ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 23–36

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ, ЗАДАЮЩИХ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ, ПО ВЫХОДНЫМ ДАННЫМ

© 2022 г. Ш. А. Алимов, Н. М. Комилов

Рассматривается математическая модель процесса разогрева цилиндрической области с помощью расположенных в ней источников тепла в предположении, что на боковой поверхности теплообмен с окружающей средой происходит в соответствии с законом Ньютона. Процесс разогрева управляется при помощи введения или выведения охлаждающих элементов. Доказывается, что характер изменения во времени объёма вводимых охлаждающих элементов однозначно восстанавливается по выходной мощности – функции временнóй переменной, представляющей собой среднее взвешенное значение температуры в области.

DOI: 10.31857/S0374064122010046

1. Введение. Постановка задачи и формулировка результатов. В работе рассматривается математическая модель процесса разогрева некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с помощью расположенных в ней источников тепла. Область Ω предполагается имеющей цилиндрическую форму: $\Omega = D \times (0, H)$. Основание $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ представляет собой выпуклую область с гладкой границей, а высота H является положительным числом.

В рассматриваемой области с некоторой плотностью $g(x)$, $x \in \Omega$, распределены постоянные источники тепла. Управление процессом разогрева производится путём опускания сверху или подъёма вверх охлаждающих элементов. При этом изменяется высота h "активной" зоны, свободной от охлаждающих элементов, где $0 \leqslant h \leqslant H$. Управление температурой носителя тепла производится изменением высоты $h(t)$ во времени.

Таким образом, управляющим параметром является непрерывная функция $h(t)$, выбором которой обеспечивается необходимый температурный режим.

Введём обозначение $x = (\widetilde{x}, x_n)$, где $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in D$ и $0 < x_n < H$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

с граничными условиями Робена

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(\tilde{x}) u(x,t) = 0, \quad x \in \partial D \times [0, H], \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(\widetilde{x}, 0, t)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(\widetilde{x}, H, t)}{\partial x_n} = 0, \quad \widetilde{x} \in D, \quad t > 0, \tag{3}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Мы предполагаем, что свободный член уравнения (1) имеет вид

$$f(x,t) = g(\widetilde{x}) \omega(x_n, h(t)), \tag{5}$$

где $h = h(t)$ – неизвестная непрерывная функция, удовлетворяющая при $t \geqslant 0$ условию

$$0 \leqslant h(t) \leqslant H, \tag{6}$$

а кусочно-постоянная функция ω определяется равенством

$$\omega(x_n, h) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x_n \leqslant h, \\ 0 & \text{при} \quad x_n > h. \end{cases} \tag{7}$$

Функция g в равенстве (5), представляющая собой плотность распределения источников тепла, предполагается неотрицательной и принадлежащей классу $L_2(D)$. Далее будем предполагать, что функция $g(\tilde{x})$ принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, совпадающему с замыканием $C_0^\infty(D)$ по норме пространства Соболева $W_2^1(D)$. Это означает, что плотность источников тепла становится пренебрежимо малой при приближении к цилиндрической границе области Ω.

Коэффициент теплообмена $\sigma = \sigma(\widetilde{x})$ – заданная гладкая функция, не зависящая от координаты x_n и не равная тождественно нулю. Условие (2) означает, что на поверхности $\partial D \times \times [0, H]$ теплообмен с окружающей средой происходит в соответствии с законом Ньютона (см. [1, гл. III, § 1, п. 4]).

Пусть $\rho = \rho(\widetilde{x})$ – заданная весовая функция, не зависящая от x_n. Это означает, что

$$\rho(\tilde{x}) \geqslant 0, \quad \tilde{x} \in D, \quad \int\limits_D \rho(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \frac{1}{H}, \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\Omega \rho(\tilde{x})\, dx = \int\limits_0^H dx_n \int\limits_D \rho(\tilde{x})\, d\tilde{x} = 1.$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что весовая функция $\rho(\tilde{x})$ принадлежит классу $L_2(D)$ и не является ортогональной к плотности $g(\tilde{x})$.

Среднее взвешенное значение $\bar{u}(t)$ температуры по области Ω определяется равенством

$$\bar{u}(t) = \int\limits_\Omega u(x, t)\rho(\tilde{x})\, dx.$$

Как правило, среднее взвешенное значение температуры однозначно определяет выходную мощность рассматриваемого процесса.

В моделируемом процессе возможна критическая ситуация, когда, зная значение $\bar{u}(t)$, мы должны для прояснения указанной ситуации получить информацию о $h(t)$, прямой доступ к которой невозможен. Иначе говоря, можно ли на основе информации о выходе $\bar{u}(t)$ определить, каким образом менялось управление $h(t)$ процессом нагревания, в частности, были ли нарушены установленные требования и ограничения.

