ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 17–22

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ СВОЙСТВО ПОСТОЯНСТВА ШИРИНЫ

© 2022 г. А. С. Войделевич

Получено полное описание линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих свойство решений быть множествами постоянной ширины.

DOI: 10.31857/S0374064122010034

1. Введение. Постановка задачи. Решения обыкновенных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1; 2, с. 14] при каждом значении независимой переменной являются компактными выпуклыми множествами. Поэтому исследование свойств решений таких уравнений включает в себя изучение изменения и/или асимптотического поведения как функций независимой переменной геометрических характеристик множеств, являющихся значениями решения. Так, например, в работе [3] вычислены показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений.

Изучению геометрических характеристик решений линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары посвящена и настоящая работа, но прежде чем сформулировать полученный результат приведём ряд необходимых определений.

Для произвольного множества $X\subset\mathbb{R}^d$ и любого вектора $v\in\mathbb{R}^d$ единичной длины через $w(X,v)$ обозначим длину ортогональной проекции множества X на прямую, параллельную вектору v, т.е. $w(X,v)=\sup\limits_{x\in X}v^{\mathrm{T}}x-\inf\limits_{x\in X}v^{\mathrm{T}}x$.

Определение 1. Множество $X\subset\mathbb{R}^d$ называется *множеством постоянной ширины*, если длина его ортогональной проекции на произвольную прямую равна одному и тому же числу $w(X)$, которое называется *шириной множества* X.

Определение 2. *Суммой Минковского* $Z=X+Y$ двух множеств $X,Y\subset\mathbb{R}^d$ называется множество $Z\overset{\text{def}}{=}\{x+y\colon x\in X,\ \ y\in Y\}$.

Для матрицы A, имеющей d столбцов, и $X\subset\mathbb{R}^d$ положим $AX=\{Ax: x\in X\}$. Отметим, что для действительных матриц A и B, состоящих из d столбцов, и множества $X\subset\mathbb{R}^d$, вообще говоря, $(A+B)X\neq AX+BX$.

Определение 3 [1]. Множество $Z\subset\mathbb{R}^d$ такое, что $X=Y+Z$, где $X,Y\subset\mathbb{R}^d$, называется *разностью Хукухары* между множествами X и Y и обозначается как $Z=X-Y$.

Через $B\overset{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^d\colon \|x\|\leqslant 1\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$.

Определение 4. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина
$$h(X,Y)\overset{\text{def}}{=}\inf\{r\geqslant 0: X\subset Y+rB,\ \ Y\subset X+rB\},\quad X,Y\in\Omega(\mathbb{R}^d).$$

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Согласно теореме Хана пара $(K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),h)$ – полное метрическое пространство. Через $I\subset\mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря, неограниченный.

Определение 5 [1]. Отображение $X\colon I \to K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0 \in I$, если пределы

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0+\Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0) - X(t_0-\Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_H X(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_H X = \sum_{i=1}^{n} A_i(t) X, \quad X(t) \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \tag{1}$$

с непрерывными $d\times d$-матрицами коэффициентов $A_i(\cdot)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Будем говорить, что уравнение (1) *сохраняет свойство постоянства ширины*, если для произвольного её решения $X(\cdot)$ такого, что $X(0)$ – множество постоянной ширины, верно, что $X(t)$ – множество постоянной ширины при любом $t \geqslant 0$. Естественно возникает задача получить необходимое и достаточное условие того, что уравнение (1) сохраняет свойство множества иметь постоянную ширину. Полное решение сформулированной задачи даёт теорема, доказанная в данной работе.

2. Основной результат. Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $X\colon [a,b] \to K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– дифференцируемое отображение. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такая последовательность чисел* $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$, *что верны неравенства*

$$h\biggl(\frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, D_H X(t_i)\biggr) < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Доказательство. Назовём число $c \in (a,b]$ *хорошим*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность чисел $a = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{m+1} = c$, что

$$h\biggl(\frac{X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i)}{\tau_{i+1} - \tau_i}, D_H X(\tau_i)\biggr) < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Через S обозначим множество всех хороших чисел. Необходимо доказать, что $b \in S$. Так как отображение X дифференцируемо в точке a, то, очевидно, множество S непустое. Обозначим $\sup S$ через ξ. Покажем, что ξ – хорошее число. Из определения производной следует, что для некоторого $\delta > 0$ и любого $t \in [\xi - \delta, \xi)$ выполнено неравенство

