ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1255–1272

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

О СВОЙСТВАХ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

© 2021 г. Н. А. Раутиан

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с ядрами интегральных операторов, представимыми интегралами Стилтьеса от экспоненты. Применяется подход, основывающийся на изучении однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Приводится метод сведе́ния исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Доказывается существование сжимающей C_0-полугруппы. В качестве следствия для полученной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве и начальной задачи для исходного абстрактного интегро-дифференциального уравнения установлена их корректная разрешимость и указана связь между решениями этих задач.

DOI: 10.31857/S0374064121090119

Введение. В работе проводится исследование абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанное уравнение является операторной моделью линейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, возникающего в теории вязкоупругости:

$$u_{tt}(x,t) = \rho^{-1}(\mu\Delta u(x,t) + 3^{-1}(\mu+\lambda)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,u(x,t))) -$$
$$- \int_0^t K_1(t-\tau)\rho^{-1}\mu(\Delta u(x,\tau) + 3^{-1}\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,u(x,\tau)))\,d\tau -$$
$$- \int_0^t K_2(t-\tau)(3\rho)^{-1}\lambda\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,u(x,\tau))\,d\tau + f(x,t),$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $t>0$, $u=\vec{u}(x,t)\in\mathbb{R}^3$ – вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей, $\rho>0$ – постоянная плотность, λ, μ – положительные параметры (коэффициенты Ламе), Δ – оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3 (см. [1–3]). Будем предполагать, что на границе $\partial\Omega$ области Ω выполнено нулевое условие Дирихле: $u|_{\partial\Omega}=0$. Функции $K_1(t)$ и $K_2(t)$ ядер интегральных операторов – положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды. Предполагается, что функции $K_i(t)$, $i=1,2$, представимы интегралами Стилтьеса от экспоненты (см. равенство (3)).

В настоящее время имеется обширная литература, посвящённая исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1–19] и библиографию в них).

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [12–16], в которых проведён спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Подход к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, основывающийся на применении теории полугрупп, развивался в работах [9, 15, 17–19].

1. Определения. Обозначения. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ $(\kappa_0 = \text{const} > 0)$, оператор, действующий в пространстве H и имеющий ограниченный обратный. Пусть B – самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в пространстве H, с областью определения $D(B)$ такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий при некотором $\kappa > 0$ неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$ для любого $x \in \operatorname{Dom}(A)$, I – тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int\limits_0^t K_1(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_0^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

Предположим, что функция $K_i(t)$, $i = 1, 2$, имеет следующее представление:

$$K_i(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $d\mu_i$ $(i = 1, 2)$ – положительная мера, порождаемая неубывающей непрерывной справа на $\mathbb{R}_+$ функцией μ_i. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Введём обозначение

$$M_i(t) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau)}{\tau}, \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B. \tag{6}$$

Из самосопряжённости положительного оператора A и неотрицательного оператора B, а также из условий (4) следует, что оператор A_0 является самосопряжённым и положительным.

Отметим, что задачи вида (1), (2) представляют собой операторные модели задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [1, 2]) и теплофизике (см. [7–10]). Результаты о спектральном анализе уравнения (1) в случае, когда ядра $K_i(t)$ представляют собой убывающие экспоненты, изложены в монографии [12].

Замечание 1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [20, с. 177–178]) следует, что оператор A_0 является обратимым, A_0^{-1} – ограниченный оператор, а операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$ и $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в H.

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

Через Ω_k, $k=1,2$, обозначим пространства $L^2(\mathbb{R}_+,H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H, снабжённые нормами

$$\|u\|_{\Omega_k}=\left(\int\limits_0^{+\infty}\|u(s)\|_H^2\,d\mu_k(s)\right)^{1/2}.$$

2. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка. Применяя формулу интегрирования по частям к интегралам в левой части уравнения (1), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+A_0u(t)+\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\right)A\frac{du(s)}{ds}\,ds+\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\right)B\frac{du(s)}{ds}\,ds=$$

$$=f(t)-\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\right)\varphi_0. \tag{7}$$

Заметим, что $A=A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$ и $B=A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$, поэтому уравнение (7) формально можно записать в виде

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+A_0^{1/2}\left[A_0^{1/2}u(t)+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\left(\int\limits_0^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds}\,ds\right)d\mu_k(\tau)\right]=f_1(t),$$

где

$$f_1(t)=f(t)-\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\right)\varphi_0. \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$v(t):=u'(t),\quad \xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t,\tau)=\int\limits_0^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds}\,ds,\quad t>0,\quad k=1,2,\quad \tau\in\mathbb{R}_+.$$

В этих переменных задача (1), (2) формально приводится к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt}+A_0^{1/2}\left[\xi_0(t)+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)\,d\mu_k(\tau)\right]=f_1(t),\quad \frac{d\xi_0(t)}{dt}=A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_1(t,\tau)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t)-\tau\xi_1(t,\tau),\quad \frac{d\xi_2(t,\tau)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t)-\tau\xi_2(t,\tau), \tag{9}$$

где $t\in\mathbb{R}_+$, функция $f_1(t)$ определена равенством (8),

$$v(t)|_{t=0}=\varphi_1,\quad \xi_0(t)|_{t=0}=A_0^{1/2}\varphi_0,\quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0}=0,\quad k=1,2. \tag{10}$$

Теперь, во-первых, мы должны превратить задачу (9), (10) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором эта задача будет корректной, во-вторых, мы должны установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (9), (10) и решением исходной задачи (1), (2).

3. Задача Коши в расширенном функциональном пространстве. Формулировка результатов. Сначала определим оператор $\tau\xi(\tau)$, входящий в третье и четвёртое уравнения системы (9).

Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу $L_k(t)$ в пространстве Ω_k (см. [18, с. 65]): $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$, $t \geqslant 0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau)$ в пространстве Ω_k с областью определения

$$D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}$$

является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [18, с. 65]).

Замечание 2. 1) Для любого $\xi(\tau) \in \Omega_k$ при $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| \frac{e^{-t\tau}}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-2t\tau}\,d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2} \|\xi(\tau)\|_{\Omega_k}. \tag{11}$$

2) Для любого $\xi \in D(\mathbb{T}_k)$ имеет место оценка

$$|\langle \tau\xi(\tau), \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k}| \leqslant \|\tau\xi(\tau)\|_{\Omega_k}\|\xi(\tau)\|_{\Omega_k}. \tag{12}$$

Действительно, достаточно применить неравенство Гёльдера к интегралам в левой части неравенств (11), (12).

Введём операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ $(k = 1, 2)$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда сопряжённые операторы $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ $(k = 1, 2)$ запишутся в виде

$$\mathbb{B}_k^*\xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\,d\mu_k(\tau), \quad k = 1, 2.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} = \int\limits_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau) =$$

$$= \left\langle v, Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\,d\mu_k(\tau)\right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^*\xi(\tau)\rangle_H.$$

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus \left(\bigoplus_{k=1}^{2} \Omega_k\right)$ с естественным скалярным умножением; в частности, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2} \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

которое будем называть *расширенным функциональным пространством.*

В пространстве $\mathbb{H}$ зададим линейный оператор $\mathbb{A}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_k(\tau)\,d\mu_k(\tau) \in H_{1/2},\right.$$

$$\left.\xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = 1,2\right\} =$$

$$= \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \quad \xi_0 + \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = 1,2\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^{\mathrm{т}} =$$

$$= \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau)\, d\mu_k(\tau)\right], A_0^{1/2} v,\, Q_k A_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} v - \tau \xi_k(\tau), \quad k = 1,2\right)^{\mathrm{т}} =$$

$$= \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\right],\, A_0^{1/2} v,\, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), \quad k = 1,2\right)^{\mathrm{т}}.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно представить в виде следующей операторной матрицы:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

где I – тождественный оператор в соответствующем пространстве.

Введём четырёхкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Теперь мы можем записать систему (9), (10) в виде дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t), \tag{13}$$

$$Z(0) = z. \tag{14}$$

Определение 2. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau))$, $t \in [0,\infty)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (13), (14), если она принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{A})) \bigcap C([0,\infty), D(\mathbb{A}))$ при любом $\tau \in \mathbb{R}_+$ и удовлетворяет уравнению (13) и начальному условию (14).

Определение 3 [20]. Линейный оператор A с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если $\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0$ для любого $x \in D(A)$ и *максимально диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4). Тогда оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ является максимально диссипативным.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4). Тогда линейный оператор $\mathbb{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$, при этом решение задачи*

(13), (14) представимо в виде $Z(t) = S(t)z, \ \ t > 0,$ *и для любого* $z \in D(\mathbb{A})$ *справедливо энергетическое равенство*

$$\frac{d}{dt}\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}} = -2\bigg(\int\limits_0^{+\infty} \tau\|\xi_1(t,\tau)\|^2_H \, d\mu_1(\tau) + \int\limits_0^{+\infty} \tau\|\xi_2(t,\tau)\|^2_H \, d\mu_2(\tau)\bigg). \tag{15}$$

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \tag{16}$$

$$Z(0) = z. \tag{17}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0),$ где $f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0,$ а функции $M_k(t), \ \ k = 1, 2,$ определяются равенствами (5), вектор z имеет вид $z = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, 0, 0).$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (4) и любое из следующих условий:*

1) вектор-функция $A_0^{1/2}f(t)$ *принадлежит пространству* $C([0,\infty), H),$ *а векторы* φ_0 *и* φ_1 *– пространствам* $H_{3/2}$ *и* $H_{1/2}$ *соответственно;*

2) вектор-функция $f(t)$ *принадлежит пространству* $C^1([0,\infty), H),$ *функции* $M_k(t)$ *– пространству* $C^1([0,+\infty)),$ $k = 1, 2,$ *а векторы* φ_0 *и* φ_1 *– пространствам* H_1 *и* $H_{1/2}$ *соответственно.*

Тогда задача (16), (17) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t), \ \ \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t), \ \ u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2), и справедлива оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|^2_H + \|A_0^{1/2}u(t)\|^2_H) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant$$

$$\leqslant d\bigg[(\|\varphi_1\|^2_H + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|^2_H) + \bigg(\int\limits_0^t \|f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0\|_H \, ds\bigg)^2\bigg] \tag{18}$$

с постоянной $d,$ *не зависящей от вектор-функции* $f,$ *и векторов* $\varphi_0, \ \ \varphi_1.$

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (1), (2) с нулевыми начальными условиями $u(+0) = 0, \ \ u^{(1)}(+0) = 0$ имеет представление $\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$ Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B, \tag{19}$$

в котором $\hat{K}_i(\lambda), \ \ i = 1, 2,$ – преобразования Лапласа функций $K_i(t), \ \ i = 1, 2,$ соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2,$$

$\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Лапласа вектор-функции $f(t), \ \ I$ – тождественный оператор в пространстве $H.$

Определение 4. Множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* $\rho(L)$ оператор-функции $L(\lambda),$ если для любого $\lambda \in \rho(L)$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Множество $\sigma(L) = \mathbb{C}\backslash\rho(L)$ называется *спектром* оператор-функции $L(\lambda).$

Обозначим через $\sigma(\mathbb{A})$, $\sigma(\mathbb{T})$ спектры операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{T}$ соответственно.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (4). Тогда $\sigma(\mathbb{A})\backslash\sigma(\mathbb{T}) \subseteq \sigma(L)$, невещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ совпадает с невещественной частью спектра оператор-функции L и симметрична относительно вещественной оси.*

Структура и локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$ изучалась в работах [13, 14].

