ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 37–44

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.953+517.958:624.27

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

 У. Д. Дурдиев

Для уравнения поперечных колебаний однородной балки, свободно опирающейся на концы, рассматривается прямая начально-краевая задача и для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки. С помощью собственных чисел и собственных функций оператора колебания балки задачи сводятся к интегральным уравнениям. К этим уравнениям применяется принцип сжатых отображений Шаудера и доказываются теоремы существования и единственности решений.

DOI: 10.31857/S0374064122010058

Введение. Балки широко используются при строительстве зданий, мостов, путепроводов, эстакад и прочих сооружений. Большинство строящихся в настоящее время мостов являются балочными. Этот тип сооружений является основным при строительстве переправ малой длины. Балки, применяемые в производственных зданиях, в основном работают на статический изгиб, но при установке на них какого-либо оборудования (станков, компрессоров, поршневых двигателей и т.д.) испытывают и динамические нагрузки, которые имеют периодический характер. При таких нагрузках балки также совершают поперечные колебания [1, 2].

Обратные задачи математической физики изучены для многих классов дифференциальных уравнений. Обратные задачи, связанные с простейшим уравнением гиперболического типа, изучались в монографии [3]. Методика доказательств для обратных динамических задач локальных теорем существования и единственности решения, теорем единственности и условной устойчивости, а также численные подходы к нахождению их решения рассмотрены в работах [4–13] и др.

За последние несколько лет к исследованию линейных и нелинейных начально-граничных задач для уравнения колебаний балки наблюдается возрастающий интерес [14–17]. В работе [18] изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закреплённой балки. Для неоднородного уравнения колебания балки некоторые начально-краевые задачи и задача Коши изучались в работах [19–21], в которых строились их решения в виде рядов и доказывались теоремы единственности, существования и устойчивости решений этих задач. В [22] найдено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий.

Для уравнения колебаний балки обратные задачи по нахождению правой части (источника колебаний) и начальных условий исследовались в работе [23]. В данной статье рассматривается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента в уравнении поперечных колебаний балки, который с физической точки зрения представляет собой её жёсткость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную имеющую постоянное поперечное сечение балку длиной l, свободно опирающуюся на концы. Её вынужденные изгибные поперечные колебания под действием внешней силы $G(x,t)$ описываются уравнением четвёртого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

в котором ρ – плотность балки, S – площадь её поперечного сечения, E – модуль упругости материала балки, J – момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси, по всей длине балка поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $Q(t)$.

Разделив на ρS, запишем это уравнение в виде

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/\rho S$, $q(t) = Q(t)/\rho S$ и $f(x,t) = G(x,t)/\rho S$. Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ \ 0 < t < T\}$, где $[0,T]$ – временно́й интервал, а l, как сказано выше, – длина балки, с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

и граничными

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

условиями.

В прямой задаче требуется при заданных числах a, l, T и достаточно гладких функциях $q(t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ найти функцию $u(x,t) \in C^{4,2}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $(x,t) \in D$ и условиям (2), (3).

Обратная задача: найти коэффициент $q(t)$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) известна следующая дополнительная информация:

$$g(t) = \int\limits_0^l u(x,t)h(x)\,dx, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где функции $g(t)$ и $h(x)$ заданы и функция $h(x)$ удовлетворяет условиям

$$h(x) \in C^4(0,l), \quad h(0) = h(l) = h''(0) = h''(l) = 0. \tag{5}$$

2. Исследование прямой задачи. Перенесём в уравнении (1) слагаемое $q(t)u$ в правую часть и введём обозначение $F(x,t) = f(x,t) - q(t)u$. Тогда для решения этого уравнения с начальными (2) и граничными (3) условиями имеет место следующее соотношение [20]:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin(\mu_n x) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t F_n(s) \sin(\omega_n(t-s))\,ds\ \sin(\mu_n x), \tag{6}$$

где $\omega_n = a{\mu_n}^2$, $\mu_n = \pi n/l$, $\lambda_n = -{\mu_n}^4 = -(\pi n/l)^4$, а

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin(\mu_n x)\,dx, \quad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \sin(\mu_n x)\,dx, \tag{7}$$

$$F_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l F(x,t) \sin(\mu_n x)\,dx.$$

Подставив вместо $F(x,t)$ выражение $f(x,t) - q(t)u(x,t)$, запишем представление (6) в виде интегрального уравнения

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin(\mu_n x) +$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x)-$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t q(s)\int\limits_0^l u(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x). \tag{8}$$

Изучим свойства решения уравнения (8). Для этого воспользуемся методом последовательных приближений, представив его решение в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t), \tag{9}$$