$$h\biggl(\frac{X(\xi) - X(t)}{\xi - t}, D_H X(\xi)\biggr) < \varepsilon.$$

Так как в полуинтервале $[\xi - \delta, \xi)$ найдётся хотя бы один элемент множества S, то ξ – хорошее число. Аналогичным образом доказывается, что если $\xi < b$, то найдётся хорошее число $\eta > \xi$. Последнее неравенство противоречит определению точной верхней грани числового множества. Следовательно, $b \in S$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $X\colon [a,b] \to K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любых* $t_0 < t_1 \in [a,b]$, *для которых* $t_1 - t_0 \leqslant \delta$, *верно неравенство*

$$h\biggl(\frac{X(t_1) - X(t_0)}{t_1 - t_0}, D_H X(t_0)\biggr) < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Выберем такое $\delta > 0$, что для любых $t_0, t_1 \in [a,b]$, для которых $|t_1 - t_0| \leqslant \delta$, верно неравенство $h(D_H X(t_0), D_H X(t_1)) < \varepsilon/2$. Существование такого числа

δ вытекает из непрерывности производной $D_H X(\cdot)$. Согласно лемме 1 найдётся такая последовательность $t_0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{m+1} = t_1$, что

$$h(X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i), \Delta\tau_i D_H X(\tau_i)) < \frac{\varepsilon}{2}\Delta\tau_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

где $\Delta\tau_i \overset{\text{def}}{=} \tau_{i+1} - \tau_i$. Следовательно,

$$h\biggl(X(t_1) - X(t_0), \sum_{i=1}^{m} \Delta\tau_i D_H X(\tau_i)\biggr) < \frac{\varepsilon}{2}(t_1 - t_0).$$

С другой стороны, в силу выбора числа δ справедливо неравенство

$$h\biggl((t_1 - t_0) D_H X(t_0), \sum_{i=1}^{m} \Delta\tau_i D_H X(\tau_i)\biggr) = h\biggl(\sum_{i=1}^{m} \Delta\tau_i D_H X(t_0), \sum_{i=1}^{m} \Delta\tau_i D_H X(\tau_i)\biggr) < \frac{\varepsilon}{2}(t_1 - t_0).$$

Поэтому $h(X(t_1) - X(t_0), (t_1 - t_0) D_H X(t_0)) < \varepsilon(t_1 - t_0)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $X\colon [a,b] \to K_c(\mathbb{R}^d)$ *– решение уравнения (1) и для каждого натурального числа* m *последовательность* $(X_j^m)_{j=0}^m$ *выпуклых компактных множеств определена равенствами*

$$X_0^m = X(a), \quad X_{j+1}^m = X_j^m + \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{n} A_i\biggl(a + \frac{b-a}{m} j\biggr) X_j^m, \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Тогда $X_m^m \to X(b)$ *при* $m \to +\infty$.

Доказательство. Обозначим $\max\limits_{t\in[a,b]} \sum_{i=1}^n \|A_j(t)\|$ через M. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 2 существует такое натуральное число N_ε, что для любых $t_0, t_1 \in [a,b]$, для которых $0 < t_1 - t_0 < (b-a)/N_\varepsilon$, верно неравенство (2). Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$. Обозначим $\Delta t = (b-a)/m$ и $t_j = a + j(b-a)/m$, $0 \leqslant j \leqslant m$. Индукцией по j докажем неравенство

$$h(X(t_j), X_j^m) \leqslant \varepsilon\Delta t \sum_{k=0}^{j} (1 + M\Delta t)^k.$$