4. Доказательство теорем 1 и 2. Для доказательства теорем 1 и 2 будем использовать следующие две хорошо известные теоремы из монографии [20, с. 109–110].

Теорема 4.3 [20]. *Всякий диссипативный оператор допускает расширение до максимально диссипативного оператора. Диссипативный оператор A является максимально диссипативным тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ с положительной вещественной частью область значений $R(A-\lambda I)$ оператора $A-\lambda I$ совпадает со всем пространством.*

Через $\mathcal{B}(H_1,H_2)$, где H_i – банаховы пространства, $i=1,2$, будем обозначать банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов из H_1 в H_2. В частности, если $H_1=H_2$, то алгебру $\mathcal{B}(H_1,H_2)$ обозначаем через $\mathcal{B}(H_1)$.

Теорема 4.5 [20]. *Для того чтобы задаче Коши для уравнения $\dot{x}=Ax$ с замкнутым оператором A в гильбертовом пространстве отвечала сжимающая C_0-полугруппа, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был максимально диссипативным оператором.*

Доказательство теоремы 1. Покажем, что для оператора $\mathbb{A}$ справедливы следующие утверждения:

1) Неравенство $\operatorname{Re}\langle\mathbb{A}Z,Z\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant 0$ справедливо для любого $Z\in D(\mathbb{A})$.

2) Образ отображения $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}) : D(\mathbb{A}) \to \mathbb{H}$ совпадает с пространством $\mathbb{H}$ для любого λ с положительной вещественной частью. Здесь $\mathbb{I}$ – тождественный оператор в пространстве $\mathbb{H}$.

Тогда, по теореме 4.3 [20], оператор $\mathbb{A}$ будет максимально диссипативным.

Докажем утверждение 1). Действительно, по определению оператора $\mathbb{A}$ имеем

$$\langle\mathbb{A}Z,Z\rangle_{\mathbb{H}} = -\left\langle A_0^{1/2}\left[\xi_0+\sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*\xi_k(\tau)\right],v\right\rangle_H + \langle A_0^{1/2}v,\xi_0\rangle_H + \sum_{k=1}^{2}\langle\mathbb{B}_kA_0^{1/2}v,\xi_k(\tau)\rangle_{\Omega_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\langle\tau\xi(\tau),\xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} = -\left\langle A_0^{1/2}\left[\xi_0+\sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*\xi_k(\tau)\right],v\right\rangle_H + \overline{\langle\xi_0,A_0^{1/2}v\rangle_H} +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\overline{\langle\mathbb{B}_k^*\xi_k(\tau),A_0^{1/2}v\rangle_H} - \sum_{k=1}^{2}\langle\tau\xi(\tau),\xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} = -\left\langle A_0^{1/2}\left[\xi_0+\sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*\xi_k(\tau)\right],v\right\rangle_H +$$

$$+\overline{\left\langle A_0^{1/2}\left[\xi_0+\sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*\xi_k(\tau)\right],v\right\rangle_H} - \sum_{k=1}^{2}\langle\tau\xi(\tau),\xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} =$$

$$= -2i\operatorname{Im}\langle A_0^{1/2}[\xi_0+A_0^{1/2}\mathbb{B}_k^*\xi_k(\tau)],v\rangle_H - \sum_{k=1}^{2}\langle\tau\xi(\tau),\xi(\tau)\rangle_{\Omega_k}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\langle\mathbb{A}Z,Z\rangle_{\mathbb{H}} = -\sum_{k=1}^{2}\langle\tau\xi_k(\tau),\xi_k(\tau)\rangle_{\Omega_k} = -\sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^{+\infty}\tau\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau) \leqslant 0. \qquad (20)$$

Для доказательства утверждения 2) покажем, что оператор $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$ непрерывно обратим на пространстве $\mathbb{H}$ и $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{-1}\in L(\mathbb{H})$ для любого λ с положительной вещественной частью. Для этого нам понадобится следующее непосредственно проверяемое предложение.

Предложение 1. *Пусть* $\tilde{H}_k$ $(k=1,2)$ *– гильбертовы пространства. Предположим, что* $A_{11}^{-1}\in\mathcal{B}(\tilde{H}_1)$, $A_{22}^{-1}\in\mathcal{B}(\tilde{H}_2)$, $A_{12}\in\mathcal{B}(\tilde{H}_2,\tilde{H}_1)$, $A_{21}\in\mathcal{B}(\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$, $D_1:=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $D_1^{-1}\in\mathcal{B}(\tilde{H}_1)$, *и рассмотрим определённый на пространстве* $\tilde{H}_1\bigoplus\tilde{H}_2$ *линейный оператор*

$$\tilde{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда оператор $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{B}(\tilde{H}_1\bigoplus\tilde{H}_2)$.

Доказательство. Если выполнены условия предложения 1, то несложно проверить, что справедливо представление (факторизация типа Шура–Фробениуса, см. [21, § 1.6])

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\left[\begin{pmatrix}I & A_{12}A_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ A_{22}^{-1}A_{21} & I\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}[I+A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}]\end{pmatrix}\in L(\tilde{H}_1\bigoplus\tilde{H}_2). \tag{21}$$

Это и доказывает предложение 1.

