r}_0|}\right) = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{r^2-2ar\cos\gamma+a^2}+a-r\cos\gamma}{r(1-\cos\gamma)}\right),$$

когда сфера – непроницаемая граница σ_2. Течение в области $D(r<a)$ с границей σ_2 невозможно в силу уравнения неразрывности (1.2): условие (1.15) при $f(M)=0$ не выполняется.

3. Задачи с произвольными замкнутыми гладкими границами. Рассмотрим общий случай, когда границы моделируются произвольными замкнутыми гладкими поверхностями и течение происходит в неоднородной среде. Пусть течение в безграничной среде проницаемости $K(M)$ вызвано стоком мощности Q, расположенным в точке M_0, и характеризуется обобщённым потенциалом

$$f_0(M) = Q\Phi(M, M_0).$$

Здесь $\Phi(M,M_0)$ – фундаментальное решение уравнения (1.3), являющееся функцией координат точки M $(M \neq M_0)$, его можно представить в следующем виде [8, с. 361]:

$$\Phi(M,M_0) = \frac{H_1(M,M_0)}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}R_{MM_0}} + H_2(M,M_0), \tag{3.1}$$

где $R_{MM_0} = |\vec{r}_M - \vec{r}_{M_0}|$ – расстояние между точками M и M_0, радиус-векторы которых $\vec{r}_M$ и $\vec{r}_{M_0}$, а $H_1(M, M_0)$ и $H_2(M, M_0)$ – непрерывно дифференцируемые функции по координатам точек M и M_0, причём $H_1(M_0, M_0) = 1$.

Если область D ограничена сингулярной поверхностью $\sigma_0 = \sigma_{01} \bigcup \sigma_{02}$, то согласно формулам (1.12) функция $\Phi(M, M_0)$ удовлетворяет условиям

$$\Phi^+(M, M_0) = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left(K(M)\frac{\partial\Phi(M, M_0)}{\partial n_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \tag{3.2}$$

в которых $M_0 \notin \sigma_0$. В бесконечности для функции $\Phi(M, M_0)$ выполняются соотношения

$$\Phi(M, M_0) = O(1/R_{MM_0}), \quad K(M)|\nabla\Phi(M, M_0)| = O(1/R^2_{MM_0}) \quad \text{при} \quad R_{MM_0} \to \infty. \tag{3.3}$$

Фундаментальные решения $\Phi(M, M_0)$, удовлетворяющие представлениям (3.1)–(3.3), известны для сред, проницаемости $K(M)$ которых принадлежат достаточно широкому классу функций [8, с. 354].

Пусть течение вызвано стоком мощности Q, расположенным в точке M_0 заданной гладкой поверхности, а также другими источниками вне поверхности. Течение в среде проницаемости $K(M)$ характеризует обобщённый потенциал

$$\varphi_0(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M), \tag{3.4}$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f(M)$ лежат вне поверхности. Рассмотрим случаи, когда заданная поверхность моделирует границу Γ раздела сред разных проницаемостей или непроницаемую границу σ_2.

Теорема 5 (сопряжения на произвольной гладкой замкнутой поверхности). *Пусть течение в среде проницаемости $K(M)$ характеризует обобщённый потенциал (3.4). Тогда течение в областях D_1 и D_2 среды с проницаемостями K_1 и K_2 соответственно ($K_\nu = k_\nu K(M)$, $k_\nu = \mathrm{const}$, $\nu = 1, 2$) характеризуют обобщённые потенциалы $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$:*

$$k_\nu\varphi_\nu(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M) + \\ + \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M, N)(g(N) + \lambda Q\Phi(N, M_0))\, d\sigma_N, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \tag{3.5}$$

где функция $g(M)$ – решение интегрального уравнения

$$g(M) - 2\lambda \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M, N)g(N)\, d\sigma_N - \\ - 2\lambda^2 Q \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M, N)\Phi(N, M_0)\, d\sigma_N = 2\lambda f(M), \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0, \tag{3.6}$$

в котором $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$, функции $f(M)$ и $K(M)$, $M \in \Gamma$, являются гладкими, а ядро задаётся равенством $\mathcal{K}(M, N) = K(N)\partial\Phi(M, N)/\partial n_N$.