Математически задача может быть сформулирована следующим образом: можно ли для заданной функции $\theta(t)$ найти однозначно характеристику процесса $h(t)$ такую, что при этой характеристике среднее взвешенное значение температуры совпадает с функцией $\theta(t)$.

Для того чтобы ввести определение решения задачи (1)–(4), обозначим символом $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$ класс функций из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|^2_{W_2^2(\Omega)} = \|v\|^2 + \sum_{j=1}^n \|D_j^2 v\|^2, \tag{9}$$

удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} + \sigma v(x) = 0, \quad x \in \partial D \times [0, H], \quad D_n v(\tilde{x}, 0) = D_n v(\tilde{x}, H) = 0. \tag{10}$$

В равенстве (9) $D_j = \partial/\partial x_j$, а норма без нижнего индекса означает норму в $L_2(\Omega)$ (см. [2, гл. III, § 9, формула (1)]).

Из полноты пространства Соболева и из теорем вложения о следах (см. [2, гл. V, § 24]) вытекает, что класс $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $W_2^2(\Omega)$.

Для любого банахового пространства B и произвольного $T>0$ через $C([0,T]\to B)$ обозначим банахово пространство всех непрерывных отображений $u:[0,T]\to B$ с нормой

$$\|u\|_T=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|,$$

а через $C((0,T)\to B)$ – линейное пространство всех отображений $u:(0,T)\to B$, непрерывных на интервале $(0,T)$.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ является *обобщённым решением* задачи (1)–(4), если

$$u\in C([0,T]\to \widetilde{W}_2^2(\Omega)), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in C((0,T)\to L_2(\Omega)) \tag{12}$$

и выполняются уравнение (1) и начальное условие (4).

Заметим, что, согласно теоремам вложения (см. [2, гл. V, § 20]), градиент решения имеет след на каждой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности. Таким образом, условия Робена (2) и Неймана (3) корректно определены.

Далее через $\overline{\mathbb{R}}_+$ обозначим полупрямую неотрицательных чисел, т.е. $\overline{\mathbb{R}}_+=\{t\in\mathbb{R}:t\geqslant 0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция* $\theta:\overline{\mathbb{R}}_+\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *дважды непрерывно дифференцируема на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *и удовлетворяет условиям*

$$\theta(0)=\theta'(0)=0,\quad \theta''(0)>0. \tag{13}$$

Тогда найдутся такие $T>0$ *и единственная непрерывно дифференцируемая функция* $h:[0,T]\to[0,H]$, *что решение* $u_h(x,t)$ *задачи (1)–(4) существует и удовлетворяет условию*

$$\int\limits_\Omega u_h(x,t)\rho(\tilde{x})\,dx=\theta(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{14}$$

Отметим, что проблеме управления процессом теплообмена посвящена обширная литература (подробную библиографию можно найти в монографиях [3, 4]). В работах последнего времени большее внимание уделяется прикладным аспектам данной проблемы (см., например, [5–7]).

Изложение настоящей работы построено следующим образом. В п. 2 для произвольной функции $h(t)$ находится решение задачи (1)–(4) в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа. Затем в п. 3 задача об отыскании функции $h(t)$ сводится к основному интегральному уравнению Вольтерры первого рода и изучаются свойства ядра соответствующего интегрального оператора. В п. 4 приводится доказательство теоремы и в заключительном п. 5 проводится анализ полученного решения.

2. Решение прямой задачи. Построение решения начально-краевой задачи (1)–(4) опирается на её спектральные свойства.

2.1. Рассмотрим полную ортонормированную в гильбертовом пространстве $L_2[0,H]$ систему, состоящую из функций

$$z_k(\xi)=\begin{cases}1/\sqrt{H}, & \text{если}\quad k=0,\\ \sqrt{2/H}\cos(k\pi\xi/H), & \text{если}\quad k=1,2,\ldots\end{cases} \tag{15}$$

Отметим, что функции (15) являются собственными функциями краевой задачи

$$-\frac{d^2z_k(\xi)}{d\xi^2}=\nu_k z_k(\xi),\quad 0<\xi<H,\quad z_k'(0)=z_k'(H)=0. \tag{16}$$

Её соответствующие собственные значения равны $\nu_k = (k\pi/H)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Ряд Фурье по системе (15) функции $\omega(x_n, h)$, определённой равенством (7), имеет вид

$$\omega(x_n, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(h) z_k(x_n),$$

в котором коэффициенты Фурье задаются равенством

$$\omega_k(h) = \begin{cases} h/\sqrt{H}, & \text{если} \quad k = 0, \\ k^{-1}\sqrt{2/H}\sin(kh), & \text{если} \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{17}$$

Отсюда для функции $\omega(x_n, h(t))$ получаем следующее представление:

$$\omega(x_n, h(t)) = \frac{1}{H}h(t) + \frac{2}{H}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kh(t))}{k}\cos\frac{k\pi x_n}{H}.$$

Обозначим через $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ собственные значения, а через $\{v_m\}$ собственные функции следующей спектральной задачи:

$$-\Delta v_m(\tilde{x}) = \mu_m v_m(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D, \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_m(\tilde{x})}{\partial \nu} + \sigma(\tilde{x}) v_m(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \partial D. \tag{18}$$

Данные собственные функции образуют в $L_2(D)$ полную ортонормированную систему (см. [8, гл. IV, § 1, теорема 3]). Спектральное разложение произвольной функции $g \in L_2(D)$ имеет вид

$$g(\tilde{x}) = \sum_{m=1}^{\infty}(g, v_m) v_m(\tilde{x}),$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(D)$; причём ряд сходится в метрике пространства $L_2(D)$.

