ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 3–10

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

ИЗОХРОННЫЕ И СИЛЬНО ИЗОХРОННЫЕ ФОКУСЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

© 2022 г. В. В. Амелькин

Рассматривается вещественная система Льенара $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x + A(x) - B(x)y$, где полиномы $A(x)$, $B(x)$ и производная $A'(x)$ удовлетворяют условиям $A(0) = B(0) = A'(0) = 0$ и $\deg A(x) - 1 \geqslant \deg B(x)$. Используя введённую автором нормальную форму, выводятся в терминах коэффициентов системы необходимые и достаточные условия, при выполнении которых исследуемая во всей фазовой плоскости (т.е. глобально) система имеет в начале координат изохронный фокус. Доказывается, что этот фокус оказывается и сильно изохронным.

DOI: 10.31857/S0374064122010010

Рассмотрим вещественное полиномиальное уравнение Льенара

$$\ddot{x} + B(x)\dot{x} + x + A(x) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что полиномы $A(x)$ и $B(x)$ задаются равенствами

$$A(x) = \sum_{k=2}^{n} A_k x^k, \quad B(x) = \sum_{j=1}^{r} B_j x^j, \quad A_n \neq 0, \quad B(x) \not\equiv 0,$$

где $n \geqslant 3$ – нечётное число, $r \leqslant n-1$.

Уравнение (1) всесторонне изучалось и изучается с самых разных точек зрения. Обычный метод его исследования – переход к эквивалентной двумерной автономной системе. Одной из таких систем является система Льенара в так называемой *первой форме*

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + A(x) - B(x)y. \tag{2}$$

Другая система – это система Льенара во *второй форме*

$$\dot{x} = -y - \mathcal{B}(x), \quad \dot{y} = x + A(x), \tag{3}$$

где $\mathcal{B}(x) = \int_0^x B(s)\,ds$.

Ещё одна система – система [1, 2]

$$\dot{x} = -y - x\Phi(x), \quad \dot{y} = x - y\Phi(x) + A(x) - x\Phi^2(x), \tag{4}$$

где $\Phi(x) = x^{-2}\int_0^x sB(s)\,ds$.

Каждая из приведённых систем (2)–(4) переводится в другую соответствующей заменой фазовых переменных. В частности, непосредственно проверяется, что система (2) переводится в системы (3) и (4) соответственно заменами

$$u = x, \quad v = y - \mathcal{B}(x)$$

и

$$u = x, \quad v = y - x\Phi(x)$$

с сохранением обозначений исходных фазовых переменных. Система (3) переводится в систему (4) посредством замены координат

$$u = x, \quad v = y + \mathcal{B}(x) - x\Phi(x).$$

Напомним некоторые нужные в дальнейшем определения. Для этого рассмотрим систему вида
$$\dot{x} = \lambda x - y - P(x,y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + Q(x,y), \tag{5}$$
где $\lambda \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная, а $P, Q : G \to \mathbb{R}$ – голоморфные в окрестности $G = \{(x,y) : |x| < r, \ \ |y| < r\}$, $r \in \mathbb{R}$, начала координат $O(0,0)$ фазовой плоскости функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды по степеням x и y свободных и линейных членов.

Пусть OA – луч (с началом в точке $O(0,0)$), составляющий с положительной полуосью оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат xOy угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда [3] центр или фокус $O(0,0)$ системы (5) называют *изохронным*, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (5) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$. Луч OA из приведённого определения изохронности будем называть *лучом-изохроной*.

Далее, для системы (5) имеет место *общая изохронность*, если особая точка $O(0,0)$ системы (5) является изохронной при любом начальном положении луча-изохроны. Если же особая точка $O(0,0)$ системы (5) оказывается изохронной лишь только при некоторых начальных положениях луча-изохроны, то говорят, что для системы (5) имеет место *частная изохронность*. Очевидно, что в случае изохронного центра $O(0,0)$ (при $\lambda = 0$) для системы (5) имеет место общая изохронность.

