ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 9, с. 1273–1279

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.73:534+519.642.7

ОБЪЁМНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ

© 2021 г. А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченков

Выводятся объёмные интегральные уравнения с запаздыванием по времени, описывающих нестационарные задачи рассеяния акустического поля на прозрачных трёхмерных структурах. Предлагается эффективный метод численного решения полученных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121090120

Введение. В работах [1, 2] рассматривались задачи взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с ограниченной материальной средой, окружённой свободным пространством. Используя объёмные сингулярные интегральные уравнения в частотной области [3] и свойства преобразования Фурье, для решения этих задач получены интегральные уравнения с запаздыванием по времени. В настоящей статье, применяя некоторые результаты работ [1, 2], рассматриваются нестационарные задачи рассеяния акустического поля на прозрачных трёхмерных структурах. Выводятся объёмные интегральные уравнения с запаздыванием по времени, которые описывают указанный класс задач. Предлагается эффективный метод численного решения полученных уравнений.

1. Исходное интегральное уравнение. Рассмотрим следующий класс задач нестационарной акустики. В ограниченной трёхмерной области Q, окружённой свободным пространством, материальная среда характеризуется индексом рефракции $n(x)$, $x \in Q$, а вне Q индекс рефракции равен единице. Требуется определить акустическое поле в пространстве $\mathbb{R}^3$, порождаемое внешним источником $f_0(x,t)$, локализованным в конечной области, причём $f_0(x,t) = 0$ при $t < 0$. В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти функцию акустического поля $U(x,t)$ в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\Delta U(x,t) - \frac{n(x)}{c^2}\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = f_0(x,t), \tag{1}$$

где c – скорость звука в свободном пространстве. К уравнению (1) необходимо добавить ещё условия, гарантирующие отсутствие волн, приходящих из бесконечности.

Для вывода нестационарных интегральных уравнений будем использовать прямое и обратное преобразования Фурье:

$$f(\omega) = F[f(t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt, \quad f(t) = F^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega. \tag{2}$$

В формулах (2) исходная функция $f(t)$ и её фурье-образ $f(\omega)$ различаются указанием аргументов t и ω соответственно.

Применяя преобразование Фурье к каждой части уравнения (1), получаем уравнение для фурье-образов поля

$$\Delta U(x,\omega) - \frac{n(x)\omega^2}{c^2}U(x,\omega) = f_0(x,\omega). \tag{3}$$

Фурье-образ $U(x,\omega)$ должен удовлетворять, кроме уравнения (3), ещё и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\left(\frac{\partial U}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}U\right)\right) = 0, \quad r = |x| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}. \tag{4}$$

Пусть $f(x,\omega)$ – финитная функция в $\mathbb{R}^3$ относительно x. Тогда интегральное представление

$$V(x,\omega) = -\int f(y,\omega)G(R,\omega)\,dy \tag{5}$$

удовлетворяет в $\mathbb{R}^3$ уравнению Гельмгольца

$$\Delta V + (\omega/c)^2 V = f \tag{6}$$

и условию излучения на бесконечности вида (4). В (5) $G(R,\omega)$ – функция Грина уравнения Гельмгольца, которая в декартовой системе координат имеет вид

$$G(R,\omega) = \exp(i\omega R/c)/(4\pi R), \quad R = |x-y|, \quad x = (x_1,x_2,x_3), \quad y = (y_1,y_2,y_3). \tag{7}$$

Запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\Delta U + (\omega/c)^2 U = f_0 - (\omega/c)^2(n-1)U. \tag{8}$$

Из соотношений (3)–(8) вытекает, что неизвестное поле $U(x,\omega)$ имеет следующее интегральное представление:

$$U(x,\omega) = -\int f_0(y,\omega)G(R,\omega)\,dy + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int\limits_Q (n(y)-1)U(y,\omega)G(R,\omega)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{9}$$

Первый интеграл в правой части равенства (9) описывает поле $U_0(x,\omega)$, создаваемое источником $f_0(x,\omega)$ в свободном пространстве. Далее, поскольку $n(x)=1$ вне Q, из равенства (9) следует, что неизвестное поле $U(x,\omega)$ удовлетворяет в области Q интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$U(x,\omega) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int\limits_Q (n(y)-1)U(y,\omega)G(R,\omega)\,dy = U_0(x,\omega), \quad x\in Q.$$

Зная поле $U(x,\omega)$ в области Q, несложно найти поле в любой точке пространства, используя равенство (9).