При $j = 0$ неравенство, очевидно, выполнено. Предположим, что неравенство верно для некоторого j от 0 до $m-1$. Тогда

$$\begin{aligned}
h(X(t_{j+1}), X_{j+1}^m) &\leqslant h\biggl(X(t_{j+1}), X(t_j) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} A_i(t_j) X(t_j)\biggr) + \\
&+ h\biggl(X(t_j) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} A_i(t_j) X(t_j), X_j^m + \Delta t \sum_{i=1}^{n} A_i(t_j) X_j^m\biggr) \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon\Delta t + h(X(t_j), X_j^m) + \Delta t \sum_{i=1}^{n} h(A_i(t_j) X(t_j), A_i(t_j) X_j^m) \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon\Delta t + (1 + M\Delta t) h(X(t_j), X_j^m) \leqslant \varepsilon\Delta t \sum_{k=0}^{j+1} (1 + M\Delta t)^k.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$h(X(b), X_m^m) \leqslant \varepsilon\Delta t \sum_{k=0}^{m} (1 + M\Delta t)^k = \varepsilon\Delta t \frac{(1 + M\Delta t)^{m+1} - 1}{M\Delta t} \leqslant \frac{\varepsilon}{M} e^{M(m+1)\Delta t}.$$

Так как $(m+1)\Delta t \leqslant 2(b-a)$, то $X_m^m \to X(b)$ при $m \to +\infty$. Лемма доказана.

Через $\mathbb{O}_d$ обозначим множество всех действительных $d\times d$-матриц A, для каждой из которых найдётся такое действительное число $\alpha\in\mathbb{R}$, что выполнено равенство $A^{\mathrm{T}}A=\alpha^2 I$. Другими словами, множество $\mathbb{O}_d$ состоит из всех $d\times d$-матриц, вектор-столбцы которых попарно ортогональны и равны по длине. Очевидно, что если $A\in\mathbb{O}_d$, то и $A^{\mathrm{T}}\in\mathbb{O}_d$.

Лемма 4. *Семейство множеств постоянной ширины замкнуто относительно сложения и умножения на матрицы из множества* $\mathbb{O}_d$.

Доказательство. Пусть $X,Y\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ – множества постоянной ширины и $A\in\mathbb{O}_d$. Покажем, что $X+Y$ и AX – множества постоянной ширины. Выберем произвольные векторы v_1 и $v_2\in\mathbb{R}^d$ единичной длины. Так как $A\in\mathbb{O}_d$, то для некоторого $\alpha\geqslant 0$ верно равенство $AA^{\mathrm{T}}=\alpha^2 I$. Поэтому $\|A^{\mathrm{T}}v_1\|=\|A^{\mathrm{T}}v_2\|=\alpha$. Утверждение леммы следует из равенств

$$w(X+Y,v_1)=w(X,v_1)+w(Y,v_1)=w(X,v_2)+w(Y,v_2)=w(X+Y,v_2),$$

$$w(AX,v_1)=\|A^{\mathrm{T}}v_1\|w\bigg(X,\frac{A^{\mathrm{T}}v_1}{\|A^{\mathrm{T}}v_1\|}\bigg)=\|A^{\mathrm{T}}v_2\|w\bigg(X,\frac{A^{\mathrm{T}}v_2}{\|A^{\mathrm{T}}v_2\|}\bigg)=w(AX,v_2).$$

(Отметим, что последняя цепочка равенств имеет смысл, если $\alpha\neq 0$. Если же $\alpha=0$, то, очевидно, $w(AX,v_1)=0$ и $w(AX,v_2)=0$.)

Лемма 5. *Если* $A_i(t)\in\mathbb{O}_d$, $1\leqslant i\leqslant n$, *при всех* $t\geqslant 0$, *то уравнение (1) сохраняет свойство постоянства ширины.*

Доказательство. Пусть $X(\cdot)$ – какое-либо решение уравнения (1) такое, что $X(0)$ – множество постоянной ширины. Зафиксируем какой-либо момент времени $t>0$ и докажем, что $X(t)$ – множество постоянной ширины. Для произвольного натурального m рассмотрим последовательность $(X_j^m)_{j=1}^m$, определённую в лемме 3. Индукцией по j доказывается, что X_j^m – множество постоянной ширины. Действительно, база индукции выполнена, так как $X_0^m = X(0)$, а справедливость шага индукции следует из леммы 4.