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H}_0=H\bigoplus\big(\bigoplus_{k=1}^2\Omega_k\big)$ и следующие операторы: $\mathbb{B}:=(I,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)^{\text{т}}:H\to\mathbb{H}_0$, $\mathbb{B}^*:=(I,\mathbb{B}_1^*,\mathbb{B}_2^*):\mathbb{H}_0\to H$ и $\mathbb{T}:\mathbb{H}_0\to\mathbb{H}_0$, где

$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbb{T}_1 & 0\\ 0 & 0 & \mathbb{T}_2\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Оператор $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}$ предста́вим в виде следующего произведения:

$$\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}=\begin{pmatrix}-\lambda I & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^*\\ A_0^{1/2} & -\lambda I & 0 & 0\\ \mathbb{B}_1A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0\\ \mathbb{B}_2A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda A_0^{-1} & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^*\\ I & -\lambda I & 0 & 0\\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0\\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{pmatrix}=:$$

$$=:\mathbb{A}_0\mathbb{A}_1(\lambda)\mathbb{A}_0. \tag{23}$$

Применяя обозначения предложения 1 к оператор-функции $\mathbb{A}_1(\lambda)$, будем иметь $\tilde{H}_1=H$, $\mathbb{H}=\tilde{H}_1\bigoplus\tilde{H}_2=H\bigoplus\mathbb{H}_0$, где $A_{11}:=-\lambda A_0^{-1}$, $A_{12}:=(-I,-\mathbb{B}_1^*,-\mathbb{B}_2^*)$, $A_{21}:=(I,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)^{\text{т}}$,

$$A_{22}=\begin{pmatrix}-\lambda I & 0 & 0\\ 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0\\ 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I\end{pmatrix}.$$

Тогда для всех $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq-\tau$, $\tau\in\mathbb{R}_+$ справедливы следующие равенства:

$$A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}-\lambda^{-1}I & 0 & 0\\ 0 & -(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2+\lambda I)^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda^{-1}I & 0 & 0\\ 0 & -(\tau+\lambda)^{-1}I & 0\\ 0 & 0 & -(\tau+\lambda)^{-1}I\end{pmatrix},$$

$$A_{12}A_{22}^{-1}=(\lambda^{-1}I,\mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1},\mathbb{B}_2^*(\mathbb{T}_2+\lambda I)^{-1}),$$

$$A_{22}^{-1}A_{21} = (-\lambda^{-1}I, -(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1, -(\mathbb{T}_2+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_2)^{\text{т}},$$

$$D_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1}I - \sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k =$$

$$= -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1}I - \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}Q_k^*Q_k =$$

$$= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2}\biggl[\lambda^2 + A_0 + \biggl(\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\lambda+\tau}\biggr)A + \biggl(\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\lambda+\tau}\biggr)B\biggr]A_0^{-1/2} =$$

$$= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2}\biggl[\lambda^2 + \biggl(1 - \int_0^{\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\biggr)A + \biggl(1 - \int_0^{\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\biggr)B +$$

$$+ \biggl(\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\lambda+\tau}\biggr)A + \biggl(\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} - \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\lambda+\tau}\biggr)B\biggr]A_0^{-1/2} =$$

$$= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2}\biggl[\lambda^2 + A + B - \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\lambda+\tau}A - \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\lambda+\tau}B\biggr]A_0^{-1/2} =$$

$$= -\lambda^{-1}A_0^{-1/2}L(\lambda)A_0^{-1/2} =: M(\lambda), \tag{24}$$

где $L(\lambda)$ – оператор-функция (19).

Покажем, что для оператор-функции $\mathbb{A}_1(\lambda)$ при всех $\lambda\in\mathbb{C}$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda>0$, выполнены условия предложения 1.

Лемма 1. *В принятых выше обозначениях справедливы следующие утверждения:*

а) для всех $\lambda\in\mathbb{C}$ *таких, что* $\operatorname{Re}\lambda>0$, *оператор-функция* $M^{-1}(\lambda)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{B}(H)$;

б) для всех $\lambda\ne 0$, $\lambda\ne-\tau$, *где* $\tau\in\mathbb{R}_+$, *выполняется включение*

$$-(\mathbb{T}+\lambda)^{-1} := \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & -(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2+\lambda I)^{-1}\end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_0);$$

в) имеют место включения $\mathbb{B}^* = (I,\mathbb{B}_1^*,\mathbb{B}_2^*)\in\mathcal{B}(\mathbb{H}_0,H)$ *и* $\mathbb{B} = (I,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)^{\text{т}}\in\mathcal{B}(H,\mathbb{H}_0)$.

Доказательство. Заметим, что для всех λ с положительной вещественной частью в силу условия (4) справедлива следующая оценка:

$$\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)} = \int_0^{+\infty}\frac{(\operatorname{Re}\lambda+\tau)\,d\mu_k(\tau)}{\tau|\lambda+\tau|^2} \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau|\lambda+\tau|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}, \quad k=1,2. \tag{25}$$

Докажем утверждение а). Согласно определению оператор-функции в (24) имеем

$$M(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1}I - \sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k.$$

Следовательно, для всех λ таких, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$, с учётом оценки (25) выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\|M(\lambda)v\|_H \geqslant \frac{|(M(\lambda)v,v)|_H}{\|v\|_H} = \frac{1}{\|v\|_H}\left|-\lambda(A_0^{-1}v,v)_H - \frac{1}{\lambda}(v,v)_H - \sum_{k=1}^{2}(\mathbb{B}_k^*(\tau+\lambda)^{-1}\mathbb{B}_k v,v)_H\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\|v\|_H}\left(\operatorname{Re}\lambda(A_0^{-1/2}v,A_0^{-1/2}v)_H + \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}(v,v)_H + \sum_{k=1}^{2}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}(Q_kv,Q_kv)_H\right) =$$

$$= \|v\|_H\left(\operatorname{Re}\lambda\frac{\|A_0^{-1/2}v\|_H^2}{\|v\|_H^2} + \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{k=1}^{2}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}\frac{\|Q_kv\|_H^2}{\|v\|_H^2}\right) \geqslant \|v\|_H\frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}.$$

