

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

© 2021 г. А. В. Сету́ха

Рассматривается вопрос о разрешимости одного гиперсингулярного интегрального уравнения на гладкой поверхности с краем в предположении, что на ней существуют глобальные изотермические координаты. Интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару, решение ищется в классе функций, непрерывных по Гёльдеру, обращающихся в нуль на краю поверхности и имеющих в некоторой окрестности каждой точки, не лежащей на краю поверхности, поверхностный градиент, непрерывный по Гёльдеру в этой окрестности. Для этого уравнения доказано выполнение альтернативы Фредгольма. Показано также, что полученные результаты применимы к граничному интегральному уравнению, возникающему в краевой задаче для уравнения Гельмгольца в области вне указанной поверхности с условием Неймана на этой поверхности.

DOI: 10.31857/S0374064121090132

Введение. Уравнения с сильно сингулярными интегралами возникают в различных приложениях. В частности к уравнениям такого типа сводятся краевые задачи Неймана для уравнений Лапласа и Гельмгольца на экране, если искать их решения в виде потенциала двойного слоя. Известен подход, при котором сильно сингулярное интегральное уравнение рассматривается как псевдодифференциальное [1; 2; 3, с. 125–161]. Этот подход позволяет исследовать разрешимость указанных уравнений в пространствах обобщённых функций.

Однако представляет интерес и вопрос о существовании их решений в пространствах “гладких” функций. В частности, это важно при построении численных методов решения таких уравнений. Так, существует подход к численному решению сильно сингулярных уравнений, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции и методе коллокаций. В вычислительной аэродинамике для решения задач о потенциальном обтекании тел используется метод вихревых рамок [4; 5, с. 462–476]. Как показано в [5, с. 474], в основе этого метода лежит решение некоторого граничного интегрального уравнения с сильной особенностью, интеграл в котором понимается в смысле конечного значения по Адамару. В [3, с. 139, 148, 351] получены результаты по разрешимости этого уравнения, возникающего при решении краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа, и сходимости численного метода вихревых рамок, но основу рассуждений составлял в конечном счёте опять-таки переход к концепции псевдо-дифференциального уравнения.

Другой подход развит автором в работах [6–8], в которых для гиперсингулярного интегрального уравнения, возникающего в краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа вне плоского экрана, доказана его разрешимость в классе гладких функций. Информация о свойствах такого решения используется, в частности, при обосновании равномерной сходимости на сетке численного метода кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций [3, с. 386].

В работах [9, 10] рассмотрен вопрос о существовании гладких решений у двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения на выпуклой ограниченной области с кусочно-гладкой границей с интегралом, понимаемым в смысле конечного значения по Адамару, более общего вида: рассмотрен случай как уравнения первого, так и второго рода (с неизвестной функцией вне интеграла); кроме члена с главной особенностью это уравнение содержит также интегральные операторы как с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения, так и с обычными интегралами. Решение рассматривалось в классе функций, непрерывных по Гёльдеру на всей области и имеющих частные производные первого порядка, непрерывные по Гёльдеру в окрестности каждой точки области. Для этого уравнения было доказано выполнение

альтернативы Фредгольма. В частности, полученные результаты применимы к интегральному уравнению, которое возникает в краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца на плоском экране.

В настоящей статье рассматривается вопрос о разрешимости аналогичного гиперсингулярного интегрального уравнения на гладкой поверхности с краем. Основной результат работы состоит в том, что для случая, когда на поверхности можно ввести изотермические координаты [11, с. 109], уравнение с сильной особенностью сводится к рассмотренному в статье [10] двумерному гиперсингулярному уравнению по области параметризации. Благодаря этому удалось построить класс функций, в котором для данного уравнения выполнена альтернатива Фредгольма. В статье также показано, что полученные результаты применимы к граничному интегральному уравнению, возникающему в краевой задаче для уравнения Гельмгольца в области вне указанной поверхности с условием Неймана на этой поверхности.

1. Основные формулировки. Пусть Σ – гладкая разомкнутая поверхность с краем в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически: поверхность Σ есть множество точек $x = \varphi(u)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2) \in D$, где D – замыкание некоторой выпуклой ограниченной области на плоскости $\mathbb{R}^2$, границей которой является замкнутая кусочно-гладкая кривая класса C^2 , φ – диффеоморфизм, отображающий множество D на множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, класса C^4 . Тогда первая квадратичная форма поверхности определяется метрическим тензором g_{ij} , $i, j = 1, 2$:

$$ds^2 = g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2, \quad g_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right).$$

Криволинейные координаты называются *изотермическими*, если первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = \rho^2(u)(du_1^2 + du_2^2).$$

Это означает, что

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) = \rho^2, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) = 0. \quad (1)$$

При этом функция $\rho^2(u)$ строго положительна. Будем считать, что $\rho(u) > 0$. Тогда, так как множество D – компакт, найдутся положительные константы θ_1 и θ_2 такие, что

$$\theta_1 < \rho(u) < \theta_2. \quad (2)$$

Заметим, что изотермические координаты можно ввести в окрестности произвольной точки любой гладкой поверхности [11, с. 109]. В статье рассматривается случай, когда изотермические координаты заданы на всей поверхности.

На поверхности Σ рассматривается интегральное уравнение относительно неизвестной функции g :

$$a(x)g(x) + \int_{\Sigma} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y + \int_{\Sigma} B_1(x, y)g(y) d\sigma_y + \int_{\Sigma} B_2(x, y)g(y) d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma, \quad (3)$$

здесь $\partial\Sigma$ – край поверхности Σ , первый интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару, второй интеграл – в смысле главного значения, функция $a(x)$ непрерывна по Гёльдеру на поверхности Σ , функция $B_1(x, y)$ имеет вид

$$B_1(x, y) = \sum_{i=1}^I \tilde{b}_i(u) \tilde{B}_{1i}(v-u) \quad \text{при} \quad x = \varphi(u), \quad y = \varphi(v), \quad u, v \in D, \quad (4)$$

где I – некоторое натуральное число и функции $\tilde{B}_{1i}(u)$, $i = \overline{1, I}$, определены, непрерывно дифференцируемы при $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$, и удовлетворяют условиям

$$|\tilde{B}_{1i}(u)| \leq \frac{C_1}{|u|^2}, \quad |\nabla \tilde{B}_{1i}(u)| \leq \frac{C_2}{|u|^3}, \quad \int_{r_1 \leq |u| \leq r_2} \tilde{B}_{1i}(u) du = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 < r_1 < r_2, \quad (5)$$

а функции $\tilde{b}_i$, $i = \overline{1, I}$, непрерывны по Гёльдеру на множестве D , функция $B_2(x, y)$ такова, что функция $\tilde{B}_2(u, v) = B_2(\varphi(u), \varphi(v))$ представляется в виде

$$\tilde{B}_2(u, v) = \frac{\tilde{B}_2^*(u, v)}{|u - v|^\beta}, \quad \beta < 2, \quad \text{при } u, v \in D, \quad (6)$$

где функция $\tilde{B}_2^*(u, v)$ непрерывна по Гёльдеру по совокупности переменных на множестве $D \times D$.