Положим

$$\psi_{km}(x) = v_m(\tilde{x}) z_k(x_n), \quad x \in \Omega. \tag{19}$$

Функции (19) являются, согласно постановке задач (16) и (18), собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$-\Delta\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad x \in \Omega,$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu} + \sigma\psi(x) = 0, \quad x \in \partial D \times [0, H], \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0} = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=H} = 0, \quad \tilde{x} \in D.$$

Её соответствующие собственные значения λ_{km}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, задаются равенством

$$\lambda_{km} = \nu_k + \mu_m, \tag{20}$$

а ортонормированная система $\{\psi_{km}\}$ является полной в пространстве $L_2(\Omega)$.

Мы ищем решение задачи (1)–(4) в виде следующего ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(t)\psi_{km}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(t) v_m(\tilde{x}) z_k(x_n). \tag{21}$$

Принимая во внимание сказанное выше и подставляя ряд (21) в уравнение (1), приходим к уравнению

$$\frac{dc_{km}(t)}{dt} = -(\nu_k + \mu_m)c_{km}(t) + (g, v_m)\omega_k(h(t)), \tag{22}$$

решение которого с учётом начального условия (4) имеет вид

$$c_{km}(t) = (g, v_m)\int\limits_0^t e^{-(\nu_k+\mu_m)(t-\tau)}\omega_k(h(\tau))\,d\tau. \tag{23}$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(g, v_m)v_m(\tilde{x})z_k(x_n)\int\limits_0^t e^{-(\nu_k+\mu_m)(t-\tau)}\omega_k(h(\tau))\,d\tau. \tag{24}$$

2.2. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что функция (24) удовлетворяет включениям (11) и (12), уравнению (1) и начальному условию (4). Предварительно докажем несколько простых вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. *Коэффициенты (23) удовлетворяют оценке*

$$|c_{km}(t)| \leqslant \frac{C}{\lambda_{km}}\frac{|(g, v_m)|}{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

равномерно на полупрямой $\mathbb{R}_+$, *где числа* λ_{km} *определены равенством (20).*

Здесь и далее C обозначает некоторую положительную постоянную (не обязательно одну и ту же), которая не зависит от переменных и индексов.

Доказательство. 1. Пусть $k \geqslant 1$. Тогда из (23) и (17) получаем

$$|c_{km}| \leqslant |(g, v_m)|\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{km}}|\omega_k(h(\tau))|\,d\tau = |(g, v_m)|\sqrt{\frac{2}{H}}\int\limits_0^t \frac{|\sin(kh(\tau))|}{k}e^{-(t-\tau)\lambda_{km}}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{H}}\frac{|(g, v_m)|}{k}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{km}}\,d\tau \leqslant \sqrt{\frac{2}{H}}\frac{|(g, v_m)|}{k\lambda_{km}}.$$

2. Предположим теперь, что $k = 0$. Тогда, учитывая условие $0 \leqslant h(t) \leqslant H$, из (23) и (17) получаем

$$|c_{0m}| = |(g, v_m)|\frac{1}{\sqrt{H}}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{0m}}h(\tau)\,d\tau \leqslant \sqrt{H}|(g, v_m)|\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)\lambda_{0m}}\,d\tau \leqslant \sqrt{H}\frac{|(g, v_m)|}{\lambda_{0m}}.$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. *Для любой функции* $g \in L_2(D)$ *коэффициенты* $c_{km}(t)$, *определённые равенством (23), удовлетворяют оценке*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{km}(t)|^2\lambda_{km}^2 \leqslant C\|g\|_{L_2(D)}^2, \tag{26}$$

причём ряд в левой части сходится равномерно относительно $t \geqslant 0$.

Действительно, воспользовавшись оценкой (25), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{km}(t)|^2\lambda_{km}^2 \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(g,v_m)|^2}{(k+1)^2} = C\frac{\pi^2}{6}\|g\|^2_{L_2(D)}.$$

Следствие доказано.

Утверждение 2. *Пусть $g\in L_2(D)$. Тогда функция, получающаяся в результате применения в смысле теории распределений оператора Лапласа к функции (24), принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и справедливо разложение*

$$\Delta u(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)\psi_{km}(x), \tag{27}$$

причём ряд в правой части (27) сходится в метрике $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\geqslant 0$.