Имеют место следующие свойства Фурье-преобразований:

$$F^{-1}[-\omega^2 f(\omega)] = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \tag{10}$$

$$F^{-1}[f(\omega)g(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \quad F^{-1}[e^{i\omega\Delta}] = \delta(t-\Delta), \tag{11}$$

где δ – дельта-функция Дирака, а Δ – некоторая постоянная. Преобразование Фурье обобщённых функций определяется для класса $\mathcal{S}'$ так называемых обобщённых функций медленного роста – линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{S}$ основных функций, представляющем собой линейное подпространство пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, состоящее из функций, которые при $|x|\to\infty$ убывают вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$, с заданной в нём специальной сходимостью (см. [4, гл. II, § 8.1]). Именно, преобразованием Фурье обобщённой функции $f\in\mathcal{S}'$ называется [4, гл. II, § 9.2] обобщённая функция $F[f]$ такая, что $(F[f],\varphi) = (f,F[\varphi])$ для всех $\varphi\in\mathcal{S}$. Несложно убедиться [4, гл. II, § 9.2], что так определённое отображение F переводит $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$ и является линейным и непрерывным, а для обратного отображения F^{-1} очевидно равенство $(F^{-1}[f],\varphi) = (f,F^{-1}[\varphi])$ для всех $\varphi\in\mathcal{S}$.

В силу определений (2) равенство (10) очевидно. Покажем справедливость первого равенства в (11). Имеем

$$F\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)}g(t-\tau)d(t-\tau)\right)d\tau = f(\omega)g(\omega). \tag{12}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к первому и последнему членам в цепочке равенств (12), получаем первое равенство в (11). Доказательство второго равенства в (11) следует непосредственно из определения преобразования Фурье обобщённых функций и приведено, например, в [4, гл. II, § 9.2, пример].

Из представления (7) и второго равенства в (11) вытекает, что

$$F^{-1}[G(R,\omega)] = (4\pi R)^{-1}\delta(t-R/c). \tag{13}$$

В силу соотношений (10)–(13) получаем

$$F^{-1}[G(R,\omega)\omega^2 f(y,\omega)] = -(4\pi R)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-R/c)\frac{\partial^2 f(y,t-\tau)}{\partial t^2}\,d\tau\right) =$$

$$= -(4\pi R)^{-1}\frac{\partial^2 f(y,\tau)}{\partial\tau^2}, \quad \tau = t-R/c. \tag{14}$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (9) и используя равенство (14), приходим к следующему объёмному интегральному уравнению с запаздыванием по времени:

$$U(x,t) = U_0(x,t) - \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_Q \frac{1}{R}(n(y)-1)\frac{\partial^2 U(y,\tau)}{\partial\tau^2}\,dy,$$

$$R = |x-y|; \quad \tau = t-R/c; \quad U(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t<0. \tag{15}$$

Из уравнения (15) очевидно, что акустическое поле в $\mathbb{R}^3$ зависит только от значений поля в области неоднородности Q. Поэтому (15) можно рассматривать как интегральное уравнение в Q.

Из изложенного выше следует

Теорема. *Пусть индекс рефракции акустического поля равен $n(x)$ в ограниченной области $Q\subset\mathbb{R}^3$ и единице вне этой области. Тогда акустическое поле U, порождаемое внешним полем U_0, описывается объёмным интегральным уравнением (15), содержащим запаздывание по времени, зависящее от пространственных переменных.*

2. Метод решения. Будем использовать метод коллокации для численного решения уравнения (15). Для этого в прямоугольной декартовой системе координат в $\mathbb{R}^3$ введём конечное множество точек – сетку – так, чтобы область Q целиком находилась в прямоугольном параллелепипеде Π со сторонами $N_l h$, $l=1,2,3$, где h – шаг сетки по декартовым координатам. Тогда если $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ – вершина этого параллелепипеда с наименьшей суммой координат, то координаты каждого узла сетки имеют вид $x^0+(p_1h,p_2h,p_3h)$, где $p_l=\overline{0,N_l}$, $l=1,2,3$, т.е. вид x^0+hp, где $p=(p_1,p_2,p_3)$. Поэтому каждый узел однозначно определяется точкой $p=(p_1,p_2,p_3)$, $p_l=\overline{0,N_l}$, $l=1,2,3$, которую назовём *сеточными координатами* узла и будем писать $p\in Q$, если узел с сеточными координатами p лежит в области Q. Параллелепипед Π разбивается данной сеткой на ячейки (элементарные кубики) $\Pi(p)$, $p=(p_1,p_2,p_3)$,

