ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 11–16

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ С ИНДЕКСОМ ХЁРСТА $H \in (0,1)$

© 2022 г. М. М. Васьковский

Получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробным броуновским движением с индексом Хёрста $H \in (0,1)$.

DOI: 10.31857/S0374064122010022

Введение. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\,dB_t^H, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \tag{1}$$

где B_t^H – одномерное дробное броуновское движение с индексом Хёрста $H \in (0,1)$, функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является детерминированной и имеет непрерывные и ограниченные производные любого порядка $m \in \{0,\ldots,[1/H]+1\}$. Дифференциальные уравнения (1), вообще говоря, не могут быть исследованы в рамках как классической теории стохастических дифференциальных уравнений Ито [1], так и теорий Лайонса и Губинелли потраекторного интегрирования по грубым траекториям [2, 3]. В статьях [4, 5] разработан функциональный вариант теории интегрирования по грубым траекториям с произвольным положительным показателем Гёльдера и с его помощью доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решений уравнений (1).

В настоящей работе получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений (1). Полученные результаты обобщают известные аналогичные результаты для одномерных стохастических дифференциальных уравнений Ито [6, гл. 4], а также для одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с показателями Хёрста $H > 1/3$ [7, 8].

Для определения решений уравнения (1) нам понадобится ряд определений и понятий, введённых в статье [4].

Определение грубых траекторий. Зафиксируем какие-либо $T > 0$ и $\alpha \in (0,1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^\alpha([0,T],V)$ и $C_2^\alpha([0,T],V)$ обозначим множества функций $f:[0,T]\to V$ и $g:[0,T]^2\to V$ соответственно, для которых величины

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|f_t - f_s|}{|t-s|^\alpha} \quad \text{и} \quad \|g\|_{\alpha,2} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|g_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

конечны. Далее для функции двух переменных $g_{s,t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha,2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s,t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $C_b^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ нормированное пространство функций $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, норма в котором задаётся равенством

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^{k} \|D^i h\|_\infty,$$

где $\|D^i h\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |D^i h(x)|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ множество α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий, т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0,T], V^{\bigotimes i})$ для любого $i = \overline{1,n}$, и для всех $s,u,t \in [0,T]$ выполняется тождество Чена $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t}$, в котором $(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{X}_{s,u}^j \bigotimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}$. Отметим, что операция $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} V^{\bigotimes i}$, где $V^{\bigotimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X} : [0,T]^2 \to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t \in [0,T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ называется *геометрической*, если

$$\operatorname{Sym}(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!}(\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\bigotimes i} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n}.$$

Множество геометрических грубых траекторий обозначим через $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ является *грубой траекторией* над $X \in C^\alpha([0,T],V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$ для любых $t \in [0,T]$.

Определение слабо управляемых грубых траекторий. Пусть $X \in C^\alpha([0,T],V)$, а $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X. Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0,T],W)$ *слабо управляется грубой траекторией* $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, если существуют функции $Y^{(1)} : [0,T] \to \mathcal{L}(V,W)$, …, $Y^{(n-1)} : [0,T] \to \mathcal{L}(V^{\bigotimes (n-1)}, W)$ такие, что

$$Y_{s,t} = Y_s^{(1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n}, \quad Y_{s,t}^{(1)} = Y_s^{(2)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad Y_{s,t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)}\mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}, \quad Y_{s,t}^{(n-1)} = R_{s,t}^{Y,1};$$

а величина $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$, $i = \overline{1,n}$, конечна для каждого из остаточных членов $R^{Y,i}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *грубой производной* порядка i от Y.

Введём банахово пространство

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W) = \left\{(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) : Y \in C^\alpha([0,T],W), \ \sum_{i=1}^{n} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty\right\},$$

задав сначала в нём полунорму

$$\|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} := \sum_{i=1}^{n} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha},$$

а затем определив норму элемента $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T],W)$ равенством

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} := \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| + \|(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha},$$

где $Y_t^{(0)} = Y_t$.

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $Y \in C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(V,W))$, $(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0,T], \mathcal{L}(V,W))$. Зафиксируем некоторые $s,t \in [0,T]$, $s < t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s,t]$, а через $|\mathcal{P}|$ его диаметр.