Доказательство. Положим

$$F(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)\psi_{km}(x).$$

Вследствие оценки (26) функция $F(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, а её норма в этом пространстве равномерно ограничена по $t\geqslant 0$. Докажем, что $\Delta u(x,t) = F(x,t)$ в смысле теории распределений.

Для любой функции $v\in C_0^\infty(\Omega)$ коэффициенты Фурье функции $\Delta v(x)$ имеют вид

$$\int\limits_{\Omega}\Delta v(x)\psi_{km}(x)\,dx = \int\limits_{\Omega}v(x)\Delta\psi_{km}(x)\,dx = -\lambda_{km}(v,\psi_{km}).$$

Следовательно, в силу представления (21) получаем

$$\int\limits_{\Omega}u(x,t)\Delta v(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)(v,\psi_{km}). \tag{28}$$

С другой стороны, согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\int\limits_{\Omega}F(x,t)v(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}c_{km}(t)(v,\psi_{km}). \tag{29}$$

Из равенств (28) и (29), а также из определения распределения $\Delta u(x,t)$ вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega}\Delta u(x,t)v(x)\,dx = \int\limits_{\Omega}u(x,t)\Delta v(x)\,dx = \int\limits_{\Omega}F(x,t)v(x)\,dx.$$

Отсюда, так как функция $v\in C_0^\infty(\Omega)$ произвольна, следует требуемое равенство $\Delta u(x,t) = F(x,t)$. Утверждение доказано.

Следствие 2. *Для любой функции $g\in L_2(D)$ функция $u(x,t)$, определённая равенством (24), удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x,t)|^2\,dx \leqslant C\|g\|^2_{L_2(D)}, \tag{30}$$

равномерной относительно $t\geqslant 0$.

Действительно, данная оценка вытекает непосредственно из представления (27) и оценки (26).

2.3. Перейдём к проверке выполнения условия (11).

Утверждение 3. *Пусть $g \in L_2(D)$. Тогда для функции (24) справедливо включение (11).*

Доказательство. Каждая из функций (19) принадлежит классу $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$. Следовательно, этому же классу принадлежит и конечная сумма

$$S_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_{km}(t)\psi_{km}(x) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_{km}(t)v_m(\tilde{x})z_k(x_n).$$

Далее воспользуемся тем, что задача Робена (18) для оператора Лапласа в произвольной области D с гладкой границей является коэрцитивной (см. [9, гл. III, § 3, п. 1, теорема 3.3]). Отсюда следует, что выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_D |D_j^2 S_N(\tilde{x},x_n,t)|^2 d\tilde{x} \leqslant C(\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,x_n,t)\|^2_{L_2(D)} + \|S_N(\,\cdot\,,x_n,t)\|^2_{L_2(D)}),$$

где $\widetilde{\Delta}$ обозначает оператор Лапласа по переменным $\tilde{x}$.

Интегрирование этого неравенства по x_n по отрезку $[0,H]$ приводит к следующему соотношению:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\|D_j^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)}).$$

Добавим к обеим частям этого неравенства величину $\|D_n^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$. В результате, приняв во внимание определение (9) и увеличив при необходимости постоянную C, получим

$$\|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C(\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|D_n^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)}). \tag{31}$$

Для оценки правой части этого неравенства воспользуемся следующими соотношениями, вытекающими из равенства (24):

$$\|\widetilde{\Delta} S_N(\,\cdot\,,t)\|^2 + \|D_n^2 S_N(\,\cdot\,,t)\|^2 = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\nu_k^2+\mu_m^2)|c_{km}(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\nu_k+\mu_m)^2|c_{km}(t)|^2 = \|\Delta S_N(\,\cdot\,,t)\|^2.$$

Тогда из неравенства (31) следует, что

$$\|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C(\|\Delta S_N(\,\cdot\,,t)\|^2 + \|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2). \tag{32}$$

Отсюда, принимая во внимание оценки (26) и (30), получаем

$$\|S_N(\,\cdot\,,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|g\|^2. \tag{33}$$

Так как последовательность $S_N(x,t)$ сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ к функции $u(x,t)$, то из теоремы Банаха–Сакса вытекает, что функция (24) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ (см. [10, часть II, гл. 4, § 4.4, лемма 7]). Более того, оценка (32) означает, что указанная последовательность сходится к функции (24) и в метрике пространства $W_2^2(\Omega)$, причём равномерно по $t \geqslant 0$. Ввиду замкнутости класса $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$ как подмножества пространства $W_2^2(\Omega)$ отсюда следует, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет включению (11). Утверждение доказано.

Замечание 1. Из оценки (33) вытекает оценка $\|u(\,\cdot\,,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|g\|^2$.

2.4. Докажем теперь, что функция (24) удовлетворяет условию (12).