Что же касается случая изохронного фокуса $O(0,0)$, то здесь как раз для системы (5) имеет место, вообще говоря, частная изохронность.

Заметим, что в работе [4] доказано следующее утверждение: *для того чтобы для системы (5) в случае грубого или негрубого фокуса имела место общая изохронность, необходимо и достаточно, чтобы для системы (5) имела место совершенная изохронность [5].*

В работе [5] под *совершенной изохронностью* понимается такая изохронность, когда все изображающие точки, находящиеся на любом луче OA с началом в точке $O(0,0)$, двигаются по траекториям центра или фокуса, оставаясь на одном и том же луче.

Отметим, что в работе [6] в случае центра совершенная изохронность названа *равномерной изохронностью*.

Приведём теперь определение изохронного сечения [2], которое обобщает понятие луча-изохроны. Это определение основывается на понятии дуги без контакта (или сечения) [7, с. 71–72] и связанного с ним понятия функции последования (или отображения Пуанкаре) [7, с. 90–91].

Именно, обозначим для каждого $z \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ через $\psi(t,z)$ траекторию системы (5) такую, что $\psi(0,z) = z$.

Пусть $O(0,0)$ – центр или фокус системы (5), а $\eta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ – гладкая кривая такая, что $\lim\limits_{s\to+\infty} \eta(s) = O(0,0)$. Кривую η называют *изохронным сечением* системы (5) в точке $O(0,0)$, если существует $T > 0$ такое, что для любого $z \in \eta$ имеет место включение $\psi(T,z) \in \eta$ и при этом $\psi(t,z) \notin \eta$ для всех $t \in (0,T)$.

Тогда центр или фокус $O(0,0)$ системы (5) называют *изохронным*, если система (5) имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронное сечение.

Здесь уместно привести один из примеров работы [8], где показано, что существуют системы вида (5), которые как в случае центра, так и в случае негрубого фокуса не имеют изохронных сечений.

Пример 1. Система
$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x - 4\omega xy + 2y^2,$$
где параметр $\omega \in \mathbb{R}$, в особой точке $O(0,0)$ не имеет изохронного сечения, а значит, центр (при $\omega = 0$) или фокус (при $\omega \neq 0$) приведённой системы неизохронен.

Далее отметим, что введение понятия изохронного сечения полезно как с теоретической, так и с практической точек зрения в связи с возможностью построения изохронных сечений, среди которых находятся (или могут находиться) лучи-изохроны.

Не останавливаясь на методах построения изохронных сечений, заметим лишь, что, например, в работе [2] рассматриваются, в частности, изохронные сечения системы Льенара с фокусом, которые строятся на основании преобразования, переводящего исходную систему в ту или иную нормальную форму, и о которых идёт речь в настоящей статье в дальнейшем.

Обратимся теперь к понятию сильной изохронности фокуса $O(0,0)$ системы Льенара (2). Именно, пусть y^+ и y^- – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси Oy системы координат xOy. Фокус $O(0,0)$ системы (2) называется *сильно изохронным*, если y^+ – луч-изохрона и если изображающая точка, выходящая из точки полуоси y^+, пересечёт полуось y^- в первый раз через время π.

Ниже рассматривается полиномиальная система (2) в случае фокуса и решается задача, аналогичная задаче, рассмотренной в работе [9] в случае центра $O(0,0)$. Эта задача заключается в выводе необходимых и достаточных условий, при выполнении которых полиномиальная система (2) имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный фокус. Доказывается также, что изохронный фокус $O(0,0)$ системы (2) оказывается и сильно изохронным фокусом. Предварительно отметим, что в работе [2], наряду с другими вопросами, для системы (2) с фокусом $O(0,0)$ и функциями A и B класса C^1 такими, что они определены в окрестности точки $O(0,0)$ и удовлетворяют условию

$$A(x) = x\Phi^2(x), \tag{6}$$

т.е. когда, в частности, система (4) принимает вид

$$\dot{x} = -y - x\Phi(x), \quad \dot{y} = x - y\Phi(x), \tag{7}$$

показано, что среди изохронных сечений системы (2) (как и систем (3) и (7)) находятся лучи-изохроны y^+ и y^-.