здесь

$$u_0(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos(\omega_n t)+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)\sin(\mu_n x)+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t f_n\sin(\omega_n(t-s))\,ds\,\sin(\mu_n x),$$

$$f_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin(\mu_n\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

$$u_n(x,t)=-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t q(s)\int\limits_0^l u_{n-1}(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x),\quad n=1,2,\ldots$$

Оценивая u_n в области D, получаем

$$|u_0|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|\varphi_n|+\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{|\psi_n|}{n^2}\right]+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{|f_n|t}{n^4}\leqslant C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|t}{n^4},$$

$$|u_1|\leqslant C_1^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0}{n^4}\left[C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|t+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|t}{n^2}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^2}{2!}\right],$$

$$\cdots$$

$$|u_k|\leqslant C_1^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0^k}{n^{4k}}\left[C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\frac{t^k}{k!}+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}\frac{t^k}{k!}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^{2k}}{2k!}\right],$$

где $\max\limits_{0<t<T}|q(t)|=q_0$. Тогда для ряда (9) имеет место оценка

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}C_1^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0^k}{n^{4k}}\left(C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\frac{t^k}{k!}+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}\frac{t^k}{k!}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^{2k}}{2k!}\right), \tag{11}$$

здесь и далее C_i^0, C_1^k – положительные постоянные.

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Для любого $(x,t)\in D$ верна оценка (11).*

Формальное почленное дифференцирование интегрального уравнения (8) даёт равенства

$$u_{tt}=-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}(a\mu_n^4\varphi_n\cos(\omega_n t)+a\mu_n^2\psi_n\sin(\omega_n t))\sin(\mu_n x)-$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x)+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int\limits_0^t q(s)\int\limits_0^l u(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x), \tag{12}$$

$$u_{xxxx}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^4\left(\varphi_n\cos(\omega_n t)+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)\sin(\mu_n x)+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x)-$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{a}\int\limits_0^t q(s)\int\limits_0^l u(\xi,s)\sin(\omega_n(t-s))\sin(\mu_n\xi)\,d\xi\,ds\,\sin(\mu_n x). \tag{13}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия*

$$\varphi(x)\in C^5[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(l)=0,$$

$$\psi(x)\in C^3[0,l],\quad \psi(0)=\psi(l)=\psi''(0)=\psi''(l)=0,$$

$$f(x,t)\in C(\overline{D})\bigcap C_x^3(\overline{D}),\quad f(0,t)=f(l,t)=f''_{xx}(0,t)=f''_{xx}(l,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

то имеют место равенства

$$\varphi_n=\frac{1}{\mu_n^5}\varphi_n^{(5)},\quad \psi_n=-\frac{1}{\mu_n^3}\psi_n''',\quad f_n(t)=-\frac{1}{\mu_n^3}f_n'''(t), \tag{14}$$

где

$$\varphi_n^{(5)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi^{(5)}(x)\cos(\mu_n x)\,dx,\quad \psi_n'''=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\psi'''(x)\cos(\mu_n x)\,dx,$$

$$f_n'''(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f_{xxx}(x,t)\cos(\mu_n x)\,dx,$$

со следующими оценками:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(5)}|^2\leqslant\|\varphi^{(5)}\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n'''|^2\leqslant\|\psi'''\|_{L_2[0,l]}. \tag{15}$$

Интегрируя по частям интегралы в φ_n пять раз, в ψ_n и $f_n(t)$ три раза (см. определения (7) и (10)), с учётом условий леммы 2 получаем равенства (14). Неравенство (15) представляет собой неравенство Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций $\varphi_n^{(5)}$ и ψ_n''' по системе косинусов $\{\sqrt{2/l}\cos(\mu_n x)\}$ на интервале $[0,l]$.

Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (14) и (15) ряды (12) и (13) оцениваются следующими сходящимися рядами:

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}C_1^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_0}{n^{4k}}\left(C_1^0\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\frac{t^k}{k!}+C_2^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_n|}{n^2}\frac{t^k}{k!}+C_3^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n|}{n^4}\frac{t^{2k}}{2k!}\right), \tag{16}$$

$$|u_{tt}(x,t)| \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(|\varphi_n^{(5)}| + |\psi_n'''|) + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n}|f_n'''(t)| + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n} q_0 |u|, \tag{17}$$

$$|u_{xxxx}(x,t)| \leqslant \tilde{C}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(|\varphi_n^{(5)}| + |\psi_n'''|) + \tilde{C}_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n}|f_n'''(t)| + \tilde{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n} q_0 |u|, \tag{18}$$

где $\tilde{C}_i,\ \ i = 1, 2, 3,$ – положительные постоянные.