Рассматривается случай, когда правая часть $f(x)$ уравнения непрерывна по Гёльдеру на поверхности Σ .

Все известные функции $a(x)$, $B_1(x, y)$, $B_2(x, y)$, $f(x)$ и искомая функция $g(x)$ предполагаются, вообще говоря, комплекснозначными. Класс функций, в котором ищется решение, зададим ниже.

Напомним определения интегралов в смысле конечного значения по Адамару и в смысле главного значения. Пусть $h(y)$ – функция на поверхности Σ , имеющая особенность в точке $x \in \Sigma$.

Интеграл от функции h по поверхности Σ существует в смысле *конечного значения по Адамару*, если существуют константы A и $\alpha \geq 0$, с которыми существует предел, принимаемый за значение интеграла,

$$\int_{\Sigma} h(y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} h(y) d\sigma_y - \frac{A}{\varepsilon^\alpha} \right\},$$

где $U(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| < \varepsilon\}$ – трёхмерный открытый шар с центром в точке x радиуса ε .

При этом легко показать, что если указанный предел существует с некоторыми константами $\alpha > 0$ и A , то константы α и A определены однозначно. Если предел существует при $\alpha = 0$, следует положить и $A = 0$ – тогда данное определение приводит к интегралу в смысле главного значения: интеграл от функции h по поверхности Σ существует в смысле *главного значения*, если существует предел, принимаемый за значение интеграла,

$$\int_{\Sigma} h(y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} h(y) d\sigma_y.$$

Отметим, что если интеграл от функции h существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения, а если интеграл существует в смысле главного значения, то он существует и в смысле конечного значения по Адамару (с $\alpha = 0$ и $A = 0$).

2. Основные определения и обозначения. Будем обозначать через $H^\mu[G]$, где $\mu \in (0, 1]$ и G – некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, линейное пространство действительных функций $f(x)$, определённых на множестве G , для которых ограничено следующее выражение, определяющее норму:

$$\|f\|_{\mu, G} = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu}.$$

В случае, когда G является областью или замыканием области в пространстве $\mathbb{R}^n$, обозначим через $H^{1, \mu}[G]$, $\mu \in (0, 1]$, линейное пространство действительных функций $f(x)$, определённых на множестве G , для которых ограничено следующее выражение, определяющее норму:

$$\|f\|_{1, \mu, G} = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{\mu, G}.$$

Теперь рассмотрим действительнoзначные функции, заданные на рассматриваемого вида поверхности Σ . Пространство $H^\mu[\Sigma]$, $\mu \in (0, 1]$, определено выше. Пусть $H^{1,\mu}[\Sigma]$, $\mu \in (0, 1]$, – линейное пространство действительнoзначных функций $f(x)$, заданных на поверхности Σ , для которых ограничено следующее выражение, определяющее норму:

$$\|f\|_{1,\mu,\Sigma} = \sup_{x \in \Sigma} |f(x)| + \sup_{x \in \Sigma} |\text{Grad } f(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \Sigma \\ x \neq y}} \frac{|\text{Grad } f(x) - \text{Grad } f(y)|}{|x - y|^\mu},$$

где $\text{Grad } f(x)$ – поверхностный градиент функции f . Мы введём поверхностный градиент Grad с помощью понятия дифференцируемости функции на поверхности. Функция f на поверхности Σ дифференцируема в точке $x \in \Sigma$, если существует вектор $\vec{A}$ такой, что в окрестности этой точки значения $f(y)$, $y \in \Sigma$, представляются в виде

$$f(y) = f(x) + (\vec{A}, y - x) + \alpha(x, y), \quad \text{где} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{\alpha(x, y)}{|x - y|} = 0.$$

При этом вектор $\vec{A}$ определён с точностью до слагаемого вида $\lambda \vec{n}(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, а $\vec{n}(x)$ – единичный нормальный вектор к поверхности Σ в точке x , и если последнее представление существует, то вектор $\vec{A}$ можно однозначно выбрать при условии $(\vec{A}, \vec{n}(x)) = 0$. Такой вектор $\vec{A}$ будем называть *поверхностным градиентом* функции f в точке x и обозначать через $\text{Grad } f(x)$.

Обозначим также через $H^\mu_{\mathbb{C}}[G]$, где G – множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, через $H^{1,\mu}_{\mathbb{C}}[G]$, здесь G – область или замыкание области в пространстве $\mathbb{R}^n$, и через $H^{1,\mu}_{\mathbb{C}}[\Sigma]$, где Σ – поверхность рассматриваемого вида, $\mu \in (0, 1]$, линейные пространства заданных на соответствующих множествах комплекснозначных функций $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, где f_1 и f_2 – действительнoзначные функции, принадлежащие пространствам $H^\mu[G]$, $H^{1,\mu}[G]$ и $H^{1,\mu}[\Sigma]$ соответственно, а норма определяется равенством $\|f\| = \|f_1\| + \|f_2\|$, нормы функций f_1 и f_2 берутся в соответствующих пространствах.

Через $A(\mu, \Sigma)$ обозначим линейное пространство действительнoзначных функций f , удовлетворяющих включению $f \in H^\mu[\Sigma]$ и при $x \in \partial\Sigma$ равенству $f(x) = 0$, таких, что на любом участке Σ' поверхности Σ , состоящем из точек вида $x = \varphi(u)$, $u \in D'$, где D' – замыкание некоторого открытого подмножества множества D , для которого $D' \subset \text{int } D$, выполняется включение $f \in H^{1,\mu}[\Sigma]$, где int – внутренность множества.

Множество комплекснозначных функций $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $x \in \Sigma$, $f_1, f_2 \in A(\mu, \Sigma)$ обозначим через $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$.

Решение уравнения (3) будем искать в классе функций $g \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$. При этом мы докажем, что для любой функции $g \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ левая часть уравнения (3) определена во всех точках $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$.

3. О свойствах расстояний на поверхности. Функции на поверхности. Сначала установим связь между расстоянием между точками на поверхности и расстоянием между соответствующими точками на множестве параметров. Пусть $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$ – точки на поверхности Σ , $u, v \in D$. Тогда

$$y - x = \int_0^1 \frac{d\varphi(u + t(v - u))}{dt} dt.$$

Значит, разность $y - x$ можно представить в виде

$$y - x = \tilde{H}_1(u, v)(u_1 - v_1) + \tilde{H}_2(u, v)(u_2 - v_2), \quad \tilde{H}_i(u, v) = \int_0^1 \varphi''_i(u + t(v - u)) dt, \quad i = 1, 2,$$

где через $\varphi''_i \equiv \varphi''_i(u)$, $i = 1, 2$, обозначена частная производная $\partial\varphi/\partial u_i$ в точке $u = (u_1, u_2)$. При этом $\tilde{H}_i(u, v) \in C^3[D \times D]$.