$p_l = \overline{0, N_l - 1},$ где p – вершина кубика с наименьшей суммой сеточных координат. Определим область $\widetilde{Q}$ как объединение N_Q ячеек, центры которых лежат внутри области Q. Центр кубика $\Pi(p)$, содержащегося в области $\widetilde{Q}$, обозначим через $x(p)$. Узловые точки, в которых определяются значения акустического поля, будем задавать в центрах $x(p)$. Для дискретизации уравнения (15) по времени введём временну́ю сетку $t(0),\ t(1),\ t(2),\ \ldots$ с постоянным шагом δ, где $t_0 = 0$ – начало процесса. Будем обозначать через $V(p, t(n))$ значение функции в p-й пространственной узловой точке и во временно́й узловой точке $t(n) = n\delta,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ а через $V(q, \tau(n, p, q))$ – значение функции в q-й пространственной узловой точке и во временно́й точке

$$\tau(n, p, q) = n\delta - |x(p) - x(q)|/c. \tag{16}$$

Теперь уравнение (15) аппроксимируется следующей системой уравнений, имеющей размерность $\sim N_Q$:

$$U(p, t) = U_0(p, t) + B(0)\frac{\partial^2 P(p, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\sum_{\substack{q \in Q \\ q \neq p}} B(p - q)\frac{\partial^2 P(q, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad p \in Q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$P(q, \tau) = (n(q) - 1)U(q, \tau), \quad t = t(n), \quad \tau = \tau(n, p, q), \quad B(p - q) = -\int\limits_{\Pi(q)} \frac{1}{4\pi|x(p) - y|}\,dy. \tag{17}$$

Значения функции в суммах (17) должны, в связи с запаздыванием по времени, задаваться во временны́х точках, предшествующих $t(n)$. Это означает, что для всех τ, входящих в систему (17), должно выполняться условие $\tau \leqslant t(n - 1)$. Минимальное расстояние между узловыми точками равно h. Тогда из (16) следует, что между шагами сеток по пространству и по времени должно выполняться соотношение

$$h/c \geqslant \delta. \tag{18}$$

Условие (18) совпадает с критерием Куранта–Фридрихса, который является необходимым условием для устойчивости численного решения гиперболических уравнений, описывающих распространение волн.

Определим следующую связь между шагами сеток:

$$h = 2c\delta. \tag{19}$$

Коэффициент 2 обусловлен тем, чтобы при вычислении производных по разностным формулам не выходить за временны́е узловые точки, стоящие слева от $t(n)$. Из равенств (16), (19) вытекает, что для всех значений τ, входящих в (17), выполняется оценка

$$\tau(n, p, q) \leqslant (n - 2)\delta = t(n - 2), \quad q \neq p.$$

Конкретные значения шагов δ и h, которые связаны соотношением (19), зависят от специфики задачи и требуемой точности решения. Можно предложить следующий способ определения этих величин. Разложим источник поля $f_0(x, t)$, создающий внешнее поле $U_0(x, t)$, в интеграл Фурье по времени. В силу равенства Парсеваля, учитывая, что $f_0(x, t) = 0$ при $t < 0$, получаем

$$I_0 = \int\limits_V \int\limits_0^{+\infty} |f_0(x, t)|^2\,dt\,dx = \int\limits_V \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_0(x, \omega)|^2\,d\omega\,dx, \tag{20}$$

где V – область локализации источника поля. Определим полосу частот $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$, которая достаточно точно описывает поведение функции $f_0(x, t)$, следующей формулой:

$$1 - \frac{I(\omega_{\max})}{I_0} \ll 1, \quad I(\omega_{\max}) = \int\limits_V \int\limits_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} |f_0(x, \omega)|^2\,d\omega\,dx. \tag{21}$$

Из соотношений (20), (21) несложно найти $\omega_{\max}$. Период, соответствующий частоте $\omega_{\max}$, равен $T_{\min} = 2\pi/\omega_{\max}$. Теперь шаг сетки по времени можно задать формулой

$$\delta = C\pi/\omega_{\max}, \tag{22}$$

в которой постоянная C зависит от конкретной задачи и, в конечном счёте, определяется численными экспериментами. Для многих задач $C \approx 1$.