Дальнейшие исследования полиномиальной системы (2) основываются на определении изохронности с точки зрения наличия у особой точки $O(0,0)$ лучей-изохрон и на полиномиальном варианте теоремы 3 [10] в голоморфном случае: *существует вещественная замена переменных*

$$u = x + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k x^k, \tag{8}$$

переводящая голоморфную в окрестности особой точки $O(0,0)$ систему Льенара (2) в систему

$$\dot{u} = -\Big(v + u\sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} u^{s-1}\Big)\Big(1 + \sum_{s=2}^{\infty} H_s u^{s-1}\Big)^{-1},$$

$$\dot{v} = \Big(u - v\sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} u^{s-1}\Big)\Big(1 + \sum_{s=2}^{\infty} H_s u^{s-1}\Big)^{-1}. \tag{9}$$

Покажем, к каким новым результатам приводит последнее утверждение, если вместо голоморфной системы Льенара рассмотреть полиномиальную систему вида (2) с условием (6) (а значит, имеющую единственную особую точку $O(0,0)$) и вместо замены переменных (8) использовать полиномиальную замену

$$u = x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{n} \beta_k x^k, \tag{10}$$

которая должна быть диффеоморфизмом плоскости $\mathbb{R}^2$ и которая, как будет показано далее, не умаляет общности рассуждений (см. теорему 8).

Для этого продифференцируем каждое из выражений (10) по t в силу системы (2), а затем полученные равенства приведём с учётом соотношений (9) и (10) к системе

$$y\Big\{\sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1} + \sum_{s=2}^{\infty} H_s\Big(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Big)^{s-1} + \sum_{k=2}^{n} k\alpha_k x^{k-1}\sum_{s=2}^{\infty} H_s\Big(x + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k x^k\Big)^{s-1}\Big\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=2}^{n} \beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k \biggr)^s,$$

$$\sum_{k=2}^{n} (A_k - \alpha_k) x^k + \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} A_k x^k \biggr) \sum_{s=2}^{\infty} H_s \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k \biggr)^{s-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \beta_k x^k \sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k \biggr)^{s-1} \equiv y \biggl\{ \sum_{k=2}^{n} (B_{k-1} + k\beta_k) x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (B_{k-1} + k\beta_k) x^{k-1} \sum_{s=2}^{\infty} H_s \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k \biggr)^{s-1} - \sum_{s=2}^{\infty} \gamma_{s-1} \biggl(x + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x^k \biggr)^{s-1} \biggr\}. \tag{11}$$

Далее, приравнивая к нулю в первом тождестве системы (11) коэффициенты при yx^p, можно показать [9], что выполняются условия

$$\alpha_k = 0, \quad H_s = 0 \quad \text{для всех} \quad k, s \geqslant 2. \tag{12}$$

Приравнивая к нулю в первом тождестве системы (11) коэффициенты при x^p, с учётом условий (12) получаем соотношения

$$\gamma_s = 0 \quad \text{при всех} \quad s > n \tag{13}$$

и

$$\gamma_{k-1} = -\beta_k, \quad k = \overline{2, n}. \tag{14}$$

Если приравнять к нулю во втором тождестве системы (11) коэффициенты при yx^p, с учётом равенств (12)–(14) придём к равенствам

$$\beta_k = -\frac{B_{k-1}}{k+1}, \quad k = \overline{2, n}. \tag{15}$$

Из соотношений (12)–(15) следует, что диффеоморфизм (10) и система (9) принимают соответственно вид

$$u = x, \quad v = y - x \sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1} x^{k-1} \tag{16}$$