Утверждение 4. *Пусть $g \in L_2(D)$. Тогда для функции (24) справедливо включение (12).*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что формально продифференцированный по t ряд (24) сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t > 0$.

Непосредственно из уравнения (22) и формул (17) вытекает оценка

$$|c'_{km}(t)| \leqslant \lambda_{km}|c_{km}(t)| + C\frac{|(g, v_m)|}{k+1}.$$

Применяя эту оценку и используя неравенство (26), получаем

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c'_{km}(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|c_{km}(t)|^2\lambda_{km}^2 + 2C^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(g, v_m)|^2}{(k+1)^2} \leqslant \mathrm{const}\,\|g\|^2_{L_2(D)}.$$

Из теоремы Вейерштрасса о мажорантной сходимости следует, что функция (24) удовлетворяет включению (12). Утверждение доказано.

2.5. Проверим теперь, что функция (24) удовлетворяет уравнению (1). Для этого достаточно заметить, что коэффициенты Фурье функций, расположенных в левой и правой частях этого уравнения, согласно (22) совпадают между собой.

Остаётся убедиться в том, что функция (24) удовлетворяет начальному условию (4), т.е. что имеет место соотношение

$$\lim_{t\to 0}\|u(\,\cdot\,, t)\| = 0.$$

Но это следует из того, что ряд (24) сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ равномерно по $t \geqslant 0$, и из явного вида (23) коэффициентов $c_{km}(t)$.

Таким образом, доказано

Утверждение 5. *Функция (24) является решением начально-краевой задачи (1)–(4).*

Замечание 2. Если $v(x,t)$ – другое решение начально-краевой задачи (1)–(4), то, разлагая его в ряд Фурье по собственным функциям (19), получаем для коэффициентов Фурье представление, совпадающее с (23). Так как система собственных функций (19) является полной, то из совпадения коэффициентов Фурье функций $v(x,t)$ и (24) следует совпадение самих разлагаемых функций, т. е. тождество $v(x,t) \equiv u(x,t)$. Следовательно, функция (24) является единственным решением задачи (1)–(4).

3. Основное интегральное уравнение. Пусть функция $\theta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы и пусть функция (24) является решением начально-краевой задачи (1)–(4). В этом случае условие (14) означает, что должно выполняться следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega}\rho(\tilde{x})\,dx\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(g, v_m)v_m(\tilde{x})z_k(x_n)\int\limits_0^t e^{-(\nu_k+\mu_m)(t-\tau)}\omega_k(h(\tau))\,d\tau = \theta(t). \tag{34}$$

Принимая во внимание соотношения (15), получаем, что

$$\int\limits_{\Omega}\rho(\tilde{x})v_m(\tilde{x})z_k(x_n)\,d\tilde{x} = \int\limits_{D}\rho(\tilde{x})v_m(\tilde{x})\,d\tilde{x}\int\limits_0^H z_k(x_n)\,dx_n = \begin{cases}\sqrt{H}(\rho, v_m) & \text{при} \quad k = 0,\\ 0 & \text{при} \quad k > 0.\end{cases}$$

Тогда, учитывая равенства (17), запишем равенство (34) следующим образом:

$$\int\limits_0^t d\tau\sum_{m=1}^{\infty}(\rho, v_m)(g, v_m)e^{-\mu_m(t-\tau)}h(\tau) = \theta(t). \tag{35}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$K(t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-t\mu_m} (\rho, v_m)(g, v_m). \tag{36}$$

Тогда равенство (35) примет следующий вид:

$$\int_0^t K(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \theta(t). \tag{37}$$

Полученное интегральное уравнение Вольтерры первого рода является основным уравнением для определения функции $h(t)$.

Утверждение 6. *Если весовая функция $\rho \in L_2(D)$ не ортогональна плотности источников тепла $g \in L_2(D)$, то ядро $K(t)$ представляет собой непрерывную на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$ функцию, удовлетворяющую условию*

$$K(0) > 0. \tag{38}$$

Доказательство. Согласно определению (36) справедлива оценка

$$|K(t)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} e^{-t\mu_m} |(\rho, v_m)(g, v_m)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |(\rho, v_m)(g, v_m)| \leqslant \|\rho\|_{L_2(D)} \|g\|_{L_2(D)},$$

из которой, согласно теореме Вейерштрасса о мажорантной сходимости, следует непрерывность ядра $K(t)$. Далее, вследствие определения (36) ввиду неотрицательности функций ρ и g, получаем

$$K(0) = \sum_{m=1}^{\infty} (\rho, v_m)(g, v_m) = \int_D \rho(\tilde{x})g(\tilde{x})d\tilde{x} > 0.$$

Утверждение доказано.