Грубым потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r\, d\mathbf{X}_r$ назовём следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s,t]$):

$$\int\limits_s^t Y_r\, d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

Определение грубых траекторий на полуоси. Пусть $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $X \in C^{\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, т.е. при любом $T > 0$ сужение $X|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $C^{\beta}([0,T], \mathbb{R})$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ определим $\mathbf{X}^i_{s,t} = (X_{s,t})^i / i!$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Элемент $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) : \mathbb{R}^2_+ \to T^{(n)}(\mathbb{R})$ будем называть *геометрической грубой траекторией* над X. Множество геометрических грубых траекторий $\mathbf{X}$ над X по всем $X \in C^{\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ обозначим через $\mathscr{C}^{\beta}_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Если $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\beta}_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, то $\mathbf{X}|_{[0,T]^2} \in \mathscr{C}^{\beta}_g([0,T], \mathbb{R})$ для любого $T > 0$.

Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$. Будем говорить, что функция $Y \in C^{\alpha}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *слабо управляется* геометрической грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\beta}_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, если существуют функции $Y^{(i)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, такие, что величины $\|R^{Y,i}|_{[0,T]^2}\|_{i\alpha}$ конечны при любом $T > 0$ для каждого остаточного члена $R^{Y,i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, где

$$R^{Y,i}_{s,t} = Y^{(n-i)}_{s,t} - \sum_{j=1}^{i-1} Y^{(n-i+j)}_s \mathbf{X}^j_{s,t}.$$

Скажем, что вектор-функция $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ принадлежит множеству $\mathcal{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, если при любом $T > 0$ её сужение $\mathbf{Y}|_{[0,T]}$ принадлежит пространству $\mathcal{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}([0,T], \mathbb{R})$.

Пусть $Y \in C^{\alpha}([0,T], \mathbb{R})$, $(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}([0,T], \mathbb{R})$; $g \in C^n_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. По аналогии с формулой Фаа-Ди-Бруно положим (см., например, [4])

$$(g(Y))^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} D^j f(Y) B_{k,j}(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k-j+1)}), \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

где $B_{k,j}(x_1, \ldots, x_{k-j+1})$ – многочлены Белла [4].

Стохастические дифференциальные уравнения, управляемые грубыми траекториями. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t \in \mathbb{R}_+$, такой, что почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству $C^{\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$. Определим процесс $\mathbf{X}_\cdot = (1, \mathbf{X}^1_{0,\cdot}, \ldots, \mathbf{X}^n_{0,\cdot})$ как случайную величину, принимающую значения во множестве $\mathscr{C}^{\beta}_g(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ п.н., где $\mathbf{X}^i_{s,t} = (X_{s,t})^i / i!$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t) dX_t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Определение. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением* уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ назовём $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ со значениями в $\mathcal{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ п.н., $1/(n+1) < \alpha < \beta$, такую, что случайный процесс $\mathbf{Y}_t$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным и п.н. для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)\, d\mathbf{X}_s,$$

интеграл в котором является грубым потраекторным интегралом, а грубые производные от $f(Y)$, участвующие в его определении, задаются формулами (3). Решение уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ будем называть *единственным*, если для любых двух решений $\mathbf{Y}$ и $\bar{\mathbf{Y}}$ уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}}) = 1$. В дальнейшем решением уравнения (4) будем также называть и процесс Y_t.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dZ_t = f(Z_t)\, dt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Пусть S_t, $t \in \mathbb{R}$, – поток, соответствующий уравнению (2), т.е. $Z_t = S_t Z_0$.

Предложение [4, теорема 3]. *Пусть* $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \in \mathscr{C}_g^\beta(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *п.н. Если* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *то для любой* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *существует единственное решение* $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)})$ *уравнения (4) с начальным условием* $Y_0 = \xi$ *и п.н. выполняются равенства*

$$Y_t = S_{X_{0,t}}\xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t), \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $(D_f h)(z) := f(z) Dh(z)$.

В дальнейшем полагаем, что $X_t = B_t^H$, где B_t^H – одномерное дробное броуновское движение с индексом Хёрста $H \in (0,1)$, а функция f принадлежит классу $C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, где $(n+1)H > 1$.