Тогда ряды (16), (17) и (18) сходятся равномерно в прямоугольнике $\overline{D}$ и, следовательно, функция (8) удовлетворяет соотношениям (1)–(3).

3. Основной результат и его доказательство. Умножив обе части уравнения (1) на $h(x)$ и проинтегрировав от 0 до l по $x,$ с учётом условий (4), (5) получим

$$g''(t) + a^2 \int\limits_0^l u(x,t) h^{(4)}(x)\, dx + q(t) g(t) = \int\limits_0^l f(x,t) h(x)\, dx.$$

Разрешая это уравнение относительно $q(t),$ найдём, что

$$q(t) = \frac{1}{g(t)} \int\limits_0^l f(x,t) h(x)\, dx - \frac{g''(t)}{g(t)} - \frac{a^2}{g(t)} \int\limits_0^l u(x,t) h^{(4)}(x)\, dx. \tag{19}$$

Теперь подставив выражение (19) для $q(t)$ в уравнение (8), придём к следующему интегральному уравнению относительно $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin(\mu_n x) +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(x,s) \sin(\omega_n (t-s)) \sin(\mu_n x)\, dx\, ds -$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{1}{g(s)} \int\limits_0^l f(\xi,s) h(s) u(y,s) h^{(4)}(y) \sin(\omega_n (t-s)) \sin(\mu_n x)\, d\xi\, dy\, ds\ \sin(\mu_n x) -$$

$$- \frac{2a^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{1}{g(s)} \int\limits_0^l u(\xi,s) h^{(4)}(\xi) u(y,s) h^{(4)}(y) \sin(\omega_n (t-s)) \sin \mu_n(y)\, dy\, d\xi\, ds\ \sin(\mu_n x) -$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{g''(s)}{g(s)} u(y,s) h^{(4)}(y) \sin(\omega_n (t-s)) \sin \mu_n(y)\, dy\, ds\ \sin(\mu_n x).$$

Для удобства введём некоторые обозначения:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin(\mu_n x) +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(x,s) \sin(\omega_n (t-s)) \sin(\mu_n x)\, dx\, ds,$$

$$G_1(x,\xi,y,t,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n g(s)}f(\xi,s)h(s)h^{(4)}(y)\sin(\omega_n(t-s))\sin\mu_n(y)\sin(\mu_n x),$$

$$G_2(x,y,t,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g''(s)}{\omega_n g(s)}h^{(4)}(y)\sin(\omega_n(t-s))\sin\mu_n(y)\sin(\mu_n x),$$

$$G_3(x,\xi,y,t,s)=\frac{2a^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n g(s)}h^{(4)}(\xi)h^{(4)}(y)\sin(\omega_n(t-s))\sin\mu_n(y)\sin(\mu_n x),$$

и запишем уравнение (6) в более удобном виде:

$$u(x,t)=\Psi(x,t)-\int_0^t\int_0^l\int_0^l u(y,s)G_1(x,\xi,y,t,s)\,d\xi\,dy\,ds-$$

$$-\int_0^t\int_0^l u(y,s)G_2(x,y,t,s)\,dy\,ds-\int_0^t\int_0^l\int_0^l u(\xi,s)u(y,s)G_3(x,\xi,y,t,s)\,dy\,d\xi\,ds. \qquad (20)$$

Обозначим через A оператор, который ставит в соответствие функции $u(x,t)$ правую часть уравнения (20). Тогда уравнение (20) запишется как операторное уравнение

$$u=Au. \qquad (21)$$

Пусть

$$\Psi_0=\max_{(x,t)\in D}|\Psi(x,t)|,$$

$$\lambda_1=\max_{\substack{(x,t)\in D\\ \xi,y\in[0,l]\\ s\in[0,T]}}|G_1(x,\xi,y,t,s)|,\quad \lambda_2=\max_{\substack{(x,t)\in D\\ y\in[0,l]\\ s\in[0,T]}}|G_2(x,y,t,s)|,\quad \lambda_3=\max_{\substack{(x,t)\in D\\ \xi,y\in[0,l]\\ s\in[0,T]}}|G_3(x,\xi,y,t,s)|, \qquad (22)$$

$S_d(0)=\{u:\|u\|\leqslant d\}$, d – некоторое положительное число.

Для доказательства существования решения операторного уравнения (21) воспользуемся принципом Шаудера [24].