Замечание 3. *Ядро $K(t)$ бесконечно дифференцируемо на полупрямой $t > 0$, т.е. $K \in C^{\infty}(0, \infty)$.*

Действительно, применив оценку $\mu_m^l e^{-t\mu_m} \leqslant t^{-l} l!$, получим

$$|K^{(l)}(t)| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^l e^{-t\mu_m} (\rho, v_m)(g, v_m) \right| \leqslant \frac{l!}{t^l} \|\rho\|_{L_2(D)} \|g\|_{L_2(D)}.$$

Утверждение 7. *Для произвольной функции $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ выполняется равенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m |(g, v_m)|^2 = \|\nabla g\|^2_{L_2(D)}. \tag{39}$$

Доказательство. Положим

$$S_N(\tilde{x}) = \sum_{m=1}^{N} (g, v_m) v_m(\tilde{x}).$$

Согласно задаче (18) получаем

$$-\Delta S_N(\tilde{x}) = \sum_{m=1}^{N} \mu_m (g, v_m) v_m(\tilde{x}).$$

Применим формулу Грина:

$$\int\limits_D g(\tilde{x})\Delta v_m(\tilde{x})\,d\tilde{x} = -\int\limits_D \nabla g(\tilde{x})\nabla v_m(\tilde{x})\,d\tilde{x} + \int\limits_{\partial D} g(\tilde{x})\frac{\partial v_m(\tilde{x})}{\partial \nu}\,ds(\tilde{x}).$$

Так как функция g принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$, то поверхностный интеграл обращается в нуль. В результате будем иметь

$$(\nabla S_N, \nabla S_N) = -(\Delta S_N, S_N) = \sum_{m=1}^{N} \mu_m (g, v_m)(g, v_m).$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{N} \mu_m |(g, v_m)|^2 = \|\nabla S_N\|^2_{L_2(D)}.$$

Принимая во внимание полноту пространства $W^1_2(D)$, отсюда получаем требуемое равенство (39). Утверждение доказано.

Утверждение 8. *Производная $K'(t)$ ядра $K(t)$ удовлетворяет оценке*

$$|K'(t)| \leqslant M t^{-1/2}, \quad t > 0, \tag{40}$$

где $M = \|\rho\|_{L_2(D)}\|\nabla g\|_{L_2(D)}$.

Доказательство. Согласно определению (36) справедливо равенство

$$K'(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m e^{-t\mu_m}(\rho, v_m)(g, v_m).$$

Для оценки этого ряда воспользуемся утверждением 7 и неравенством $e^{-t\mu_m} < 1/\sqrt{t\mu_m}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|K'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\mu_m}|(\rho, v_m)||(g, v_m)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}|(\rho, v_m)|^2\bigg)^{1/2}\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}|\mu_m(g, v_m)|^2\bigg)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\|\rho\|_{L_2(D)}\|\nabla g\|_{L_2(D)}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 9. *Для любого $T > 0$ интегральный оператор $A : C[0,T] \to C[0,T]$, определённый равенством*

$$Av(t) = \int\limits_0^t K'(t-\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

является квазинильпотентным.

Доказательство. Покажем, что из утверждения 8 следует оценка

$$|A^k v(t)| \leqslant (M\sqrt{\pi})^k \frac{t^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}\|v\|_t, \tag{41}$$

где $\|v\|_t = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|v(s)|$, которая доказывается по индукции. Действительно, в предположении справедливости оценки (41) в силу неравенства (40) получаем

$$|A^{k+1}v(t)| \leqslant \frac{(M\sqrt{\pi})^k}{\Gamma(1+k/2)}\int\limits_0^t \frac{M}{\sqrt{t-\tau}}\tau^{k/2}\|v\|_\tau\,d\tau \leqslant M(M\sqrt{\pi})^k\frac{t^{(k+1)/2}}{\Gamma(1+k/2)}M\|v\|_t\int\limits_0^1\frac{s^{k/2}}{\sqrt{1-s}}\,ds.$$

Из этого неравенства следует индуктивный переход, поскольку

$$\int_0^1 \frac{s^{k/2}}{\sqrt{1-s}}\,ds = B\left(\frac{k}{2}+1,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1+k/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k/2+3/2)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+k/2)}{\Gamma(1+(k+1)/2)}.$$

Далее, из доказанного неравенства (41) получаем требуемую оценку

$$\|A^k\|^{1/k} \leqslant \frac{M\sqrt{T\pi}}{[\Gamma(k/2+1)]^{1/k}} \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

При этом мы воспользовались формулой Стирлинга $\Gamma(k/2+1)\simeq\sqrt{\pi k}(k/(2e))^{k/2}$, из которой вытекает соотношение $[\Gamma(k/2+1)]^{1/k}\simeq\sqrt{k/(2e)}\to\infty$. Утверждение доказано.

Перейдём к исследованию основного интегрального уравнения (37).