Далее, каждую из функций $\tilde{H}_i(u, v)$ можно представить в виде

$$\tilde{H}_i(u, v) = H_i(u) + \sum_{j=1}^2 \tilde{H}_{ij}(u, v)(v_j - u_j),$$

где

$$H_i(u) = \tilde{H}_i(u, u) = \varphi''_i(u), \quad \tilde{H}_{ij}(u, v) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{H}_i(u, w)}{\partial w_i} \Big|_{w=u+t(v-u)} dt, \quad \tilde{H}_{ij}(u, v) \in C^2[D \times D].$$

Аналогичным образом, обозначив $H_{ij}(u) = \tilde{H}_{ij}(u, u)$, функции $\tilde{H}_{ij}(u, v)$ можно представить в виде

$$\tilde{H}_{ij}(u, v) = H_{ij}(u) + \sum_{k=1}^2 \tilde{H}_{ijk}(u, v)(v_k - u_k), \quad H_{ij} \in C^2[D], \quad \tilde{H}_{ijk} \in C^1[D \times D].$$

Тогда

$$y - x = \sum_{k=1}^2 \varphi''_i(u)(v_i - u_i) + \sum_{i,j=1}^2 H_{ij}(u)(v_i - u_i)(v_j - u_j) + \sum_{i,j,k=1}^2 \tilde{H}_{ijk}(u, v)(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k).$$

Теперь в силу равенств (1) получаем

$$|y - x|^2 = \rho^2(u)(u - v)^2 + W(u, v), \quad (7)$$

где

$$W(u, v) = W_0(u, v) + W^*(u, v), \quad W_0(u, v) = \sum_{i,j,k=1}^2 W_{ijk}(u)(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k), \quad (8)$$

$W_{ijk}(u)$ – некоторые функции класса $C^2[D]$, $W^*(u, v)$ – некоторая функция класса $C^1[D \times D]$, удовлетворяющая условиям

$$|W^*(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^4, \quad \left| \frac{\partial W^*(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^3, \quad \left| \frac{\partial W^*(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^3, \quad (9)$$

здесь и далее через C_φ обозначены константы, определяемые только функцией φ , причём в разных оценках значение константы C_φ может быть различным. При этом функция $W(u, v)$ подчинена оценкам

$$|W(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^3, \quad \left| \frac{\partial W(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial W(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|^2. \quad (10)$$

Из равенства (7) и оценок (2) и (10) следует, что выполнены следующие неравенства с некоторой константой C_φ :

$$|x - y| \leq C_\varphi |u - v|, \quad |u - v| \leq C_\varphi |x - y|. \quad (11)$$

Далее, получим более точную оценку для расстояния $|x - y|$. Справедливо представление

$$|y - x| = \rho(u)|u - v| + d(u, v), \quad (12)$$

где

$$d(u, v) = |y - x| - \rho(u)|u - v| = \frac{W(u, v)}{|y - x| + \rho(u)|u - v|}. \quad (13)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial|y - x|}{\partial u_i} = \frac{1}{2|y - x|} \frac{\partial(y - x)^2}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial|y - x|}{\partial v_i} = \frac{1}{2|y - x|} \frac{\partial(y - x)^2}{\partial v_i},$$

откуда, используя равенство (7) и оценки (10), получаем

$$\frac{\partial|y - x|}{\partial u_i} \leq C_\varphi, \quad \frac{\partial|y - x|}{\partial v_i} \leq C_\varphi.$$

Тогда из равенства (13) и оценок (10) вытекает, что

$$|d(u, v)| \leq C_\varphi|u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial d(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|, \quad \left| \frac{\partial d(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|. \quad (14)$$

Функцию $d(u, v)$ можно представить в виде

$$d(u, v) = d_0(u, v) + d^*(u, v), \quad (15)$$

где

$$d_0(u, v) = \frac{W_0(u, v)}{2\rho(u)|u - v|}, \quad (16)$$

функция $W_0(u, v)$ задана в (8),

$$d^* = d - d_0 = W \left\{ \frac{1}{|x - y| + \rho|u - v|} - \frac{1}{2\rho|u - v|} \right\} + \frac{W^*}{|x - y| + \rho|u - v|}.$$

Используя равенство (12) и оценки (9) и (10), получаем

$$|d^*(u, v)| \leq C_\varphi|u - v|^3, \quad \left| \frac{\partial d^*(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial d^*(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi|u - v|^2. \quad (17)$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция на поверхности Σ и пусть $\tilde{f}(u) = f(x)$ при $x = \varphi(u)$. Из оценок (11) следует, что условия $f \in H^\mu[\Sigma]$ и $\tilde{f} \in H^\mu[D]$, $\mu \in (0, 1]$, равносильны.

Пусть теперь функция $f(x)$ дифференцируема. Тогда

$$df = (\text{Grad } f, dx) = d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} du_2.$$

Векторы $\text{Grad } f$ и dx как векторы, лежащие в касательной плоскости к поверхности, можно представить в виде

$$\text{Grad } f = f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} du_2,$$

где f_1 и f_2 – некоторые коэффициенты. Учитывая равенства (1), можем записать

$$(\text{Grad } f, dx) = \rho^2(f_1 du_1 + f_2 du_2),$$

откуда следует, что $f_i = (\partial \tilde{f} / \partial u_i) / \rho$. Таким образом,

$$\text{Grad } f = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right).$$

Тогда условия $f \in H^{1,\mu}[\Sigma]$ и $\tilde{f} \in H^{1,\mu}[D]$, $\mu \in (0, 1]$, также равносильны.

4. Сингулярные и гиперсингулярные интегралы на поверхности. Сначала рассмотрим интегралы на плоскости. Пусть D – рассматриваемое множество на плоскости параметризации, $\tilde{B}_1(u)$ – функция, определённая при $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$, удовлетворяющая условиям (5), $g \in H^\mu(D)$, $\mu \in (0, 1]$. Тогда в каждой точке $u \in D \setminus \partial D$ интеграл

$$\int_D \tilde{B}_1(v-u)g(y) dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \tilde{B}_1(v-u)g(y) dv$$

существует в смысле главного значения [12, с. 52], здесь $U(u, \varepsilon)$ – двумерный открытый шар с центром в точке u радиуса ε .

Далее, пусть $\tilde{g} \in H^{1, \mu}[D]$. Тогда в каждой точке $u \in D \setminus \partial D$ существует интеграл, понимаемый в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_D \frac{\tilde{g}(v)}{|u-v|^3} dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{\tilde{g}(v)}{|u-v|^3} dv - \frac{A}{\varepsilon^\alpha} \right\}. \quad (18)$$

Здесь так же, как и в случае поверхностного интеграла, мы считаем, что интеграл существует, если существует указанный предел с некоторыми A и $\alpha \geq 0$, причём $A = 0$, если предел существует при $\alpha = 0$.

Действительно, представим данный интеграл в виде

$$\int_D \frac{\tilde{g}(v)}{|u-v|^3} dv = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \tilde{g}(u) \int_D \frac{1}{|u-v|^3} dv, \quad I_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{g}(u)}{\partial u_i} \int_D \frac{v_i - u_i}{|u-v|^3} dv, \\ I_3 = \int_D \frac{\tilde{g}(v) - \tilde{g}(u) - (\text{grad } \tilde{g}(u), v-u)}{|u-v|^3} dv.$$

При этом интеграл I_3 сходится как несобственный (подынтегральная функция не превосходит по модулю величины $O(|u-v|^{-1})$), а интегралы, входящие в сумму I_2 , сходятся в смысле главного значения.