Так как $X_m^m\to X(t)$ при $m\to+\infty$, то $X(t)$ – множество постоянной ширины. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* a *и* b *– различные неотрицательные действительные числа. Тогда найдётся такое* $\varepsilon>0$, *что для всех действительных чисел* x *и* y *верно неравенство*

$$\sqrt{ax^2+by^2}+\sqrt{bx^2+ay^2}\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\varepsilon)\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Для произвольных действительных чисел α_1, β_1, α_2, β_2 справедливо неравенство

$$\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}+\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}\geqslant\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2}, \tag{4}$$

которое следует из неравенства треугольника. При этом неравенство (4) обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $(\alpha_1,\beta_1)^{\mathrm{T}}$ и $(\alpha_2,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ коллинеарны, т.е. $\alpha_1\beta_2=\alpha_2\beta_1$.

Рассмотрим функцию $f(x,y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sqrt{ax^2+by^2}+\sqrt{bx^2+ay^2}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, заданную на окружности $\mathrm{S}^1\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$ единичного радиуса с центром в начале координат. Согласно неравенству (4) имеем

$$\sqrt{ax^2+by^2}+\sqrt{bx^2+ay^2}\geqslant\sqrt{(\sqrt{a}x+\sqrt{b}x)^2+(\sqrt{a}y+\sqrt{b}y)^2}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $f(x,y)\geqslant 0$. Более того, так как векторы $(ax,by)^{\mathrm{T}}$ и $(bx,ay)^{\mathrm{T}}$ не коллинеарны при $(x,y)\in\mathbb{S}^1$, то $f(x,y)>0$. Непрерывная функция $f(x,y)$ достигает минимального значения на компактном множестве $\mathbb{S}^1$. Поэтому $\varepsilon\stackrel{\mathrm{def}}{=}\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{S}^1}f(x,y)>0$. Следовательно, при $(x,y)\in\mathbb{S}^1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{ax^2+by^2}+\sqrt{bx^2+ay^2}\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\varepsilon). \tag{5}$$

Пусть теперь x и y – произвольные действительные числа. Если $x = y = 0$, то неравенство (3), очевидно, верно. Если $x^2 + y^2 \neq 0$, то неравенство (3) вытекает из неравенства (5), в котором вместо x и y следует взять $x/\sqrt{x^2+y^2}$ и $y/\sqrt{x^2+y^2}$ соответственно, а затем умножить левую и правую части на $\sqrt{x^2+y^2}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть a_i, b_i, c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ – действительные числа такие, что квадратичные формы $a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2$ неотрицательно определены и верно тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2} \equiv \sqrt{x^2+y^2}. \tag{6}$$

Тогда $a_i = c_i$ и $b_i = 0$, $q \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Предположим противное. Без нарушения общности будем считать, что либо $a_1 \neq c_1$, либо $b_1 \neq 0$. Существует ортогональная замена координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

которая приводит квадратичную форму $a_1 x^2 + 2b_1 xy + c_1 y^2$ к канонической форме. При этом ортогональная замена координат не меняет коэффициенты у квадратичных форм со скалярной матрицей коэффициентов, т. е. с диагональной матрицей коэффициентов, элементы главной диагонали которой равны. Поэтому далее считаем, что $b_1 = 0$, но $a_1 \neq c_1$.

Подставляя в тождество (6) вместо x и y соответственно числа 1 и 0, находим, что $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} = 1$. Аналогично, $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i} = 1$. Меняя местами x и y в тождестве (6), получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i x^2 + 2b_i xy + a_i y^2} = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{7}$$

Сложив тождества (6) и (7), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2} + \sqrt{c_i x^2 + 2b_i xy + a_i y^2} \right) = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Согласно лемме 6 при некотором $\varepsilon > 0$ для всех действительных чисел x и y верно неравенство

$$\sqrt{a_1 x^2 + c_1 y^2} + \sqrt{c_1 x^2 + a_1 y^2} \geqslant (\sqrt{a_1} + \sqrt{c_1} + \varepsilon)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=2}^{n} \left(\sqrt{a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2} + \sqrt{c_i x^2 + 2b_i xy + a_i y^2} \right) \leqslant (2 - \sqrt{a_1} - \sqrt{c_1} - \varepsilon)\sqrt{x^2+y^2}. \tag{8}$$