и

$$\dot{u} = -v - u \sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} u^{s-1}, \quad \dot{v} = u - v \sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} u^{s-1}. \tag{17}$$

Приравнивая к нулю во втором тождестве системы (11) коэффициенты при x^p, с учётом равенств (12)–(15) приходим к тождеству

$$\sum_{k=2}^{n} A_k x^{k-1} \equiv \biggl(\sum_{s=2}^{n} \frac{B_{s-1}}{s+1} x^{s-1} \biggr)^2,$$

которое означает, что между коэффициентами полиномов $A(x)$ и $B(x)$ имеет место следующая связь: зависимость

$$A_2 = 0, \quad A_k = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{B_r}{r+2} \frac{B_{k-r-1}}{k-r+1}, \quad k = \overline{3, n}. \tag{18}$$

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронным фокусом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (18), в которых* *по крайней мере один из коэффициентов* B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, *полинома* $B(x)$ *при заданном нечётном* $n\geqslant 5$ *отличен от нуля.*

Доказательство. Необходимость следует из работы [9, теорема 1], поскольку в данном случае соотношения (6) и (18) эквивалентны.

Достаточность вытекает из эквивалентности соотношений (6) и (18) и отмеченного выше факта, что y^+ – луч-изохрона фокуса системы (2). Теорема доказана.

Замечая теперь, что на основании теоремы 1 и того, что диффеоморфизм вида (10) плоскости $\mathbb{R}^2$ представляется в виде (16), а система (9) – в виде (17), приходим в силу работы [11] к следующим утверждениям.

Теорема 2. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$ *полиномиальной системы (2) была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно выполнения условий (18), в которых по крайней мере один из коэффициентов* B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, *отличен от нуля.*

Теорема 3. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$ *полиномиальной системы (2) была изохронным, а значит, и сильно изохронным фокусом, необходимо и достаточно, чтобы диффеоморфизм плоскости* $\mathbb{R}^2$

$$u=x,\quad v=y-x\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}x^k, \tag{19}$$

где по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, *при заданном нечётном* $n\geqslant 5$ *отличен от нуля, переводил систему (2) в систему*

$$\dot u=-v-u\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}u^k,\quad \dot v=u-v\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}u^k. \tag{20}$$

Замечание 1. Как отмечено выше, диффеоморфизм (19) плоскости $\mathbb{R}^2$ позволяет строить изохронные сечения системы (2) в фокусе $O(0,0)$. Именно, изохронные сечения фокуса $O(0,0)$ системы (2) задаются уравнением

$$y\cos\varphi_0=x\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{B_k}{k+2}x^{k+1}, \tag{21}$$

в котором φ_0 – полярный угол и по крайней мере один из коэффициентов B_{2s}, $s=\overline{1,(n-1)/2}$, при заданном нечётном $n\geqslant 5$ отличен от нуля. Из формулы (21) следует, что система (2) в фокусе $O(0,0)$ имеет бесконечно много изохронных сечений. Среди этих сечений находятся, в частности, лучи-изохроны y^+ и y^-. Таким образом, изохронный фокус $O(0,0)$ полиномиальной системы Льенара (2) и с точки зрения наличия лучей-изохрон y^+ и y^- оказывается сильно изохронным фокусом [2].

Замечание 2. Хотя теоремы 2 и 3 эквивалентны, тем не менее области применения их различны. Так, теорема 2 наиболее эффективна при построении примеров, а также при проверке наличия или отсутствия изохронного фокуса у полиномиальной системы Льенара (2). Теорему же 3 удобнее использовать при рассмотрении теоретических вопросов, связанных с использованием как одной из простейших нормальных форм вида (20), так и изохронных сечений, заданных уравнением (21).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot x=-y,\quad \dot y=x+x^3+2x^6+x^9-(3x+6x^4)y.$$