б) Покажем, что для всех λ таких, что $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -\tau$, где $\tau \in \mathbb{R}_+$, оператор $\mathbb{T}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{B}(\mathbb{H}_0)$. Действительно, для любого вектора $Z_0 = (\xi_0,\xi_1(\tau),\xi_2(\tau))^{\text{т}} \in \mathbb{H}_0$ справедлива оценка

$$\frac{\|\mathbb{T}(\lambda)Z_0||_{\mathbb{H}_0}}{\|Z_0||_{\mathbb{H}_0}} = \frac{\|(\lambda^{-1}\xi_0,(\tau+\lambda)^{-1}\xi_1(\tau),(\tau+\lambda)^{-1}\xi_2(\tau))||_{\mathbb{H}_0}}{\|(\xi_0,\xi_1(\tau),\xi_2(\tau))||_{\mathbb{H}_0}} =$$

$$= \left(|\lambda|^{-2}\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\frac{\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)}{|\lambda+\tau|^2}\right)\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{|\lambda|^2}.$$

в) Для любого вектора $Z_0 = (\xi_0,\xi_1(\tau),\xi_2(\tau))^{\text{т}} \in \mathbb{H}_0$ получаем

$$\frac{\|(I,\mathbb{B}_1^*,\mathbb{B}_2^*)Z_0\|_H^2}{\|Z_0\|_{\mathbb{H}_0}^2} = \left\|\xi_0 + \sum_{k=1}^{2}Q_k^*\int_0^{+\infty}\frac{\xi_k(\tau)}{\sqrt{\tau}}\,d\mu_k(\tau)\right\|_H^2\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\|Q_k^*\xi_k(\tau)\|_H}{\sqrt{\tau}}\,d\mu_k(\tau)\right)^2\right)\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)\left(\int_0^{+\infty}\|Q_k^*\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)\right)\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\|Q_k^*\|_H^2\int_0^{+\infty}\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)\left(\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\|\xi_k(\tau)\|_H^2\,d\mu_k(\tau)\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\max\{1,\|Q_1\|_H^2,\|Q_2\|_H^2\}.$$

Для любого вектора $v \in H$, учитывая ограниченность операторов Q_k, $k = 1,2$, имеем

$$\frac{\|(I,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)^{\text{т}}v\|_{\mathbb{H}_0}^2}{\|v\|_H^2} = \frac{1}{\|v\|_H^2}\left(\|v\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}\|Q_k\|_H^2\|v\|_H^2\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|_H^2.$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что для оператора $\mathbb{A}_1(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ выполнены условия предложения 1 и, следовательно, оператор $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ принадлежит пространству $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. Таким образом, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ область значений $R(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ совпадает с пространством $\mathbb{H}$ и, следовательно, оператор $\mathbb{A}$ является максимально диссипативным в этом пространстве. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы 2 следует из [20, теорема 4.5] и теоремы 1. Пусть $z \in D(\mathbb{A})$. Тогда $S(t)z \in D(\mathbb{A})$ для любого $t > 0$ и из (13) следует равенство

$$\frac{d}{dt}\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}} = 2\operatorname{Re}\langle \mathbb{A}S(t)z, S(t)z\rangle_{\mathbb{H}}.$$

С другой стороны, согласно (20) получаем

$$\operatorname{Re}\langle \mathbb{A}Z, Z\rangle_{\mathbb{H}} = -\sum_{k=1}^{2}\langle \tau\xi_k(\tau), \xi_k(\tau)\rangle_{\Omega_k},$$

откуда следует энергетическое равенство (15). Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3. В этом пункте работы будем использовать определения и утверждения из монографии [20, гл. 1, § 1.2].

Определение 5. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{H}$, имеющий всюду плотную в этом пространстве область определения $D(\mathcal{A})$. Задача Коши

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t), \tag{26}$$

$$Z(0) = z \tag{27}$$

называется *корректной (равномерно корректной)*, если

1) для любого $z \in D(\mathcal{A})$ существует единственное решение задачи (26), (27);

2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: если последовательность $(Z_n(0))_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ сходится к нулю, то и последовательность $(Z_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ соответствующих решений сходится к нулю при каждом $t \in [0, T]$ (равномерно по $t \in [0, T]$) на любом конечном отрезке $[0, T]$.

Замечание. Если задача Коши (26), (27) порождает сжимающую полугруппу в пространстве $\mathcal{H}$, то эта задача равномерно корректна.

В дальнейшем будут использоваться следующие результаты из [20, гл. 1, §§ 1, 6].

Теорема 1.1 [20]. *Если задача Коши (26), (27) корректна, то её решение даётся формулой* $Z(t) = S(t)z$ $(z \in D(\mathcal{A}))$, *где* $S(t)$ *– сильно непрерывная при* $t > 0$ *полугруппа операторов.*

Теорема 6.5 [20]. *Если задача Коши (26), (27) равномерно корректна, то формула*

$$Z(t) = S(t)z + \int_0^t S(t-p)F(p)\,dp \tag{28}$$

даёт решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t),$$

$$Z(0) = z,$$

где $z \in D(\mathcal{A})$ *и вектор-функция* $F(t)$ *удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

1) множество значений функции $F(t)$, $t \geqslant 0$, *содержится в множестве* $D(\mathcal{A})$, *а функция* $\mathcal{A}F(t)$ *принадлежит классу* $C([0,\infty), \mathcal{H})$;

2) функция $F(t)$ *принадлежит классу* $C^1([0,+\infty), \mathcal{H})$.