Теперь оценим второе слагаемое в правой части равенства (17). Для производной функции имеем

$$\left|\frac{\partial^2 \vec{P}(p,t)}{\partial t^2}\right| \approx \omega_{\max}^2 |\vec{P}(p,t)|. \tag{23}$$

Далее, пусть $\Omega(\rho)$ – шар радиуса $\rho = \sqrt{3}h/2$ с центром в точке $x = 0$. Очевидно включение $\Pi(0) \subset \Omega(\rho)$. Тогда, используя сферическую систему координат, получаем

$$|B(0)| = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Pi(0)} r\,dr\,dS < \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega(\rho)} r\,dr\,dS = \frac{3}{8}h^2. \tag{24}$$

Теперь из соотношений (19), (22)–(24) вытекает, что

$$\frac{|B(0)|}{c^2}\left|\frac{\partial^2 P(p,t)}{\partial t^2}\right| < \frac{3\pi^2 C^2}{2}|n(p) - 1||U(p,t)|. \tag{25}$$

Таким образом, если значения постоянной C в оценке (25) достаточно малы, в правой части равенства (17) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с $U(p,t)$ из левой части равенства. Конкретные значения C, при которых это допустимо, определяются численными экспериментами.

Для максимального расстояния D между пространственными узловыми точками в Q очевидно равенство

$$D = h \max|p - q|, \quad p, q \in Q. \tag{26}$$

Значит, максимальное время запаздывания между узловыми точками Q равно $T = D/c$. Тогда из (19) следует, что максимальное число узловых точек по времени, в которых необходимо вычислять функции, входящие в правую часть системы (17), определяется формулой

$$M = [T/\delta] + 1 = [2\max|p - q|] + 1, \quad p, q \in Q, \tag{27}$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Теперь рассмотрим аппроксимацию производных функции по времени. Пусть задана дважды дифференцируемая функция $P(t)$ и известны её значения в узловых точках $t(m) = m\delta$, где m – целые числа. Тогда значение производной функции в точке t, находящейся внутри отрезка $[t(m-1), t(m+1)]$, определяется разностной формулой

$$\frac{d^2 P(t)}{dt^2} \approx \frac{P(m-1) - 2P(m) + P(m+1)}{\delta^2}. \tag{28}$$

В качестве центральной точки m целесообразно брать такую узловую точку, которая наиболее близка к t. Отметим, что формула (28) даёт точное значение производной для любых квадратичных функций $P(t)$. Можно также использовать более точные формулы для аппроксимации, в которые будут входить значения $P(m-2)$, $P(m-1)$, $P(m)$, $P(m+1)$, $P(m+2)$. Однако в этом случае шаг по времени должен быть меньше и равняться $\delta = h/(3c)$.

Используя формулу (28), значение производных $P(t)$ в точке τ можно приближённо представить в виде

$$\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} \approx \frac{1}{\delta^2}\sum_{j=-1}^{1} \beta_j P(m(\tau) + j), \quad m(\tau/\delta) = \begin{cases} [\tau/\delta], & \text{если } \ \tau/\delta \leqslant [\tau/\delta] + 1/2, \\ [\tau/\delta] + 1, & \text{если } \ \tau/\delta > [\tau/\delta] + 1/2, \end{cases} \tag{29}$$

где вид β_j очевиден из (28).

Определим безразмерную переменную z формулой $y = y(q) + zh$. Тогда, учитывая, что $x(p) - y(p) = (p - q)h$, из (17) получаем

$$B(p-q) = -h^2 \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dz_1\, dz_2\, dz_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(p_j - q_j - z_j)^2}} = h^2 B^0(p-q). \tag{30}$$

Функция $B^0(p-q)$ является безразмерной. Если $|p-q| \gg 1$, то можно использовать приближённую формулу $B^0(p-q) \approx -1/(4\pi|p-q|)$.

Из равенств (16), (19) следует, что $\tau(n,p,q) = (n - 2|p-q|)\delta$. Далее, используя представления (29), (30) для выражений, входящих в сумму (17), получаем

$$B(p-q)\frac{\partial^2 \vec{P}(q,\tau)}{\partial \tau^2} \approx 4B^0(p-q)\sum_{j=-1}^{1} \beta_j P(q, n-m+j), \quad m = m(2|p-q|). \tag{31}$$

Вид функции $m = m(2|p-q|)$ вытекает из (29).

Из (17), (31) следует, что последовательные по времени значения поля в узловых точках области Q могут быть представлены следующей формулой:

$$U(p,n) = U_0(p,n) + \sum_{l=1}^{M}\sum_{q\in Q} B(p-q,l)P(q,n-l),$$

$$P(q,n-l) = (n(q)-1)U(q,n-l), \quad q \in Q, \quad n = 1,2,\ldots \tag{32}$$

Функции $B(p-q,l)$ определяются из приведённых выше выражений, а значение M – формулой (27). Очевидно, что $B(0,l) = 0$. Из (31) следует, что при фиксированных p, q функция $B(p-q,l)$ имеет только три ненулевых значения по l.