Рассмотрим интеграл I_1 . Существует открытый круг $U(u, R)$ с центром в точке u радиуса R , содержащийся во множестве D . Тогда для любого $\varepsilon \in (0, R)$ можем записать

$$\tilde{g}(u) \int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{1}{|u-v|^3} dv = I_{11}(R) + I_{12}(R, \varepsilon), \\ I_{11}(R) = \int_{D \setminus U(u, R)} \frac{\tilde{g}(u)}{|u-v|^3} dv, \quad I_{12}(R, \varepsilon) = \int_{U(u, R) \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{\tilde{g}(u)}{|u-v|^3} dv.$$

Переходя к полярным координатам с центром в точке u , получаем

$$I_{12}(R, \varepsilon) = \tilde{g}(u) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^R \frac{dr}{r^2} = 2\pi \tilde{g}(u) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R} \right).$$

Но тогда интеграл I_1 существует как предел

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{D \setminus U(u, \varepsilon)} \frac{\tilde{g}(u)}{|u-v|^3} dv - \frac{2\pi \tilde{g}(u)}{\varepsilon} \right).$$

Значит, интеграл, определяемый выражением (18), существует.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании сингулярных и гиперсингулярных интегралов на поверхности Σ и их преобразовании к интегралам по параметрам.

Сразу заметим, что если g – непрерывная функция на поверхности Σ , то

$$\int_{\Sigma} g(x) d\sigma_x = \int_D g(\varphi(v)) J(v) dv, \quad J(v) = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right| = \rho^2(v).$$

Лемма 1. Пусть $g \in H^\mu[\Sigma]$, функция $B_1(x, y)$ представляется в виде $B_1(x, y) = \tilde{B}_1(v - u)$ при $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$ и функция $\tilde{B}_1$ удовлетворяет условиям (5). Тогда при $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ существует интеграл

$$\int_{\Sigma} B_1(x, y) g(y) d\sigma_y = \int_D \tilde{B}_1(u - v) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv,$$

понимаемый в смысле главного значения, где $\tilde{g}(v) = g(\varphi(v))$.

Доказательство. Построим шар $U(x, \varepsilon)$ с центром в рассматриваемой точке $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ радиуса $\varepsilon > 0$, и пусть $x = \varphi(u)$, $u \in D \setminus \partial D$. Тогда

$$\int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} B_1(x, y) g(y) d\sigma_y = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(v) - \varphi(u)| \geq \varepsilon}} \tilde{B}_1(v - u) g(\varphi(v)) \rho^2(v) dv = I_1 + I_2 - I_3,$$

где

$$I_i = \int_{D_i(\varepsilon)} \tilde{B}_1(v - u) g(\varphi(v)) \rho^2(v) dv, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$D_1 = \{v \in D : \rho(u)|v - u| \geq \varepsilon\}, \quad D_2(\varepsilon) = \{v \in D : \rho(u)|v - u| < \varepsilon, \quad |\varphi(v) - \varphi(u)| \geq \varepsilon\},$$

$$D_3(\varepsilon) = \{v \in D : \rho(u)|v - u| \geq \varepsilon, \quad |\varphi(v) - \varphi(u)| < \varepsilon\}.$$

В силу представления (12) и оценки (14) получаем, что если $v \in D_2 \cup D_3$, то

$$\varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2 \leq \rho(u)|v - u| \leq \varepsilon + C_\varphi \varepsilon^2$$

и при этом $|x - y| \geq \rho(u)|v - u| - C_\varphi \varepsilon^2$. Если ε достаточно мало, то $\varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2 > 0$ и $|x - y| \geq \varepsilon/2$. Пусть $N = \max_{x \in \Sigma} |g(x)|$. Тогда

$$|I_2 - I_3| \leq C_\varphi C_1 N \int_{\varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2 \leq |u - v| \leq \varepsilon - C_\varphi \varepsilon^2} \frac{dv}{\varepsilon^2} \leq C_\varphi C_1 N \varepsilon,$$

где C_1 – константа из условий (5), и, значит, $I_2 - I_3 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$\int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} B_1(x, y) g(y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \int_D \tilde{B}_1(u - v) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $g \in H^{1, \mu}[\Sigma]$. Тогда при $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ существует интеграл

$$I(x) = \int_{\Sigma} \frac{g(y)}{|x - y|^3} d\sigma_y, \quad (19)$$

понимаемый в смысле конечного значения по Адамару. Именно,

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} \frac{g(y)}{|x - y|^3} d\sigma_y - \frac{2\pi g(x)}{\varepsilon} \right\}, \quad (20)$$

и этот интеграл сводится к интегралу по параметрам, также понимаемому в смысле конечного значения по Адамару:

$$I(x) = \int_D \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|\varphi(v) - \varphi(u)|^3} dv = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{D \setminus U(x, \delta)} \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|\varphi(v) - \varphi(u)|^3} dv - \frac{2\pi\tilde{g}(x)}{\delta} \right\}, \quad (21)$$

где $\tilde{g}(v) = g(\varphi(v))$. Кроме того, интеграл $I(x)$ можно представить в виде

$$I(x) = \frac{1}{\rho^3(u)} \int_D \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|v - u|^3} dv + \sum_{i,j,k=1}^2 \alpha_{ijk}(u) \int_D A_{ijk}(v - u) \tilde{g}(v)\rho^2(v) dv + \int_D A_2(u, v) \tilde{g}(v)\rho^2(v) dv, \quad (22)$$

где $\alpha_{ijk} \in C^1[D]$, $A_{ijk}(v - u)$ – функции вида (5), $A_2(u, v)$ – ядро вида (6), первый интеграл сходится в смысле конечного значения по Адамару, интегралы, стоящие под знаком суммы, сходятся в смысле главного значения, последний интеграл сходится как несобственный.

Доказательство. Пусть $x = \varphi(u) \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. При каждом $\varepsilon > 0$ рассмотрим интеграл

$$I(x, \varepsilon) = \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} \frac{g(y)}{|x - y|^3} d\sigma_y = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{\tilde{g}(v)\rho^2(v)}{|\varphi(u) - \varphi(v)|^3} d\sigma_v.$$

Пусть $v \in D$, $y = \varphi(v)$. Используя равенство (12) и обозначая $a = \rho(u)|u - v|$, $d = d(u, v)$, можем записать $|x - y| = a + d$. При этом в силу оценки (14) найдётся $r_0 > 0$, не зависящее от u и v , такое, что при $|u - v| < r_0$ выполнено неравенство $|d| \leq a/2$. Пусть $f(a) = a^{-3}$. Запишем для функции f формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(a + d) = f(a) + f'(a)d + f''(a + \theta d)d^2, \quad \text{где } \theta \in (0, 1).$$

Представляя второе слагаемое в виде $f'(a)d = f'(a)(d_0 + d^*)$, получаем

$$\frac{1}{|x - y|^3} = f(a) + f'(a)d_0 + (f'(a)d^* + f''(a + \theta d)d^2) = A_0(u, v) + A_1(u, v) + A_2(u, v), \quad (23)$$

$$A_0(u, v) = \frac{1}{\rho^3(u)|u - v|^3},$$

$$A_1(u, v) = -3 \frac{d_0(u, v)}{\rho^4(u)|u - v|^4}, \quad A_2(u, v) = -3 \frac{d^*(u, v)}{\rho^4(u)|u - v|^4} + 12 \frac{d(u, v)^2}{(\rho(u)|u - v| + \theta d(u, v))^5}.$$