Доказательство. Согласно представлениям (1.9), (3.4) и (3.5) обобщённые потенциалы течения принимают вид

$$k_\nu\varphi_\nu(M) = Q\Phi(M, M_0) + f(M) + \varphi_0(M), \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

где $\varphi_*(M)$ – обобщённый потенциал возмущений, обусловленных различием проницаемостей $K_1(M)$ и $K_2(M)$ среды в областях D_1 и D_2 соответственно ($D = D_1 \bigcup D_2$).

Будем искать функцию $\varphi_*(M)$ в виде обобщённого потенциала двойного слоя [8, с. 366]

$$\varphi_*(M) = \int\limits_\Gamma K(N)\frac{\partial\Phi(M, N)}{\partial n_N}(g(N) + C\Phi(N, M_0))\, d\sigma_N, \quad M \in D. \tag{3.7}$$

Здесь $g(N)$ – непрерывная на поверхности Γ функция, а $\Phi(M,N)$ и $\Phi(N,M_0)$ – фундаментальные решения уравнения (1.3) по переменным $M\in D$ и $N\in\Gamma$ $(N\neq M_0)$ соответственно, орт нормали $\vec{n}_N\in\Gamma$ направлен внутрь области D_1, C – константа.

Найдём константу C и уравнение для функции $g(M)$, используя условия (1.13). Для этого непрерывно продолжим обобщённый потенциал (3.7) на поверхность Γ, предполагая, что она принадлежит классу Ляпунова. Получим предельные значения

$$\varphi_*^{\pm}(M)=\int\limits_{\Gamma}K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}(g(N)+C\Phi(N,M_0))\,d\sigma_N\pm$$

$$\pm\frac{g(M)+C\Phi(M,M_0)}{2},\quad M\in\Gamma,\quad M\neq M_0, \tag{3.8}$$

где функция $\Phi(M,M_0)$ имеет при $M=M_0\in\Gamma$ особенность (3.1), а интеграл существует при $M\neq M_0$ в смысле главного значения.

Учитывая представления (3.4), (3.8) и непрерывность производной двойного слоя по орту нормали $\vec{n}_M\in\Gamma$, получаем равенство

$$g(M)-2\lambda\int\limits_{\Gamma}K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}(g(N)+C\Phi(N,M_0))\,d\sigma_N+$$

$$+(C-\lambda Q)\Phi(M,M_0)=2\lambda f(M),\quad M\in\Gamma,\quad M\neq M_0.$$

Это равенство будет тождественно удовлетворяться на всей поверхности Γ, исключая точку M_0 расположения стока, если $C=\lambda Q$, а функция $g(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.6).

Так как $C=\lambda Q$, то обобщённый потенциал (3.7) принимает вид

$$\varphi_*(M)=\int\limits_{\Gamma}\mathcal{K}(M,N)(g(N)+\lambda Q\Phi(N,M_0))\,d\sigma_N,\quad M\in D, \tag{3.9}$$

где $\mathcal{K}(M,N)=K(N)\partial\Phi(M,N)/\partial n_N$.

Слагаемое $\lambda Q\Phi(N,M_0)\mathcal{K}(M,N)$ подынтегрального выражения в (3.9) при $N\to M_0$ имеет интегрируемую особенность в силу представления (3.1) для $\Phi(N,M_0)$, и поэтому интеграл сходится (существует). Следовательно, обобщённый потенциал (3.9) существует. Он удовлетворяет уравнению (1.3), а также условиям (1.12), поскольку $\Phi(M,N)$ – фундаментальное решение этого уравнения, отвечающее условиям (3.2). Так как $\mathcal{K}(M,N)=O(R_{MN}^{-2})$ при $R_{MN}\to\infty$ согласно условию (3.3), то $\varphi_*(M)$ удовлетворяет в бесконечности условию (1.14).

Подставляя обобщённый потенциал (3.9) в представление (1.9), получаем искомые обобщённые потенциалы (3.5) течения, если функция $g(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.6). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (3.6). Так как поверхность Γ принадлежит классу Ляпунова, то для ядра $\mathcal{K}(M,N)$ в силу представления (3.1) имеем оценку $|\mathcal{K}(M,N)|\leqslant O(R_{MN}^{2-\mu})$ при $R_{MN}\to 0$, где $\mu=(0,1]$. Поэтому первый интеграл в уравнении (3.6) имеет слабую сингулярность (типа Фредгольма). На основании представления (3.1) оценим во втором интеграле в (3.6) подынтегральное выражение

$$\mathcal{K}(M,N)\Phi(N,M_0)=K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}\Phi(N,M_0).$$

При $N\to M=M_0\in\Gamma$ имеем оценку $|\mathcal{K}(M,N)\Phi(N,M_0)|\leqslant A/R_{MM_0}^{3-\mu}$, $\mu=(0,1]$, $A=\mathrm{const}>$ >0. Следовательно, второй интеграл в уравнении (3.6) имеет при $M=M_0$ неинтегрируемую особенность, он определён при $M\neq M_0$.