Для неё выполняются равенства

$$A_3=\left(\frac{B_1}{3}\right)^2,\quad A_6=2\,\frac{B_1}{3}\,\frac{B_4}{4},\quad A_9=\left(\frac{B_4}{6}\right)^2,$$

а значит, согласно теореме 2, её особая точка $O(0,0)$ является сильно изохронным фокусом. Поэтому по теореме 3 диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$

$$u = x, \quad v = y - x^2 - x^5 \quad (x = u, \quad y = v + u^2 + u^5)$$

переводит исходную систему в систему

$$\dot{u} = -v - u(u + u^4), \quad \dot{v} = u - v(u + u^4).$$

Пример 3. Система Льенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^7 + 2x^8 + x^{11} - (3x + 4x^2 + 7x^5)y$$

имеет в особой точке $O(0,0)$ сильно изохронный фокус, поскольку по теореме 2

$$A_3 = \left(\frac{B_1}{3}\right)^2, \quad A_4 = 2\,\frac{B_1}{3}\,\frac{B_2}{4}, \quad A_5 = \left(\frac{B_2}{4}\right)^2,$$

$$A_7 = 2\,\frac{B_1}{3}\,\frac{B_5}{7}, \quad A_8 = 2\,\frac{B_2}{4}\,\frac{B_5}{7}, \quad A_{11} = \left(\frac{B_5}{7}\right)^2.$$

Тогда по теореме 3 диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$

$$u = x, \quad v = y - x^2 - x^3 - x^6 \quad (x = u, \quad y = v + u^2 + u^3 + u^6)$$

переводит рассматриваемую систему в систему (нормальную форму)

$$\dot{u} = -v - u(u + u^2 + u^5), \quad \dot{v} = u - v(u + u^2 + u^5).$$

Замечание 3. Обратим внимание на следующие обстоятельства. Во-первых, так как для полиномиальной системы Льенара (2) оказывается, что как замена переменных, переводящая изохронную систему (2) в полиномиальную нормальную форму Пуанкаре–Дюлака (7), имеющую единственную особую точку $O(0,0)$, так и обратная замена являются полиномиальными, то этот факт приводит к естественному глобальному исследованию изохронности полиномиальных систем Льенара (2). Во-вторых, локальное, а не глобальное рассмотрение вопросов изохронности с использованием, например, подхода из работы [12] даёт совершенно другие условия изохронности фокуса системы (2), чем условия, полученные в настоящей работе.

Приведём далее результаты, которые следуют из настоящей работы и работы [9] и которые представляют самостоятельный интерес для теории полиномиальных систем Льенара (2) с единственной особой точкой $O(0,0)$.

Теорема 4. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $A(x) = x\Phi^2(x)$, где $\Phi(x) = x^{-2}\int_0^x sB(s)\,ds$.*

Теорема 5. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно изохронной.*

Теорема 6. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, а значит, и сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество*

$$\sum_{k=2}^{n} A_k x^{k-1} \equiv \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1} x^{k-1}\right)^2.$$

Теорема 7. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$ полиномиальной системы (2) была изохронной, а значит, и сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы диффеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$*

$$u = x, \quad v = y - x\sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1} x^{k-1} \quad \left(x = u, \quad y = v + u\sum_{k=2}^{n} \frac{B_{k-1}}{k+1} u^{k-1}\right)$$

переводил систему (2) в систему

$$\dot{u} = -v - u\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}u^{k-1}, \quad \dot{v} = u - v\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}u^{k-1}.$$

В заключение докажем, что справедлива и

Теорема 8. *Все возможные биголоморфизмы плоскости* $\mathbb{R}^2$ *полиномиальной системы (2) с единственной особой точкой* $O(0,0)$, *определяемые соотношениями*

$$u = x + \sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k x^k, \quad v = y + \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k, \tag{22}$$