Доказательство теоремы 3. Задача Коши (16), (17), записанная покоординатно, имеет вид (9), (10). Рассмотрим последние два уравнения системы (9). Применим к этим уравнениям метод вариации произвольных постоянных. По определению операторов $\mathbb{T}_k\xi(\tau)=\tau\xi(\tau)$, $k=1,2$, где $D(\mathbb{T}_k)=\{\xi\in\Omega_k:\tau\xi\in\Omega_k\}$, соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi_k(t,\tau)}{dt}=-\mathbb{T}_k\xi_k(t,\tau).$$

Следовательно, общие решения однородных уравнений могут быть записаны в виде $\xi_k^O(t,\tau)=e^{-t\mathbb{T}_k}C_k(\tau)$, где $C_k(\tau)\in\Omega_k$ – произвольные векторы. Применяя формулу (28) для решения неоднородных уравнений при условии

$$\xi_k(t,\tau)|_{t=0}=0,\quad \tau\in\mathbb{R}_+,$$

получаем

$$\xi_k(t,\tau)=\int\limits_0^t e^{-(t-s)\mathbb{T}_k}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds=\int\limits_0^t e^{-(t-s)\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds.$$

Из первого уравнения системы в соответствии с областью определения оператора $\mathbb{A}$ имеем

$$\xi_0(t)+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)\,d\mu_k(\tau)\in D(A_0^{1/2}).\tag{29}$$

Подставляя найденные выражения для $\xi_k(t,\tau)$ в (29), получаем

$$\int\limits_0^t A_0^{1/2}v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi_0+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\int\limits_0^t e^{-(t-s)\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\mu_k(\tau)=$$

$$=\int\limits_0^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi_0\in D(A_0^{1/2}).$$

Согласно условиям теоремы 3 либо $\varphi_0\in H_{3/2}$, $\varphi_1\in H_{1/2}$, либо $\varphi_0\in H_1$, $\varphi_1\in H_{1/2}$. Таким образом, $z=(\varphi_1,A_0^{1/2}\varphi_0,0,0)\in D(\mathbb{A})$, т.е. выполнено условие теоремы 6.1 из [20]. Следовательно,

$$\int\limits_0^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds\in D(A_0^{1/2}).$$

Итак, задача (16), (17), согласно теореме 6.1, является равномерно корректной и справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}\leqslant d\left(\|z\|_{\mathbb{H}}+\int\limits_0^t\|F(s)\|_{\mathbb{H}}\,ds\right)\tag{30}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1. Оценка (30) следует из формулы (28), применённой к задаче (16), (17), в обозначениях теоремы 3, так как $Z(t)=S(t)z$, где полугруппа $S(t)$ является сжимающей согласно теореме 1.

Покажем, что $v(t):=u'(t)$, $\xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t)$, где $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2). Рассмотрим вектор-функцию

$$-A_0^{1/2}\int\limits_0^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds=$$

$$= -A_0 \int_0^t A_0^{-1/2} \Big[I + \sum_{k=1}^{2} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\, d\mu_k(\tau) \Big) Q_k^* Q_k \Big] A_0^{1/2} v(s)\, ds, \quad t > 0. \tag{31}$$

Из (31) следует включение

$$\int_0^t A_0^{-1/2} \Big[I + \sum_{k=1}^{2} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\, d\mu_k(\tau) \Big) Q_k^* Q_k \Big] A_0^{1/2} v(s)\, ds \in D(A_0).$$

Введём обозначение

$$R(t) := A_0^{-1/2} \Big[\sum_{k=1}^{2} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\, d\mu_k(\tau) \Big) Q_k^* Q_k \Big] A_0^{1/2}, \quad t > 0.$$

Тогда вектор-функцию в (31) можно записать в виде

$$\int_0^t v(s)\, ds + \int_0^t R(t-s) v(s)\, ds =: y(t) \in D(A_0). \tag{32}$$

После интегрирования по частям в (32) и введения новой вектор-функции $w(t) = \int_0^t v(s)\, ds$ получаем следующее интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$(I + R(0)) w(t) + \int_0^t R'(t-s) w(s)\, ds = y(t), \quad y(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_1), \tag{33}$$

где

$$R'(t) = -A_0^{-1/2} \sum_{k=1}^{2} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_k(\tau) \Big) Q_k^* Q_k A_0^{1/2} =$$

$$= -\Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_1(\tau) \Big) A_0^{-1} A - \Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_2(\tau) \Big) A_0^{-1} B,$$

$$R(0) = A_0^{-1/2} \Big[\sum_{k=1}^{2} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau} \Big) Q_k^* Q_k \Big] A_0^{1/2} = \Big(\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \Big) A_0^{-1} A + \Big(\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau} \Big) A_0^{-1} B.$$

Покажем, что оператор-функция $R'(t)$ принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))$. Действительно, для любого $z \in H_1$

$$\|R'(t) z\|_{H_1} = \Big\| \Big[\Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_1(\tau) \Big) A + \Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_2(\tau) \Big) B \Big] A_0^{-1} (A_0 z) \Big\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| \Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_1(\tau) \Big) A A_0^{-1} + \Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_2(\tau) \Big) B A_0^{-1} \Big\|_H \|z\|_{H_1} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_1(\tau) \Big) \|A A_0^{-1}\|_H + \Big(\int_0^{+\infty} e^{-t\tau}\, d\mu_2(\tau) \Big) \|B A_0^{-1}\|_H \Big] \|z\|_{H_1}.$$

Таким образом, $R'(t) \in \mathcal{B}(H_1)$. Кроме того, для любых $t_1, t_2 > 0$ справедливо неравенство

$$\|R'(t_1) - R'(t_2)\|_{H_1} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\int\limits_0^{+\infty} (e^{-t_1\tau} - e^{-t_2\tau})\, d\mu_1(\tau)\biggr)\|A_0^{-1}A\|_H + \biggl(\int\limits_0^{+\infty} (e^{-t_1\tau} - e^{-t_2\tau})\, d\mu_2(\tau)\biggr)\|A_0^{-1}B\|_H.$$

Следовательно, оператор-функция $R'(t)$ принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))$. Из уравнения (33) вытекает, что

$$w(t) = (I + R(0))^{-1}\biggl(y(t) - \int\limits_0^t R'(t-s)w(s)\, ds\biggr) =: Sw(t),$$

где оператор $S : H_1 \to H_1$. Покажем, что $\|S\|_{C(\mathbb{R}_+; L(H_1))} < 1$.