При этом в силу оценок (14) и (17) имеем

$$|A_2(u, v)| \leq C_\varphi \frac{1}{|u - v|}, \quad (24)$$

а ядро $A_1(x, y)$ вследствие определений (8) и (16) имеет вид

$$A_1(u, v) = \sum_{i,j,k=1,2} \alpha_{ijk}(u) A_{ijk}(v - u),$$

$$\alpha_{ijk}(u) = \frac{W_{ijk}(u)}{\rho^5(u)}, \quad A_{ijk}(v - u) = \frac{(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k)}{|v - u|^5}.$$

Проведённые выкладки справедливы при $|u - v| < r_0$. Однако в представлении (23) левая часть, а также слагаемые $A_0(u, v)$ и $A_1(u, v)$ определены при всех $u, v \in D$. Тогда с учётом неравенств (11) функция $A_2(u, v)$ определена и удовлетворяет оценке (24) при всех $x, y \in \Sigma$ с некоторой константой, если положить

$$A_2(u, v) = \frac{1}{|x - y|^3} - A_0(u, v) - A_1(u, v).$$

Докажем, что ядро $A_2(u, v)$ представляется в виде (6). Для этого сначала докажем, что это ядро подчинено оценкам

$$\left| \frac{\partial A_2(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq \frac{C}{|u - v|^2}, \quad \left| \frac{\partial A_2(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq \frac{C}{|u - v|^2}, \quad u, v \in D, \quad u \neq v. \quad (25)$$

Для этого заметим, что $A_2(x, y) = F(a, d)$, где $F(a, d) = f(a + d) - f(a) - f'(a)d_0$. Тогда

$$\frac{\partial A_2(u, v)}{\partial u_i} = \frac{\partial F(a, d)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial u_i} + \frac{\partial F(a, d)}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial u_i}.$$

Теперь оценки (25) вытекают из оценок (14) и (17).

Из оценок (24) и (25) следует, что функция $A_2^*(u, v) = A_2(u, v)|u - v|^{1+\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, непрерывна по Гёльдеру по совокупности аргументов (u, v) на множестве $D \times D$.

Вернёмся к рассматриваемому интегралу. Его можно представить в виде

$$I(x, \varepsilon) = I_0(x, \varepsilon) + I_1(x, \varepsilon) + I_2(x, \varepsilon), \quad I_i(x, \varepsilon) = \int_{\Sigma \setminus U(x, \varepsilon)} A_i(u, v) g(y) d\sigma_y.$$

При этом интеграл $I_2(x, \varepsilon)$ сходится как несобственный, а интеграл $I_1(x, \varepsilon)$ сходится в смысле главного значения согласно лемме 1. При этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(x, \varepsilon) = \sum_{i, j, k=1, 2} \alpha_{ijk}(u) \int_D A_{ijk}(v - u) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv, \quad (26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(x, \varepsilon) = \int_D A_2(u, v) \tilde{g}(v) \rho^2(v) dv. \quad (27)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_0(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{\tilde{g}(v) \rho^2(v)}{\rho(u)^3 |u - v|^3} d\sigma_y.$$

Представим этот интеграл в виде

$$I_0(x, \varepsilon) = I_{01}(x, \varepsilon) + I_{02}(x, \varepsilon) + I_{03}(x, \varepsilon),$$

где

$$I_{01}(x, \varepsilon) = \frac{\tilde{g}(u)}{\rho(u)} \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{1}{|u - v|^3} dv, \quad I_{02}(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{\text{grad}(\tilde{g}(u) \rho^2(u))(u - v)}{\rho(u)^3 |u - v|^3} dv,$$

$$I_{03}(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{q(u, v)}{\rho(u)^3 |u - v|^3} dv, \quad q(u, v) = \tilde{g}(v) \rho^2(v) - \tilde{g}(u) \rho^2(u) - \text{grad}(\tilde{g}(u) \rho^2(u))(u - v).$$

Так как функция $g(u)\rho^2(u)$ принадлежит пространству $H^{1,\mu}[D]$, справедлива оценка

$$|q(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^{1+\mu} \|\tilde{g}\|_{1,\mu,D}.$$

Значит, интеграл $I_{03}(x, \varepsilon)$ сходится как несобственный. Интеграл $I_{02}(x, \varepsilon)$ сходится в смысле главного значения в силу леммы 1.

Наконец, рассмотрим интеграл $I_{01}(x, \varepsilon)$, перейдя на плоскости интегрирования (v_1, v_2) к полярным координатам с центром в точке u .

Пусть $\xi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $v(\theta, t) = u + t\xi(\theta)$, $t \geq 0$.

Обозначим $y_\theta(t) = \varphi(v(\theta, t))$, $r_\theta(t) = |y_\theta(t) - x|$, где, как и выше, $x = \varphi(u)$. При этом $t = |v(\theta, \varepsilon) - u|$.

Докажем, что производная функции $r_\theta(t)$ положительна при достаточно малых значениях t . Действительно,

$$y'_\theta(t) = \sum_{i=1}^2 \varphi''_i(v(\theta, t)) \xi_i(t)$$

и тогда

$$|y'_\theta(0)| = \rho(u), \quad |y'_\theta(t) - y'_\theta(0)| \leq C_\varphi t.$$

Далее имеем

$$r'_\theta(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{(y_\theta(t) - y_\theta(0), y_\theta(t) - y_\theta(0))} = \frac{(y'_\theta(t), y_\theta(t) - y_\theta(0))}{r_\theta(t)}. \quad (28)$$

Так как $y_\theta(t) - y_\theta(0) = t \int_0^1 y'_\theta(\tau t) d\tau$, можем записать

$$r'_\theta(t) = \left(y'_\theta(t), \int_0^1 y'_\theta(\tau t) d\tau \right) \left(\int_0^1 r'_\theta(\tau t) d\tau \right)^{-1}.$$

Заметим, что в силу неравенств (11) выполнено условие $r_\theta(t) > 0$ при $t > 0$. Поэтому вследствие представления (28) получаем, что $r'_\theta(0) = \rho(u)$, $|r'_\theta(t) - r'_\theta(0)| \leq C_\varphi t$. Тогда найдётся $r_1 \in (0, r_0]$ такое, что при $t \leq r_1$ справедливо неравенство $r'_\theta(t) > \rho(u)/2$. Значит, при $t \leq r_1$ справедливо также неравенство $r_\theta(t) > t\rho(u)/2$.