Основные вычислительные затраты в формуле (32) связаны с вычислением сумм. Обозначим

$$W(p,n) = \sum_{l=1}^{M}\sum_{q\in Q} B(p-q,l)P(q,n-l). \tag{33}$$

Для вычисления суммы (33) применим технику на основе быстрого дискретного преобразования Фурье [5, с. 93; 6]. Введём параллелепипед Π_2 со сторонами $2N_1h$, $2N_2h$, $2N_3h$. Доопределим функции $B(p_1,p_2,p_3,l)$ нулями в тех узловых точках параллелепипеда Π_2, в которых они не определены, и продолжим затем эти функции на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3 периодически с периодами $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$ соответственно. Продолжим функции $P(p,n-l)$ на все узловые точки $p \in \Pi_2$, полагая их равными нулю в узловых точках, не принадлежащих области Q. Рассмотрим функцию

$$W(p,n) = \sum_{l=1}^{M}\sum_{q\in \Pi_2} B(p-q,l)P(q,n-l). \tag{34}$$

Учитывая изложенное, очевидно, что при $p \in Q$ значение $W(p_1,p_2,p_3,n)$ из (34) совпадает со значением $W(p_1,p_2,p_3,n)$ из (33). Теперь, применяя дискретное преобразование Фурье по каждой пространственной переменной к обеим частям равенства (34), будем иметь

$$W^k(k,n) = \sum_{l=1}^{M} B^F(k,l)P^F(k,n-l), \quad k \in \Pi_2. \tag{35}$$

Зная функцию (35), для того чтобы вычислить $W(p,n)$ необходимо выполнить обратное дискретное преобразование Фурье.

Оценим требуемое количество арифметических операций и объём памяти для хранения массивов, которые необходимы для выполнения одного временно́го шага, определяемого выражением (32). Массивы $B(p,l)$ и $B^F(k,l)$ вычисляются один раз до начала выполнения алгоритма решения. После вычисления необходимо сохранять в памяти компьютера массив чисел M_B объёма

$$|M_B| \approx 8MN_1, N_2, N_3, \quad M = [2\max|p-q|] + 1, \quad p,q \in Q. \tag{36}$$

Из (35) следует, что также необходимо хранить массив комплексных чисел M_P объёма

$$|M_P| \approx 8MN_1, N_2, N_3. \tag{37}$$

При вычислении акустического поля для очередного временно́го шага требуется, согласно (34) и (35), выполнить дискретное преобразование Фурье только для функции $P(p, n-1)$ в параллелепипеде Π_2, поскольку преобразования Фурье функций в предыдущие моменты времени известны. Таким образом, число T_t арифметических операций, требуемое для выполнения одного временно́го шага, оценивается формулами

$$T_t \approx 2T_{FF} + T_S, \quad T_S = 10MN_1N_2N_3,$$

$$T_{FF} \approx 10N_1N_2N_3(\mathrm{LOG}\,(N_1) + \mathrm{LOG}\,(N_2) + \mathrm{LOG}\,(N_3)). \tag{38}$$

В выражении (38) через $\mathrm{LOG}\,(N)$ обозначен целочисленный логарифм, т.е. сумма всех простых делителей числа N.

Обозначим $N = N_1N_2N_3$. Тогда из (36)–(38) следует, что объём требуемой памяти и число арифметических операций, необходимое для выполнения одного временно́го шага, практически пропорциональны $MN \approx N^{4/3}$.

Важной характеристикой алгоритма является количество временны́х шагов, которое нужно выполнить для получения полного решения поставленной задачи. Если внешнее поле ограничено во времени, то критерием остановки алгоритма может быть следующий: значения акустического поля в области Q близки к нулю.

Заключение. Рассмотренные в работе методы могут быть использованы для решения многих важных классов задач нестационарной акустики. Отметим, что описанный выше метод решения с соответствующими изменениями может быть применён и к нестационарным интегральным уравнениям, описывающим линейные материальные среды с временно́й и пространственной дисперсией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения для нестационарных задач электродинамики в материальных средах // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С. 1288–1290.
2. *Самохин А.Б., Самохина А.С., Кобаяси К.* Численные методы решения нестационарного объёмного сингулярного интегрального уравнения электродинамики // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1293–1300.
3. *Самохин А.Б.* Объемные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1215–1230.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1988.
5. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М., 1987.
6. *Сигов А.С., Андрианова Е.Г., Жуков Д.О., Зыков С.В., Тарасов И.Е.* Квантовая информатика: обзор основных достижений // Рос. технол. журн. 2019. Т. 7. № 1. С. 5–37.

Российский технологический университет (МИРЭА),
г. Москва,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 25.03.2021 г.
После доработки 25.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.