Утверждение. *Для любых $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ при $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{t\geqslant 0} \|Sw_1(t) - Sw_2(t)\|_{H_1} \leqslant \kappa \sup_{t\geqslant 0} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa = \|A_0R(0)A_0^{-1}\|_H \|I + A_0R(0)A_0^{-1}\|_H^{-1} < 1$.

Действительно, для любых $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ при $t > 0$ справедлива оценка

$$\|Sw_1(t) - Sw_2(t)\|_{H_1} \leqslant \|(I + R(0))^{-1}\|_{H_1} \biggl\|\int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s))\, ds\biggr\|_{H_1}.$$

Далее, для любого $z \in H_1$ получаем

$$\|(I + R(0))^{-1}z\|_{H_1} = \|A_0(I + R(0))^{-1}A_0^{-1}(A_0z)\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \biggl\|I + \biggl(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\biggr)AA_0^{-1} + \biggl(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\biggr)BA_0^{-1}\biggr\|_H^{-1} \|z\|_{H_1} = \|(I + A_0R(0)A_0^{-1})\|^{-1}\|z\|_{H_1}.$$

Следовательно, $\|(I + R(0))^{-1}\|_{H_1} \leqslant \|(I + A_0R(0)A_0^{-1})\|_H^{-1}$, так как операторы AA_0^{-1} и BA_0^{-1} принадлежат пространству $\mathcal{B}(H)$ и положительны. Аналогично для любых $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ при $t > 0$ получаем

$$\sup_{t\geqslant 0} \biggl\|\int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s))\, ds\biggr\|_{H_1} = \sup_{t\geqslant 0} \biggl\|A_0\int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}A_0(w_1(s) - w_2(s))\, ds\biggr\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0} \biggl\|A_0\int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\, ds\biggr\|_H \sup_{t\geqslant 0} \|w_1(s) - w_2(s)\|_{H_1} \leqslant \|A_0R(0)A_0^{-1}\|_H \sup_{t\geqslant 0} \|w_1(s) - w_2(s)\|_{H_1}.$$

Поэтому уравнение (33) имеет решение $w(t) \in C([0, +\infty), H_1)$ и $v(t) \in D(A_0)$.

Вернёмся к первому уравнению системы (9) и воспользуемся тем, что $v(t) \in D(A_0)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$-A_0^{1/2}\biggl[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_k(t,\tau)\, d\tau\biggr] + f(t) - \biggl(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau)A + \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau)B\biggr)\varphi_0 =$$

$$= -A_0^{1/2}\Big[\int\limits_0^t A_0^{1/2}v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{2} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} Q_k A_0^{1/2} v(s)\,ds\,d\mu_k(\tau)\Big] +$$

$$+f(t) - \Big(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi_0 =$$

$$= -\Big[\int\limits_0^t A_0 v(s)\,ds + A_0\varphi_0 + \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} Av(s)\,ds\,d\mu_1(\tau) + \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} Bv(s)\,ds\,d\mu_2(\tau)\Big] +$$

$$+ f(t) - \Big(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi_0. \tag{34}$$

Производя замену переменной $v(t) := u'(t)$ в выражении (34) и применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$-\Big[\int\limits_0^t A_0 u'(s)\,ds + A_0\varphi_0 + \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} Au'(s)\,ds\,d\mu_1(\tau) + \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} Bu'(s)\,ds\,d\mu_2(\tau)\Big] +$$

$$+ f(t) - \Big(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi_0 =$$

$$= -\Big[A_0 u(t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)Au'(s)\,ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu'(s)\,ds\Big] +$$

$$+ f(t) - \Big(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi_0 =$$

$$= -A_0 u(t) - \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\Big)Au(s)\Big|_0^t + \int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds -$$

$$- \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\Big)Bu(s)\Big|_0^t + \int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds +$$

$$+ f(t) - \Big(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi_0 =$$

$$= -A_0 u(t) - \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\Big)Au(t) + \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\Big)Au(0) + \int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds -$$

$$- \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\Big)Bu(t) + \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\Big)Bu(0) + \int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty} e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds -$$

$$
-\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\Bigg)Au(t)+\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\Bigg)A\varphi_0+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds-
$$

$$
-\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\Bigg)Bu(t)+\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\Bigg)B\varphi_0+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds+
$$

$$
+f(t)-\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Bigg)\varphi_0=
$$

$$
=-(A+B)u(t)+\int\limits_0^t K_1(t-s)Au(s)\,ds+\int\limits_0^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds+f(t).
$$

Таким образом, первое уравнение системы (9) совпадает с интегро-дифференциальным уравнением (1):

$$
\frac{d^2u(t)}{dt^2}=-(A+B)u(t)+\int\limits_0^t K_1(t-s)Au(s)\,ds+\int\limits_0^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds+f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,
$$

с начальными условиями $u(+0)=\varphi_0$, $u^{(1)}(+0)=\varphi_1$. Следовательно, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2). Более того, выполнение условий теоремы 3 обеспечивает выполнение условий теоремы 6.5 [20], а тогда оценка (18) следует из оценки (30). Теорема 3 доказана.