Будем считать, что $\varepsilon < \varepsilon_0 \equiv \rho(u)r_1/2$. Тогда для каждого θ существует единственное $t = t(\theta, \varepsilon) \in [0, r_1]$, являющееся решением уравнения $r_\theta(t) = \varepsilon$. Теперь интеграл $I_{01}(x, \varepsilon)$ представим в виде

$$I_{01}(x, \varepsilon) = \frac{\tilde{g}(u)}{\rho(u)} (J(x, \varepsilon) + \tilde{J}(x, \varepsilon)),$$

где

$$J(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| < r_1 \\ |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq \varepsilon}} \frac{1}{|u-v|^3} dv, \quad \tilde{J}(x, \varepsilon) = \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \geq r_1}} \frac{1}{|u-v|^3} dv.$$

Интеграл $\tilde{J}(x, \varepsilon)$ существует и не зависит от ε . Интеграл $J(x, \varepsilon)$ преобразуется к виду

$$J(x, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{t(\theta, \varepsilon)}^{r_1} \frac{\tau d\tau}{\tau^3} = -\frac{2\pi}{r_1} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{t(\theta, \varepsilon)} d\theta.$$

Рассмотрим функцию $t(\theta, \varepsilon)$. Имеем $|y - x| = \varepsilon$ при $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$, $v = v(\theta, t)$, $t = t(\theta, \varepsilon)$, причём $|u - v| = t$. В силу равенства (12) получаем $\rho t - \varepsilon = d$, $|\rho t - \varepsilon| \leq C_\varphi \varepsilon^2$,

где $\rho = \rho(u)$. Тогда существует $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ выполнено неравенство $|\rho t - \varepsilon| \leq \varepsilon/2$. Теперь можем записать

$$\frac{1}{t} = \frac{\rho}{\varepsilon - d} = \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\rho d}{\varepsilon^2} + \frac{\rho d^2}{(\varepsilon - d)\varepsilon^2}.$$

Далее, в силу равенств (15) и (16) получаем

$$d = d_0 + d^*, \quad d_0 = \frac{W_0}{\rho t} = \frac{W_0}{\varepsilon - d} = \frac{W_0}{\varepsilon} + \frac{W_0 d}{\varepsilon(\varepsilon - d)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{t} = \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\rho W_0}{\varepsilon^3} + \beta, \quad \beta = \rho \left\{ \frac{W_0 d}{\varepsilon^3(\varepsilon - d)} + \frac{d^*}{\varepsilon^3} + \frac{d^2}{(\varepsilon - d)\varepsilon^2} \right\}, \quad |\beta| \leq C_\varphi \varepsilon.$$

В силу определения (8) имеем

$$W_0 = \frac{\varepsilon^3}{\rho^3} \tilde{W}_0 + \left(t^3 - \frac{\varepsilon^3}{\rho^3} \right) \tilde{W}_0, \quad \tilde{W}_0 = \sum_{i,j,k=1,2} W_{ijk}(u) \xi_i(\theta) \xi_j(\theta) \xi_k(\theta).$$

Тогда, учитывая оценку $|t - \varepsilon/\rho| \leq C_\varphi \varepsilon^2$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho \tilde{W}_0}{\varepsilon^3} d\theta = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ J(x, \varepsilon) - \frac{2\pi \rho}{\varepsilon} \right\} = -\frac{2\pi}{r_1} \equiv J(x).$$

Прямым вычислением несложно проверить, что

$$J(x) = -\frac{2\pi}{r_1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\substack{v \in D \\ \delta \leq |u-v| \leq r_1}} \frac{1}{|u-v|^3} dv - \frac{2\pi}{\delta} \right\} = \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \leq r_1}} \frac{1}{|u-v|^3} dv,$$

где последний интеграл понимается как двойной интеграл в смысле конечного значения по Адамару.

Собирая вместе полученные оценки, заключаем, что справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^3(u)} \left\{ \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \geq \varepsilon}} \frac{\tilde{g}(\nu) \rho^2(v)}{|u-v|^3} dv - \frac{2\pi \tilde{g}(u) \rho^2(u)}{\varepsilon} \right\} = \frac{1}{\rho^3(u)} \int_{\substack{v \in D \\ |u-v| \leq r_1}} \frac{\tilde{g}(\nu) \rho^2(v)}{|u-v|^3} dv,$$

из которого и соотношений (26) и (27) вытекает формула (22). Лемма доказана.

Нетрудно показать, что если функция g определена и непрерывна на поверхности Σ и существует окрестность $U = U(x, \varepsilon)$ точки $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ такая, что на поверхности $\Sigma_U = \Sigma \cap \bar{U}$ выполнено условие $g \in H^{1,\mu}[\Sigma_U]$, то интеграл (19) существует и имеют место формулы (20)–(22). Для доказательства достаточно представить рассматриваемый интеграл в виде

$$I(x) = \int_{\Sigma_U} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y + \int_{\Sigma \setminus \Sigma_U} \frac{g(y)}{|x-y|^3} d\sigma_y$$

и применить лемму 2 к первому интегралу.

Отсюда также следует, что интеграл (19) существует и справедливы формулы (20)–(22), если функция g имеет комплексные значения и удовлетворяет условию $g \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$.

5. О разрешимости уравнения (3). В силу лемм 1 и 2 уравнение (3) преобразуется к равносильному уравнению для неизвестной функции $\tilde{g}(u) = g(\varphi(u))\rho^2(u)$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u)\tilde{g}(u) + \int_D \frac{\tilde{g}(v)}{|v-u|^3} dv + \sum_{m=1}^M \tilde{b}_m(u) \int_D \tilde{B}_{1m}(u-v)\tilde{g}(v) dv + \\ + \int_D \tilde{B}_2(u,v)\tilde{g}(v) dv = \tilde{f}(u), \quad u \in D \setminus \partial D, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\tilde{f}(u) = \rho^3(u)f(\varphi(u))$, $\tilde{a}(u) = \rho(u)a(\varphi(u))$, причём выполнены включения $\tilde{f} \in H^\mu[D]$, $\tilde{a} \in H^\mu[D]$, $\tilde{b}_m(u)$, $m = \overline{1, M}$, – функции, удовлетворяющие условию $b_m \in H^\mu[D]$, $\tilde{B}_{1m}$, $m = \overline{1, M}$, – функции вида (5), $\tilde{B}_2(u, v)$ – функция, представляющаяся в виде (6) с некоторым $\beta \in [0, 2)$, $\tilde{B}_2^* \in H^\mu(D \times D)$; все записанные включения выполнены с некоторым $\mu \in (0, 1]$.

Уравнение такого вида в случае $M = 1$ и $\tilde{b}_1(u) = 1$ рассматривалось в работе [10]. Его решение искалось во введённом в [10] классе функций $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$, аналогичном классу $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$, определённому в настоящей работе. Именно, класс $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$ состоит из заданных на множестве D комплекснозначных функций $f(u) = f_1(u) + if_2(u)$, где f_i , $i = 1, 2$, – вещественнозначные функции, удовлетворяющие включению $f_i \in H^\mu[D]$ и при $x \in \partial D$ равенству $f_i(x) = 0$, такие, что для любого множества $D' \subset \text{int } D$, являющегося замыканием открытого множества, выполняется включение $f_i \in H^{1, \mu}[D']$. Следующая теорема доказана в работе [10] для частного случая уравнения (29) с $M = 1$ и $\tilde{b}_1(u) = 1$.