Таким образом, исследование задачи сопряжения редуцируется к неоднородному сингулярному интегральному уравнению второго рода, содержащему в качестве слагаемого интеграл с заданным подынтегральным выражением, который определён при $M \neq M_0$.

Представление (3.5) задачи сопряжения получено для произвольно заданных источников течения. В частности, если сток на границе Γ отсутствует $(Q = 0)$, то имеем потенциалы [8, с. 395]

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu}\biggl(f(M) + \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N)g(N)\,d\sigma_N\biggr), \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1,2,$$

где функция $g(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(M) - 2\lambda\int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N)g(N)\,d\sigma_N = 2\lambda f(M), \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0.$$

Если на границе Γ имеется только сток мощности Q, а источников вне границы нет $(f(M) = 0)$, то

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu}\biggl\{Q\Phi(M,M_0) + \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N)[g(N) + \lambda Q\Phi(N,M_0)]\,d\sigma_N\biggr\}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1,2,$$

где функция $g(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(M) - 2\lambda\int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N)g(N)\,d\sigma_N - 2\lambda^2 Q\int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N)\Phi(N,M_0)\,d\sigma_N = 0, \quad M \in \Gamma, \quad M \neq M_0.$$

Это уравнение неоднородное, поскольку последнее слагаемое в нём – заданная функция точки M, определённая при $M \neq M_0$.

Пусть произвольная гладкая поверхность σ_2 моделирует непроницаемую границу области D течения. В этом случае имеют место вторая внешняя и внутренняя краевые задачи для обобщённого потенциала возмущений $\varphi_*(M)$. Для разрешимости внутренней задачи обобщённый потенциал (3.4) должен удовлетворять условию (1.15), которое принимает вид

$$\int\limits_{\sigma_2} K(M)\biggl(Q\frac{\partial\Phi(M,M_0)}{\partial n_M} + \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}\biggr)\,d\sigma_M = 0. \tag{3.10}$$

Условие (3.10) означает, что должна быть равна нулю алгебраическая сумма мощностей стока Q, расположенного на поверхности σ_2, и источников, заключённых внутри поверхности, которые моделируются сингулярностями функции $f(M)$.

Теорема 6. *Пусть течение в безграничной среде проницаемости $K(M)$ описывает обобщённый потенциал (3.4), удовлетворяющий условию (3.10) в случае внутренней краевой задачи. Тогда течение в области D с непроницаемой границей σ_2 характеризует обобщённый потенциал*

$$\varphi(M) = Q\Phi(M,M_0) + f(M) + \int\limits_{\sigma_2} K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}h(N)\,d\sigma_N, \tag{3.11}$$

где функция $h(M)$ – решение интегрального уравнения

$$\int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}(M,N)h(N)\,d\sigma_N = -Q\frac{\partial\Phi(M,M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0, \tag{3.12}$$

в котором ядро задаётся равенством $\mathcal{K}(M,N) = K(N)\partial^2\Phi(M,N)/\partial n_M\partial n_N$, а орт нормали $\vec{n}$ к поверхности σ_2 направлен внутрь области D.

Доказательство. Согласно представлениям (1.8) и (3.11) обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ ищем в виде обобщённого потенциала двойного слоя

$$\varphi_*(M) = \int\limits_{\sigma_2} K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}h(N)\,d\sigma_N, \quad M \in D, \tag{3.13}$$

где $h(M)$ и $K(M)$ – непрерывные на поверхности σ_2 функции, $\Phi(M,N)$, $M \neq N$, – фундаментальное решение уравнения (1.3). Подставим это представление для $\varphi_*(M)$ в условие (1.11) и учтём заданный обобщённый потенциал (3.4). Учитывая, согласно монографии [11, с. 126, 139], непрерывность производной двойного слоя по орту нормали $\vec{n}_M$, $M \in \sigma_2$, получаем для функции $h(M)$ интегральное уравнение

$$\int\limits_{\sigma_2} K(N)\frac{\partial^2\Phi(M,N)}{\partial n_N \partial n_M}h(N)\,d\sigma_N = -Q\frac{\partial\Phi(M,M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0,$$

которое совпадает с уравнением (3.12).