Из неравенства (8) при $x = 1$ и $y = 0$ вытекает, что

$$\sum_{i=2}^{n} (\sqrt{a_i} + \sqrt{c_i}) \leqslant 2 - \sqrt{a_1} - \sqrt{c_1} - \varepsilon = \sum_{i=2}^{n} (\sqrt{a_i} + \sqrt{c_i}) - \varepsilon.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 8. *Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_n – действительные $d \times d$-матрицы и $\alpha \geqslant 0$. Равенство*

$$\|A_1 v\| + \|A_2 v\| + \ldots + \|A_n v\| = \alpha \|v\| \tag{9}$$

выполнено для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^d$, если и только если найдутся такие неотрицательные действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, что

$$A_i^{\mathrm{T}} A_i = \alpha_i^2 I, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha. \tag{10}$$

Доказательство. Если для неотрицательных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ выполнены равенства (10), то для любого вектора $v\in\mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\|A_iv\|=\sqrt{v^{\text{т}}A_i^{\text{т}}A_iv}=\alpha_i\sqrt{v^{\text{т}}v}=\alpha_i\|v\|,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

а значит, $\sum_{i=1}^n\|A_iv\|=\sum_{i=1}^n\alpha_i\|v\|=\alpha\|v\|$.

Предположим теперь, что равенство (9) верно для произвольного вектора $v\in\mathbb{R}^d$. Докажем, что вектор-столбцы матриц A_i, $1\leqslant i\leqslant n$, попарно ортогональны и имеют равные длины. Пусть e_j и e_k – векторы канонического базиса пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда A_ie_j и A_ie_k – столбцы матрицы A_i с номерами j и k соответственно. Обозначим $a_i=\|A_ie_j\|^2$, $b_i=(A_ie_j,A_ie_k)$ и $c_i=\|A_ie_k\|^2$. Для произвольных действительных чисел x и y положим $v=xe_j+ye_k$. Так как

$$\|A_iv\|=\sqrt{a_ix^2+2b_ixy+c_iy^2}\quad\text{и}\quad\|v\|=\sqrt{x^2+y^2},$$

то из леммы 7 следует, что $a_i=c_i$ и $b_i=0$.

Обозначим через α_i длину вектор-столбцов матрицы A_i. Тогда $\|A_i^{\text{т}}A_i\|=\alpha_i^2I$, а значит, $\|A_iv\|=\alpha_i\|v\|$, $v\in\mathbb{R}$. Следовательно, $\sum_{i=1}^n\alpha_i=\alpha$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если уравнение (1) сохраняет свойство постоянства ширины, то* $A_i(t)\in\mathbb{O}_d$, $1\leqslant i\leqslant n$, *при всех* $t\geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $X(\cdot)$ – решение уравнения (1) такое, что $X(0)=B$ (напомним, что через B мы обозначили замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат). Пусть $w(t)$ – ширина множества $X(t)$ в момент времени $t\geqslant 0$. Выберем произвольный вектор $v\in\mathbb{R}^d$ единичной длины. Так как

$$\dot w(t)=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{w(X(t+\Delta t),v)-w(X(t),v)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{w(X(t+\Delta t)-X(t),v)}{\Delta t}=$$

$$=w(\dot X(t),v)=\sum_{i=1}^n w(A_i(t)X(t),v)=\sum_{i=1}^n\|A_i^{\text{т}}(t)v\|w\biggl(X(t),\frac{A_i^{\text{т}}(t)v}{\|A_i^{\text{т}}(t)v\|}\biggr)=w(t)\sum_{i=1}^n\|A_i^{\text{т}}(t)v\|$$

и $w(t)>0$, то величина $\sum_{i=1}^n\|A_i^{\text{т}}v\|$ не зависит от выбора вектора v. Из леммы 8 следует, что $A_i(t)\in\mathbb{O}_d$, $1\leqslant i\leqslant n$. Лемма доказана.

Из лемм 5 и 9 вытекает основной результат работы.

Теорема. *Уравнение (1) сохраняет свойство постоянства ширины, если и только если существуют такие непрерывные функции* $\alpha_1(\cdot),\alpha_2(\cdot),\ldots,\alpha_n(\cdot)\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$, *что при всех* $t\geqslant 0$ *верны равенства*

$$A_i(t)^{\text{т}}A_i(t)=\alpha_i(t)E,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hukuhara M.* Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. London, 2006.
3. *Войделевич А.С.* Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.
4. *Войделевич А.С.* Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
После доработки 20.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.