Теорема 1. Пусть $\mu < 1/2$, $\mu < 2 - \beta$, $\mu \leq \beta$, где β – константа из условия (6). Тогда:

1) для уравнения (29) справедлива альтернатива Фредгольма: либо уравнение (29) имеет решение $\tilde{g} \in A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$ для любой правой части $\tilde{f} \in H_{\mathbb{C}}^\mu[D]$, либо однородное уравнение имеет ненулевые решения в классе функций $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$;

2) однородное уравнение, соответствующее уравнению (29), имеет не более конечного числа линейно независимых решений;

3) если однородное уравнение (29) однозначно разрешимо в классе функций $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$, то при любой правой части $\tilde{f} \in H_{\mathbb{C}}^\mu[D]$ решение уравнения (29) в классе $A_{\mathbb{C}}(\mu, D)$ представляется в виде

$$\tilde{g} = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2, \quad \text{где } \tilde{g}_1 \in H_{\mathbb{C}}^{1, \mu}[D], \quad \tilde{g}_2 \in C^\infty(\text{int } D),$$

$$\text{при всех } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\alpha| \geq 1, \quad \text{функции } D^\alpha \tilde{g}_2(u) \rho(u, \partial D)^{|\alpha| - 1/2} \text{ ограничены,} \quad (30)$$

здесь $\rho(u, \partial D)$ – расстояние от точки u до множества ∂D , $D^\alpha \tilde{g}_2 = (\partial^{|\alpha|} g_2) / (\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_2^{\alpha_2})$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. При этом выполнены оценки

$$\|\tilde{g}_1\|_{1, \mu, D} \leq C \|\tilde{f}\|_{\mu, D}, \quad |D^\alpha \tilde{g}_2(u)| \leq C(\alpha) \|\tilde{f}\|_{\mu, D} \rho(u, \partial D)^{1/2 - |\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\alpha| \geq 1, \quad (31)$$

$$\|\tilde{g}\|_{H_{\mathbb{C}}^{1/2}} \leq C \|\tilde{f}\|_{\mu, D}, \quad (32)$$

где C и $C(\alpha)$ – некоторые константы, зависящие от операторов в левой части уравнения, множества D и параметра μ и не зависящие от функции $\tilde{f}$.

Выше мы отметили, что теорема 1 доказана только в частном случае уравнения (29). Покажем, что эта теорема остаётся в силе и для общего случая уравнения (29). Введём линейный оператор B_1 , ставящий функции $\tilde{g}$, определённой на множестве D , в соответствие функцию $\tilde{f} = B_1 \tilde{g}$, определённую на этом же множестве, по формуле

$$\tilde{f}(u) = \sum_{m=1}^M \tilde{b}_m(u) \int_D \tilde{B}_{1m}(u-v)\tilde{g}(v) dv. \quad (33)$$

Обозначим $\dot{H}_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$ – подпространство линейного пространства $H_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$, элементами которого являются функции $\tilde{g} \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$, удовлетворяющие условию $\tilde{g}(x) = 0$ при $x \in \partial D$. В работе [10] для оператора B_1 вида (33) с $M = 1$ и $\tilde{b}_1(u) = 1$ доказана

Лемма 3 (лемма 1 из [10]). *Оператор B_1 , определяемый формулой (33), действует из пространства $\dot{H}_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$ в пространство $H_{\mathbb{C}}^{\mu}[D]$ и непрерывен.*

Из анализа доказательства этой леммы, приведённого в [10], следует, что лемма справедлива и для рассматриваемого общего случая оператора B_1 вида (33). Но тогда легко убедиться в том, что всё доказательство теоремы 1 из работы [10] остаётся в силе для уравнения (29). Тем самым теорема 1 верна и для рассматриваемого уравнения (29).

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть $\mu \leq \beta$, $\mu < 1/2$. Тогда:

1) для уравнения (3) справедлива альтернатива Фредгольма: либо уравнение (3) имеет решение $\varphi \in A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$ для любой правой части $f \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}[\Sigma]$, либо однородное уравнение имеет ненулевые решения в классе функций $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$;

2) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет не более конечного числа линейно независимых решений;

3) если однородное уравнение однозначно разрешимо в классе функций $A_{\mathbb{C}}(\mu, \Sigma)$, то при любой правой части $f \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}[\Sigma]$ функция $\tilde{g}(u) = \rho^2(u)g(\varphi(u))$, где g – решение уравнения (3), представляется в виде $\tilde{g}(u) = \tilde{g}_1(u) + \tilde{g}_2(u)$ так, что $\tilde{g}_1 \in H^{1,\mu}[D]$, $\tilde{g}_2 \in C^{\infty}[\text{int } D]$ и выполнены условия (30)–(32) с $\tilde{f}(u) = f(\varphi(u))\rho^3(u)$.

6. Краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца (Лапласа) на экране.

Пусть Σ – рассматриваемая поверхность, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ – область вне этой поверхности. Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца на экране Σ :

$$\begin{aligned} \Delta U + k^2 U &= 0 \quad \text{в области } \Omega, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)^{\pm} &= f \quad \text{на поверхности } \Sigma \setminus \partial \Sigma, \end{aligned}$$

где f – некоторая функция, заданная на поверхности Σ , $f \in H_{\mathbb{C}}^{\mu}$, $\mu \in (0, 1]$. Не рассматривая в данной статье вопрос о разрешимости поставленной задачи, отметим, что её решение в области Ω можно искать в виде потенциала двойного слоя

$$U(x) \equiv U[\Sigma, g](x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |x-y|. \quad (34)$$

Отметим также, что потенциал двойного слоя (34) позволяет найти решение, удовлетворяющее условию

$$U(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

и условию излучения на бесконечности в форме Зоммерфельда

$$(x, \text{grad } U(x)) - ikU(x) = o(1/|x|) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (35)$$

При $k = 0$ получается уравнение Лапласа. Для него рассматриваются действительные решения $U(x)$ и функция F имеет вид

$$F(x-y) = F_0(x-y) \equiv 1/(4\pi r), \quad r = |x-y|,$$

условие (35) не ставится.

В работе [13, лемма 8] для потенциала двойного слоя в случае оператора Лапласа $F(x-y) = F_0(x-y)$ доказано, что если $g \in H^{1,\mu}$, то градиент потенциала двойного слоя имеет в каждой точке $\Sigma \setminus \partial \Sigma$ краевые значения, для которых справедлива формула

$$(\text{grad } U)^{\pm}(x) = \int_{\Sigma} g(y) \text{grad}_x \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y \pm \frac{1}{2} \text{Grad } U(x), \quad (36)$$

интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару.

Очевидно, что формула (36) верна и в случае, когда $g \in A_C(\mu, \Sigma)$. Для доказательства этого достаточно рассмотреть функцию $U(z)$ в окрестности рассматриваемой точки x , представив её в виде

$$U[\Sigma, g](z) = U[\Sigma'(x), g](z) + U[\Sigma \setminus \Sigma'(x), g](z),$$

где $\Sigma''(x)$ – участок поверхности Σ , выбранный так, что $x \in \Sigma' \setminus \partial \Sigma''$ и выполнено включение $g \in H^{1,\mu}[\Sigma'']$. Тогда для первого слагаемого формула (36) верна для рассматриваемой точки x , а второе слагаемое представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в точке x .

Чтобы доказать справедливость формулы (36) для уравнения Гельмгольца, представим функцию $F(x-y)$ в виде

$$F(x) = F_0(x) + F_1(x), \quad F_1(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1}{r}, \quad r = |x|,$$

и для упрощения, чтобы использовать известные результаты, предположим, что рассматриваемая поверхность Σ может быть достроена до некоторой замкнутой поверхности Σ_0 класса C^3 (на поверхности Σ_0 мы уже не требуем существования изотермических координат).