Согласно изложенному выше мы можем продифференцировать уравнение (37), в результате получим

$$K(0)h(t)+\int_0^t K'(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \theta'(t). \tag{42}$$

Так как $K(0)>0$ (см. утверждение 6), то уравнение (42) представляет собой интегральное уравнение Вольтерры второго рода. Поэтому в силу утверждения 9 для любой непрерывно дифференцируемой функции $\theta(t)$ уравнение (42) имеет, и притом единственное, решение $h(t)$, непрерывное на полупрямой $t\geqslant 0$.

Интегрируя уравнение (42), нетрудно показать, что в случае непрерывно дифференцируемой функции $\theta(t)$ оно эквивалентно основному уравнению (37). Отсюда вытекает

Утверждение 10. *Если функция $\theta(t)$ непрерывно дифференцируема на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$ и удовлетворяет условию $\theta(0)=0$, то интегральное уравнение (37) имеет, и притом единственное, решение $h(t)$, непрерывное на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Замечание 4. В условиях утверждения 10 для решения уравнения (42) выполняется равенство

$$h(0)=\theta'(0)/K(0). \tag{43}$$

Следующее утверждение даёт достаточные условия непрерывной дифференцируемости решений основного уравнения (37).

Утверждение 11. *Если функция $\theta(t)$ имеет непрерывную вторую производную на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\theta'(0)=0$, то решение уравнения (42) непрерывно дифференцируемо на том же отрезке $[0,T]$.*

Доказательство. Обозначим через $w(t)$ решение следующего интегрального уравнения:

$$K(0)w(t)+\int_0^t K'(\tau)w(t-\tau)\,d\tau = \theta''(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Введём функцию

$$v(t)=\int_0^t w(s)\,ds.$$

Очевидно, что $v\in C^1[0,T]$ и выполняется равенство

$$K(0)v'(t)+\int_0^t K'(\tau)v'(t-\tau)\,d\tau = \theta''(t), \tag{44}$$

проинтегрировав которое, получим

$$K(0)v(t)+\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s K'(\tau)v'(s-\tau)\,d\tau=\theta'(t).$$

Далее воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s K'(\tau)v'(s-\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t K'(\tau)v(t-\tau)\,d\tau,$$

справедливым при условии $v(0)=0$.

Таким образом, непрерывно дифференцируемая функция $v(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$K(0)v(t)+\int\limits_0^t K'(\tau)v(t-\tau)\,d\tau=\theta'(t).$$

Но этому же интегральному уравнению удовлетворяет и функция $h(t)$. В таком случае в силу единственности решения имеет место тождество

$$h(t)\equiv v(t). \tag{45}$$

Утверждение доказано.

Замечание 5. Из уравнения (44) и тождества (45) следует равенство

$$h'(0)=\theta''(0)/K(0). \tag{46}$$

4. Доказательство теоремы.

Утверждение 12. *Пусть функция* $\theta:\overline{\mathbb{R}}_+\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *дважды непрерывно дифференцируема на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *и удовлетворяет условиям (13). Тогда найдётся число* $T>0$ *такое, что решение* $h(t)$ *основного уравнения (37), непрерывное на полупрямой* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *существует, является единственным и удовлетворяет неравенствам (6) для всех* $t\in[0,T]$.

Доказательство. Согласно утверждению 10 решение основного уравнения (37) существует и является единственным. Необходимо проверить лишь выполнение неравенств (6).

Из условий (13), неравенства (38) и равенств (43) и (46) следует, что

$$h(0)=0,\quad h'(0)>0. \tag{47}$$

Это означает, что при малых $t>0$ выполняется соотношение

$$h(t)=h(0)+th'(0)+o(t)=t(h'(0)+o(1)).$$

Отсюда и из (47) вытекает, что найдётся $T>0$ такое, что $0<h(t)<H$, $0<t<T$. Утверждение доказано.

Справедливость теоремы следует непосредственно из утверждений 12 и равенства (39).

5. Заключительные замечания.

1°. Из основного интегрального уравнения (37) и неравенств (6) вытекает, что заданная средняя температура $\theta(t)$ должна удовлетворять следующему условию:

$$0\leqslant\theta(t)\leqslant H\int\limits_0^t K(t-s)\,ds\leqslant H\int\limits_0^\infty K(s)\,ds. \tag{48}$$

Заметим, что, согласно определению (36), выполняется равенство

$$\int_0^\infty K(t)\,dt = \sum_{m=1}^\infty (\rho, v_m)(g, v_m)\int_0^\infty e^{-t\mu_m}\,dt = \sum_{m=1}^\infty \frac{(\rho, v_m)(g, v_m)}{\mu_m}. \tag{49}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу:

$$-\Delta V(\tilde{x}) = g(\tilde{x}), \quad \tilde{x}\in D, \quad V(\tilde{s}) = 0, \quad \tilde{s}\in\partial D. \tag{50}$$

Функция $V(\tilde{x})$ имеет физический смысл температуры при максимальном нагреве, когда охлаждающие элементы удалены из области Ω.