имеют вид

$$u = x, \quad v = y + x\sum_{k=2}^{n}\frac{B_{k-1}}{k+1}x^{k-1}.$$

Доказательство. Первое из соотношений (22) определяет биголоморфизм $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Поэтому отображение u и обратное ему отображение u^{-1} являются голоморфными функциями, определяемыми степенными рядами с радиусом сходимости $r=+\infty$. На основании же того факта, что радиусы сходимости вещественного степенного ряда и биективно ему соответствующего комплексного степенного ряда с вещественными коэффициентами одинаковы (формула Коши–Адамара [13, с. 39; 14, с. 114]), приходим к выводу, что голоморфные функции комплексного переменного u_c и u_c^{-1}, соответствующие голоморфным функциям вещественного переменного u и u^{-1}, являются целыми. Но, как показано, например, в [14, с. 145], функция u_c является целой линейной функцией. Следовательно, первая из функций (22) имеет представление $u=x$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Поэтому, заменяя в тождествах (11) α_k, $k=\overline{2,\infty}$, нулями, а суммы $\sum_{k=2}^{n}\beta_k x^k$ и $\sum_{k=2}^{n}k\beta_k x^{k-1}$ на суммы $\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k$ и $\sum_{k=2}^{\infty}k\beta_k x^{k-1}$ соответственно, приходим к соотношениям

$$y\sum_{s=2}^{\infty}H_s x^{s-1} \equiv \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k + \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^s,$$

$$\sum_{k=2}^{n}A_k x^k + \Big(x + \sum_{k=2}^{n}A_k x^k\Big)\sum_{s=2}^{\infty}H_s x^{s-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k\sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^{s-1} \equiv y\bigg\{\sum_{k=2}^{n}B_{k-1}x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}k\beta_k x^{k-1} +$$

$$+\Big(\sum_{k=2}^{n}B_{k-1}x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}k\beta_k x^{k-1}\Big)\sum_{s=2}^{\infty}H_s x^{s-1} - \sum_{s=2}^{\infty}\gamma_{s-1}x^{s-1}\bigg\}. \tag{23}$$

Тождества (23) означают, что справедливы равенства

$$H_s = 0, \quad \beta_k = -\gamma_{k-1}, \quad s,k=\overline{2,\infty},$$

и тождества

$$\sum_{k=2}^{n}A_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^k\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k x^{k-1} \equiv 0, \quad \sum_{k=2}^{n}B_{k-1}x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\beta_k x^{k-1} \equiv 0,$$

т.е. имеют место равенства (12)–(15), что и доказывает теорему 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sabatini M.* On the period function of Liénard systems // J. Differ. Equat. 1999. V. 152. P. 467–487.
2. *Sabatini M.* Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems // Ann. di Matem. 2003. V. 182. № 4. P. 487–501.
3. *Абдуллаев Н.* Об изохронности при нелинейных колебаниях // Тр. Тадж. учительского ин-та им. С.С. Айни. 1954. Вып. 2. С. 71–78.
4. *Чемоданов В.И.* Об изохронности в случае фокуса // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 5. С. 964–966.
5. *Куклес И.С., Пискунов Н.С.* Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем // Докл. АН СССР. 1937. Т. 17. № 9. С. 467–470.
6. *Conti R.* Uniform isochronous centers of polynomial systems in $\mathbb{R}^2$ // Lect. Notes Pure Appl. Math. 1994. V. 152. P. 21–31.
7. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М., 1966.
8. *Giné J., Grau M.* Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. 2005. V. 135A. P. 985–998.
9. *Амелькин В.В.* Положительное решение одной гипотезы в теории полиномиальных изохронных центров систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 147–152.
10. *Амелькин В.В.* Об одной гипотезе в теории изохронных систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1283–1289.
11. *Амелькин В.В.* Сильная изохронность систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 579–582.
12. *Algaba A., Reyes M.* Characterizing isochronous points and computing isochronous sections // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 355. P. 564–576.
13. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 3. Ч. 4. Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ч. 5. Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям. Минск, 2006.
14. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ. Кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. Минск, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 10.01.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.