6. Доказательство теоремы 4. Согласно представлению (23) имеет место равенство $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}=\mathbb{A}_0\mathbb{A}_1(\lambda)\mathbb{A}_0$, где $\mathbb{A}_0$ – обратимый оператор в пространстве $\mathbb{H}$ такой, что $\mathbb{A}_0^{-1}\in\mathcal{B}(\mathbb{H})$, а оператор-функция $\mathbb{A}_1(\lambda)$ имеет вид

$$
\mathbb{A}_1(\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda A_0^{-1} & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^*\\ I & -\lambda I & 0 & 0\\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0\\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I\end{pmatrix}.
$$

Применяя обозначения предложения 1 к оператор-функции $\mathbb{A}_1(\lambda)$, получаем $\tilde H_1=H$, $\mathbb{H}=\tilde H_1\bigoplus\tilde H_2=H\bigoplus\mathbb{H}_0$, где $\mathbb{H}_0:=H\bigoplus(\bigoplus_{k=1}^2\Omega_k)$, $A_{11}=-\lambda A_0^{-1}$, $A_{12}=(-I,-\mathbb{B}_1^*,-\mathbb{B}_2^*)$, $A_{21}=(I,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)^{\mathrm{т}}$,

$$
A_{22}=\begin{pmatrix}-\lambda I & 0 & 0\\ 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0\\ 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I\end{pmatrix}.
$$

Согласно предложению 1 для всех λ таких, что $\lambda\neq 0$, $\lambda\notin\sigma(M(\lambda))$, $\lambda\notin\sigma(\mathbb{T}_k+\lambda I)$, $k=1,2$, оператор-функция $\mathbb{A}_1(\lambda)$ допускает следующее представление (факторизация типа Шура–Фробениуса, см. представление (21) и [21, предложение 1.6.2]):

$$
\mathbb{A}_1(\lambda)=\begin{pmatrix}I & \lambda^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1}\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{pmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{pmatrix}M(\lambda) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_1+\lambda I) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2+\lambda I)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0 & 0 & 0\\ -\lambda^{-1} & I & 0 & 0\\ -(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1 & 0 & I & 0\\ -(\mathbb{T}_2+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1 & 0 & 0 & I\end{pmatrix}, \qquad (35)
$$

где, согласно (24), оператор-функция $M(\lambda)$ задаётся равенством

$$M(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \lambda^{-1} I - \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k + \lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k = -\lambda^{-1} A_0^{-1/2} L(\lambda) A_0^{-1/2},$$

в котором оператор-функция $L(\lambda)$ определяется формулой (19) и является символом уравнения (1). Таким образом, $\sigma(M(\lambda)) = \sigma(L(\lambda))$; кроме того, согласно п. а) леммы 1, $\sigma(\mathbb{T}_k) = (\infty, 0]$. Следовательно, в силу представления (35), предложения 1 и леммы 1 справедливо равенство $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(L) \bigcup \bigcup (-\infty, 0]$. Согласно п. б) леммы 1 $\sigma(L(\lambda)) = \sigma(M(\lambda)) \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$; кроме того, $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$. Поэтому невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и совпадает с невещественной частью спектра оператора $\mathbb{A}$. Теорема 4 доказана.

7. Пример. Рассмотрим $\mu_1(\tau) = (\sum_{k=1}^{j-1} a_k)\chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau)$, $\mu_2(\tau) = (\sum_{k=1}^{j-1} b_k)\chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau)$ – ступенчатые функции, где $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $j = \overline{1, N}$, $\chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau)$ – характеристические функции полуинтервалов $[\beta_{j-1}, \beta_j)$, $0 \leqslant \beta_{j-1} < \beta_j$, $j = \overline{1, N}$, $\beta_0 = 0$. Тогда ядра интегральных операторов имеют следующие представления:

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{-\beta_j t}, \quad K_2(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j e^{-\beta_j t},$$

и условия (4) примут вид

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

Введём новые переменные $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$,

$$\xi_{1j}(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{a_j} e^{-(t-s)\beta_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_1 A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds}\, ds,$$

$$\xi_{2j}(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{b_j} e^{-(t-s)\beta_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_2 A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds}\, ds, \quad t > 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

В этих обозначениях задача (1), (2) приводится к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\Big[\xi_0(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{a_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_1^* \xi_{1j}(t) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_2^* \xi_{2j}(t)\Big] = f_1(t), \\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2} v(t), \\ \dfrac{d\xi_{1j}(t)}{dt} = \dfrac{\sqrt{a_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_1 A_0^{1/2} v(t) - \beta_j \xi_{1j}(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \\ \dfrac{d\xi_{2j}(t)}{dt} = \dfrac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{\beta_j}} Q_2 A_0^{1/2} v(t) - \beta_j \xi_{2j}(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2} \varphi_0, \quad \xi_j(t)|_{t=0} = 0, \quad j = \overline{1, N},$$

где

$$f_1(t) = f(t) - \Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t} A + \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t} B\Big)\varphi_0.$$

Несложно видеть, что оценка (18) принимает вид

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leqslant d\Bigg[(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2) +$$

$$+\Bigg(\int_0^t \Bigg\|f(s) - \Bigg(\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j}e^{-\beta_j s}A + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j}e^{-\beta_j s}B\Bigg)\varphi_0\Bigg\|\,ds\Bigg)^2\Bigg].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем” (теоремы 1 и 2) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (теоремы 3 и 4) (проект 20-01-00288 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Munoz Rivera J.E.* Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity // Quart. Appl. Math. 1994. V. 52. P. 629–648.
4. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. V. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhauser; Basel, 2003. V. 146.
5. *Локшин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М., 1982.
6. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.
7. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
8. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. Минск, 1976.
9. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
10. *Miller R.K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 66. P. 313–332.
11. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
13. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces // J. of Math. Sci. 2019. V. 239. № 5. P. 771–787.
14. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 536–551.
15. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. Р. 1226–1244.
16. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
17. *Dafermos C.M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1970. V. 37. P. 297–308.
18. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
19. *Pata V.* Stability and exponential stability in linear viscoelasticity // Milan J. of Math. 2009. V. 77. P. 333–360.
20. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
21. *Tretter C.* Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London, 2008.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 26.04.2021 г.
После доработки 30.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.