Обобщённый потенциал (3.13) удовлетворяет уравнению (1.3) и условиям (1.12) и (1.14), так как $\Phi(M,N)$ – фундаментальное решение уравнения (1.3), отвечающее условиям (3.2) и (3.3). Подставляя обобщённый потенциал (3.13) в представление (1.8), получаем искомый обобщённый потенциал (3.11). Теорема доказана.

Ядро $\mathcal{K}(M,N)$ интегрального уравнения (3.12) имеет согласно представлению (3.1) сильную сингулярность: $\mathcal{K}(M,N) = O(R_{MN}^{-3})$ при $R_{MN} \to 0$. Поэтому интеграл в уравнении понимается в смысле конечной части по Адамару [12, с. 143]. Правая часть уравнения содержит непрерывную функцию $\partial f(M)/\partial n_M$ и слагаемое $Q\,\partial\Phi(M,M_0)/\partial n_M = O(R_{MM_0}^{-2})$ при $R_{MM_0} \to 0$, имеющее особенность при $M = M_0$.

Таким образом, исследование второй краевой задачи редуцируется к неоднородному гиперсингулярному интегральному уравнению первого рода с сингулярностью в правой части.

Рассмотрим частные случаи расположения заданных источников течения и запишем его обобщённые потенциалы (3.11). Если на границе σ_2 нет стока $(Q = 0)$, то

$$\varphi(M) = f(M) + \int\limits_{\sigma_2} K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}h(N)\,d\sigma_N, \quad M \in D,$$

где функция $h(N)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}(M,N)h(N)\,d\sigma_N = -\frac{\partial f(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0.$$

Если на границе σ_2 имеется только сток мощности Q, а источников вне границы σ_2 нет $(f(M) = 0)$, то имеем обобщённый потенциал течения в случае внешней задачи

$$\varphi(M) = Q\Phi(M,M_0) + \int\limits_{\sigma_2} K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}h(N)\,d\sigma_N, \quad M \in D,$$

где функция $h(N)$ – решение интегрального уравнения

$$\int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}(M,N)h(N)\,d\sigma_N = -Q\frac{\partial\Phi(M,M_0)}{\partial n_N}, \quad M \in \sigma_2, \quad M \neq M_0.$$

Внутренняя краевая задача не имеет решения, так как для неё не выполняется условие (3.10) при $f(M) = 0$.

Решение первой краевой задачи имеет место только в случае, когда на произвольной гладкой поверхности σ_1 отсутствует сток $(Q = 0)$, оно получено в монографии [8, с. 396].

Заключение. Подводя итоги, отметим, что решения основных задач фильтрации (первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения) представлены в конечном виде для случая канонических границ (плоскость и сфера) в однородной среде, а в общем случае произвольных замкнутых гладких границ в неоднородной среде вторая краевая задача и задача сопряжения редуцированы к гиперсингулярному и сингулярному интегральным уравнениям на границах. Эти уравнения могут быть решены численным методом дискретных особенностей [1, с. 433].

Представленные теоремами 1–6 исследования – математические модели фильтрационных процессов в граничных задачах, возникающих на практике, например, при добыче воды (нефти) из природных пластов грунта. Они могут также представлять интерес при изучении процессов иной физической природы (теплопроводность, электропроводность, электро- и магнитостатика), которые характеризуются законами, математически аналогичными законам (1.1) и (1.2).

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Сетухе за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. *Dimitroglo M.G., Setukha A.V., Lifanov I.K.* On numerical modelling of a three-dimensional flow past a wing with external flow suction and on the effect of flow suction on trailing vortices // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2004. V. 19. № 2. P. 109–129.
3. *Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 9. С. 1227–1241.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.
5. *Пивень В.Ф., Костин О.В.* Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. Вып. 8. Орёл, 2009. С. 92–98.
6. *Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.* Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на окружности // Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. Вып. 8. Орёл, 2009. С. 46–51.
7. *Пивень В.Ф.* Задачи о плоскопараллельных фильтрационных течениях с источниками на границах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1214–1225.
8. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл, 2006.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 1970.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
11. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., 2001.
12. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.
После доработки 12.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.