Теорема 1. *Пусть* Y_t^x *– решение уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = x \in \mathbb{R}$, *функция* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция* $u(x,t) = \mathbb{E}(h(Y_t^x))$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = (A_t u(t, \cdot))(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

и начальному условию $u(x, 0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *где*

$$(A_t \psi)(x) = H t^{2H-1} f(x)(f(x)\psi''(x) + f'(x)\psi'(x)).$$

Доказательство. Определим функцию $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G(x, \tau) = h(S_\tau x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито [9] к процессу $G(x, B_t^H)$, $t \in \mathbb{R}_+$, получаем соотношение

$$G(x, B_t^H) = G(x, 0) + \int_0^t \frac{\partial G(x, B_s^H)}{\partial \tau} \diamond dB_s^H + \int_0^t H s^{2H-1} \frac{\partial^2 G(x, B_s^H)}{\partial \tau^2}\, ds, \tag{5}$$

стохастический интеграл в котором – это интеграл Вика–Ито–Скорохода [10, гл. 2].

Используя соотношение

$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = f(x) \frac{\partial Z(x,t)}{\partial x},$$

где $Z(x,t)$ – решение уравнения (2) с начальным условием $Z_0 = x$, выразим частную производную $\partial^2 G(x,\tau)/\partial \tau^2$ через частные производные $\partial^2 G(x,\tau)/\partial x^2$ и $\partial G(x,\tau)/\partial x$. Получаем

$$\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial \tau} = h'(Z(x,\tau)) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial \tau} = h'(Z(x,\tau)) f(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial \tau^2} = h''(Z(x,\tau)) \left(f(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 + h'(Z(x,\tau)) f(x) \frac{\partial^2 Z(x,\tau)}{\partial x \partial \tau} =$$

$$= h''(Z(x,\tau)) \left(f(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 + h'(Z(x,\tau)) f(x) \left(f'(x) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} + f(x) \frac{\partial^2 Z(x,\tau)}{\partial x^2} \right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial x} = h'(Z(x,\tau)) \frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial x^2} = h''(Z(x,\tau)) \left(\frac{\partial Z(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 + h'(Z(x,\tau)) \frac{\partial^2 Z(x,\tau)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

В силу равенств (6)–(8) находим, что

$$\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial \tau^2} = f^2(x)\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial x^2} + f(x)f'(x)\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial x}. \tag{9}$$

Согласно предложению имеем $u(x,t) = \mathbb{E}G(x, B_t^H)$. Тогда из соотношений (5), (9), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$u(x,t) = \psi(x,0) + \int\limits_0^t Hs^{2H-1}(D_f^2 u(\,\cdot\,,s))(x)\,ds,$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Ht^{2H-1}D_f^2 u.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $p(t,x,y)$ – плотность распределения решения Y_t^x уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = x \in \mathbb{R}$. Тогда функция $p(t,x,y)$ удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = (A_t^* p(t,x,\cdot))(y), \quad t>0, \quad x,y\in\mathbb{R},$$

где A_t^* – оператор, сопряжённый к оператору A_t.

Доказательство. Существование и гладкость функции $p(t,x,y)$ вытекают из предложения.

Возьмём произвольную функцию $h(y)$ с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим через A_t оператор, действующий по правилу

$$(A_t h)(y) = Ht^{2H-1}f(y)\Big(f(y)h''(y) + f'(y)h'(y)\Big), \quad t>0, \quad y\in\mathbb{R}.$$

Пусть $u(x,t) = \mathbb{E}h(Y_t^x)$, тогда

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)p(t,x,y)\,dy.$$

Применяя теорему 1 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(h(y)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} - p(t,x,y)(A_t h)(y)\right)dy = 0,$$

из которого вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(h(y)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} - h(y)(A_t^* p(t,x,\cdot))(y)\right)dy = 0. \tag{10}$$

Теперь из соотношения (10) и плотности в пространстве $L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные ограниченные производные всех порядков, вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Замечание. Если $H = 1/2$, то результаты теорем 1 и 2 совпадают с уравнениями Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений стохастических дифференциальных уравнений Ито $dY_t = f(Y_t)\,dW_t$, где W_t – стандартное броуновское движение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
3. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Func. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
4. *Васьковский М.М.* Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.
5. *Васьковский М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1443–1449.
6. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минс77 юк, 2019.
7. *Baudoin F., Coutin L.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions // Stoch. Processes and their Appl. 2007. V. 117. P. 550–574.
8. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stoch. Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
9. *Cheridito P., Nualart D.* Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter h in (0,1/2) // Ann. Inst. Henri Poincare Probab. Stat. 2005. V. 41. № 6. P. 1049–1081.
10. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 23.08.2021 г.
После доработки 23.09.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.