Непосредственно из уравнения (50) вытекают равенства

$$(g, v_m) = -(\Delta V, v_m) = -(V, \Delta v_m) = \mu_m(V, v_m),$$

из которых и равенств (49) следует, что

$$\int_0^\infty K(t)\,dt = \sum_{m=1}^\infty (V, v_m)(\rho, v_m) = \int_D V(\tilde{x})\rho(\tilde{x})\,d\tilde{x}.$$

Поэтому в силу правого неравенства в (48) и соотношения (8) получаем

$$\theta(t) \leqslant H\int_D V(\tilde{x})\rho(\tilde{x})\,d\tilde{x} = \int_\Omega V(\tilde{x})\rho(\tilde{x})\,dx. \tag{51}$$

Условие (51) означает, что функция $\theta(t)$ не должна превышать среднюю температуру при максимальном нагреве.

2°. Отметим, что вследствие принципа максимума (см. [11, гл. 3, п. 3.2]) функция Грина задачи (18) положительна внутри области D. Так как соответствующий интегральный оператор положительно определён, то, согласно теореме Ентча, первая собственная функция внутри области D положительна: $v_1(\tilde{x}) > 0$, $\tilde{x}\in D$ (см. [12, гл. IV, § 20, п. 7]). Отсюда вытекает, что первое собственное значение является простым и, значит, $\mu_2 > \mu_1$.

Поэтому ядро $K(t)$, определённое равенством (36), может быть представлено в виде

$$K(t) = e^{-t\mu_1}(\rho, v_1)(g, v_1) + \sum_{m=2}^\infty e^{-t\mu_m}(\rho, v_m)(g, v_m) = e^{-t\mu_1}((\rho, v_1)(g, v_1) + O(1)e^{-t(\mu_2-\mu_1)}).$$

Следовательно, $K(t)\simeq Qe^{-t\mu_1}$, где по условию $Q = (\rho, v_1)(g, v_1) > 0$.

В таком случае основное интегральное уравнение (37) можно заменить следующим его приближением:

$$Q\int_0^t e^{-(t-\tau)\mu_1}h(\tau)\,d\tau = \theta(t). \tag{52}$$

При условии $\theta(0) = 0$ решение уравнения (52) равно

$$h(t) = \frac{1}{Q}(\theta'(t) + \mu_1\theta(t)). \tag{53}$$

Заметим, что в этом случае необходимым условием существования решения, удовлетворяющего условию (6), является выполнение неравенства $0\leqslant\theta(t)\leqslant HQ\beta(t)$, где $\beta(t) = (1-e^{-\mu_1 t})/\mu_1$.

Пример. Введём дополнительное ограничение $|h'(t)|\leqslant M$, где M – некоторая положительная постоянная. Обозначим через $T = H/M$ минимальное время, необходимое для полного извлечения охлаждающих элементов. Рассмотрим процесс нагревания, при котором выходная мощность обеспечивается средней температурой, определяемой равенством

$$\theta(t) = \frac{HQ}{T\mu_1} \cdot \begin{cases} t - \beta(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ T - \beta(T)e^{(T-t)\mu_1} & \text{при} \quad t > T, \end{cases} \tag{54}$$

где функция $\beta(t)$ введена для выполнения условий (13).

В этом случае, согласно (53), решением интегрального уравнения (52) будет функция

$$h(t) = H \begin{cases} t/T, & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 1, & \text{при} \quad t > T. \end{cases} \tag{55}$$

Равенство (55) означает, что для обеспечения средней температуры (54) охлаждающие элементы должны извлекаться с максимальной скоростью, причём после их полного извлечения процесс должен идти с максимальным нагревом.

В рассматриваемом случае функция (54) описывает критический режим, обычно нежелательный в реальном процессе.

Замечание 6. Многие характеристики рассмотренной математической модели определяются значением ведущего собственного значения $\mu_1(D)$, определяемого основанием D рассматриваемой цилиндрической области. Форма областей, для которых $\mu_1(D)$ достигает экстремального значения, подробно рассмотрена в монографии [13, гл. 6, п. 6.5]. В соответствии с изложенным выше выбор формы сечения определяется целями, которые требуется достичь в рассмотренной математической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1996.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
4. *Fursikov A.V.* Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications, Translations of Math. V. 187. Providence, 2000.
5. *Albeverio S., Alimov Sh.A.* On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process // Appl. Math. and Optimization. 2008. V. 47. № 1. P. 58–68.
6. *Altmüller N., Grüne L.* Distributed and boundary model predictive control for the heat equation. Technical report. University of Bayreuth, 2012.
7. *Gavrikov A., Kostin G.* Heat transfer processes in a cylindrical body surrounded by air // Proc. of 59th MIPT Sci. Conf. Moscow, 2016.
8. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
9. *Березанский Ю.М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
10. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
11. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1971.
13. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., 1962.

Национальный университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан,
Андижанский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 20.04.2021 г.
После доработки 26.06.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.