Потенциал U с плотностью $g \in A_C(\mu, \Sigma)$ представим в виде суммы

$$U(x) = U_0(x) + U_1(x), \quad U_0(x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad U_1(x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F_1(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y.$$

При этом для функции U_0 верна формула (36) и можно показать, что функция U_1 непрерывно дифференцируема во всём пространстве. Чтобы доказать непрерывность градиента функции U_1 в окрестности каждой точки $x \in \Sigma$, достроим поверхность Σ до замкнутой поверхности Σ_0 и доопределим функцию g на поверхности $\Sigma_0 \setminus \Sigma$ равенством $g = 0$. При этом функция g непрерывна на поверхности Σ_0 . Градиент функции U_1 представляется в точках $x \notin \Sigma$ в виде

$$\text{grad } U_1(x) = \int_{\Sigma_0} \vec{K}(x, y) g(y) dy, \quad \vec{K}(x, y) = \text{grad}_x \frac{\partial F_1(x-y)}{\partial n_y}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0, \quad y \in \Sigma_0. \quad (37)$$

Далее, несложно показать, что выполняются оценки

$$|\vec{K}(x, y)| \leq \frac{C_\varphi}{|x-y|}, \quad \left| \frac{\partial \vec{K}(x-y)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C_\varphi}{|x-y|^2}.$$

Тогда для любых $y \in \Sigma_0$ и $x, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0$ таких, что $2|x-z| \leq |x-y|$, нетрудно доказать оценку

$$|\vec{K}(x, y) - \vec{K}(z, y)| \leq \frac{C_\varphi |x-z|}{|x-y|^2},$$

откуда в силу [14, теорема 2.7] заключаем, что интеграл в формуле (37) порождает непрерывную функцию в пространстве $\mathbb{R}^3$. Поэтому формула (36) справедлива и для уравнения Гельмгольца.

Вследствие формулы (36) рассматриваемая краевая задача сводится к следующему интегральному уравнению с интегралом, понимаемым в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_{\Sigma} g(x) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma, \quad (38)$$

где

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = (\vec{n}(x), \text{grad}_x (\vec{n}(y), \text{grad}_y F(x-y))).$$

При этом если $g \in A_C(\mu, \Sigma)$ – решение уравнения (38), то функция $U = U[\Sigma, g]$ является решением рассматриваемой краевой задачи.

Покажем, что уравнение (38) представляется в виде (3).

Получим выражение для ядра уравнения (38). Несложно убедиться, что

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} = (\vec{n}(y), \text{grad}_y F(x-y)) = \frac{1}{4\pi} (\vec{n}(y), x-y) \Psi(r), \quad \Psi(r) = \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)' = \frac{e^{ikr}(1-ikr)}{r^3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{n}(y), \vec{n}(x)) \Psi(r) + B_{21}(x, y), \\ B_{21}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{n}(y), x-y)(\vec{n}(x), x-y)}{r} \Psi''(r) = \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi} \frac{(\vec{n}(y), x-y)(\vec{n}(x), x-y)}{r^5} (-3 + 3ikr + k^2 r^2). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|^3} + \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{n}(x), \vec{n}(y) - \vec{n}(x))}{|x-y|^3} + B_{21}(x, y) + B_{22}(x, y), \\ B_{22}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \Psi(r) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}(1-ikr) - 1}{r^3}, \quad r = |x-y|. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим функцию $\eta(u, v) = (\vec{n}(x), \vec{n}(y) - \vec{n}(x))$. Так как $\eta(u, v) = 0$ при $u = v$, можем записать

$$\eta(u, v) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(u)(v_i - u_i) + \eta^*(u, v),$$

$$|\eta^*(u, v)| \leq C_\varphi |u - v|^2, \quad \left| \frac{\partial \eta^*(u, v)}{\partial u_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|, \quad \left| \frac{\partial \eta^*(u, v)}{\partial v_i} \right| \leq C_\varphi |u - v|.$$

Тогда, используя равенство (23), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|^3} + B_1(x, y) + B_{21}(x, y) + B_{22}(x, y) + B_{23}(x, y), \\ B_1(x, y) &= \frac{1}{4\pi \rho^3(u) |u-v|^3} \sum_{i=1}^2 \eta_i(u)(v_i - u_i), \\ B_{23}(x, y) &= (A_1(u, v) + A_2(u, v)) \eta(u, v) + \frac{1}{4\pi} \frac{\eta^*(u, v)}{|x-y|^3}. \end{aligned}$$

Далее легко видеть, что ядро $B_1(x, y)$ имеет вид (4), (5), а для ядра

$$B_2(x, y) = B_{21}(x, y) + B_{22}(x, y) + B_{23}(x, y)$$

несложно доказать оценки

$$|B_2(x, y)| \leq \frac{C_\varphi}{|u-v|}, \quad \left| \frac{\partial B_2(x, y)}{\partial u_i} \right| \leq \frac{C_\varphi}{|u-v|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Из последних оценок заключаем, что функция B_2 имеет вид (6).

Таким образом, уравнение (38) – уравнение рассматриваемого вида и для него справедлива теорема 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1624.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stephan E.P.* Boundary integral equations for screen problems in 3 // *Integral Equations and Operator Theory*. 1987. V. 10. P. 236–257.
2. *Крутицкий П.А.* Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разомкнутых поверхностей и случай ее явного решения // *Докл. РАН*. 2012. Т. 447. № 4. С. 365–368.
3. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., 2001.
4. *Апаринов В.А., Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А.* Расчет нестационарных аэродинамических характеристик тел при отрывном обтекании // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. 1988. Т. 2. № 16. С. 1558–1566.
5. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
6. *Сетуха А.В.* Краевая задача Неймана с граничным условием на разомкнутой плоской поверхности // *Дифференц. уравнения*. 2001. Т. 37. № 10. С. 1311–1329.
7. *Сетуха А.В.* О построении фундаментальных решений краевой задачи Неймана в области вне разомкнутой плоской поверхности // *Дифференц. уравнения*. 2002. Т. 38. № 4. С. 505–515.
8. *Сетуха А.В.* Трехмерная краевая задача Неймана с обобщенными граничными условиями и уравнение Прандтля // *Дифференц. уравнения*. 2003. Т. 39. № 9. С. 1188–1200.
9. *Лебедева С.Г., Сетуха А.В.* О численном решении полного двумерного гиперсингулярного уравнения методом дискретных особенностей // *Дифференц. уравнения*. 2013. Т. 49. № 2. С. 223–233.
10. *Сетуха А.В.* О разрешимости некоторого полного двумерного гиперсингулярного уравнения // *Дифференц. уравнения*. 2013. Т. 49. № 9. С. 1141–1151.
11. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М., 1986.
12. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
13. *Сетуха А.В.* Об аппроксимации вторых производных потенциала объёмного заряда, размещённого в слое малой толщины, поверхностным интегралом // *Дифференц. уравнения*. 2018. Т. 54. № 9. С. 1262–1281.
14. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
им. Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 20.03.2021 г.
После доработки 20.03.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.