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2 и* $|g|\geqslant g_0>0$, *где* g_0 *– известное число. Тогда для всех* T *и* $d>\Psi_0$, *удовлетворяющих оценке*

$$0<T\leqslant(d-\Psi_0)/M_*,\quad \textit{где}\quad M_*=(\lambda_1+dl\lambda_2+\lambda_3)dl, \qquad (23)$$

оператор A *равномерно ограничен, где числа* λ_i $(i=1,2,3)$ *определены соотношениями (22).*

Доказательство. Вначале установим равномерную ограниченность оператора A. Для этого покажем, что существует $\rho\in(0,d]$ такая, что $\|Au\|\leqslant\rho$, где $\|Au\|=\max_{(x,t)\in\overline{D}}|Au|$. Для $u\in S_d(0)$, $(x,t)\in D$, в силу (22) находим оценку $\|Au\|\leqslant\Psi_0+M_*T\equiv\rho$. При T, удовлетворяющих оценке (23), оператор A равномерно ограничен. Лемма доказана.

Лемма 4. *Оператор* A *является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Напомним определение равностепенно непрерывного оператора. Оператор A называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $u_1,u_2\in S_d(0)$, для которых $\|u_1-u_2\|\leqslant\delta$, выполняется неравенство

$$\|Au_1-Au_2\|\leqslant\varepsilon. \qquad (24)$$

Составим разность

$$Au_1-Au_2=-\int_0^t\int_0^l(u_1(x,s)-u_2(x,s))G_1(x,\xi,t,s)\,ds\,dx-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^l (u_1(\xi,s)u_1(x,s)-u_2(\xi,s)u_2(x,s))G_2\,dx\,d\xi\,ds-\int_0^t\int_0^l (u_1(x,s)-u_2(x,s))G_3(x,t,s)\,dx\,ds$$

и введём обозначение $u_1-u_2=:\tilde u$. Проведя очевидные оценки, получаем

$$\|Au_1-Au_2\|\leqslant(\lambda_1 lT+2\lambda_2 l^2Td+\lambda_3 lT)\|\tilde u\|\equiv M^*\|\tilde u\|,$$

откуда имеем $\|Au_1-Au_2\|\leqslant M^*\|u_1-u_2\|\leqslant M^*\delta$. Следовательно, если взять $\delta_0=\varepsilon/M^*$, то при $\delta\in(0,\delta_0]$ будет выполнено неравенство (24), т.е. оператор A является равностепенно непрерывным. Тогда оператор A вполне непрерывен на S_d, и согласно принципу Шаудера он имеет на S_d по крайней мере одну неподвижную точку [25]. Лемма доказана.

Таким образом, из лемм 3 и 4 следует следующее утверждение о существовании решения операторного уравнения (21).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2, леммы 3 и соотношения (5). Тогда для* T*, удовлетворяющих оценке (23), уравнение (21) имеет решение* $u(x,t)\in C^{4,2}(D)$.

Докажем единственность этого решения.

Теорема 2. *Для всех* $u\in S_d(0)$, $|g(t)|\geqslant g_0>0$ *при*

$$T<\frac{g_0}{2C_0d(g_0+Ha^2l)},\tag{25}$$

операторное уравнение (21) имеет единственное решение в классе $C^{4,2}(D)$, *где* $C_0=l^2/3a\pi$, $H=\max\limits_{0<x<l}\|h(x)\|$.

Доказательство. Пусть задача (1)–(4) имеет два решения: u_1, u_2, $u_1\ne u_2$, и q_1, q_2, $q_1\ne q_2$. Их разности обозначим через $\tilde u=u_1-u_2$ и $\tilde q=q_1-q_2$. Для разности $\tilde u$ получаем следующую задачу:

$$\tilde u_{tt}+a^2\tilde u_{xxxx}=-q_1\tilde u-\tilde q u_2,$$

$$\tilde u|_{t=0}=0,\quad \tilde u_t|_{t=0}=0,$$

$$\tilde u(0,t)=\tilde u_{xx}(0,t)=\tilde u(l,t)=\tilde u_{xx}(l,t)=0.$$

Её решение записывается следующим образом:

$$\tilde u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\int_0^l(-q_1\tilde u-\tilde q u_2)\sin(\mu_n x)\sin(\omega(t-s))\,dx\,ds\,\sin\biggl(\frac{\pi n}{l}x\biggr).$$

Для $\tilde q$ из представления (19) следует оценка $\|\tilde q\|\leqslant Ha^2l\|\tilde u\|/g_0$, в силу которой имеем

$$\|\tilde u\|\leqslant 2C_0T\biggl(d+H\frac{a^2}{g_0}ld\biggr)\|\tilde u\|.$$

Отсюда для T, удовлетворяющих оценке (25), получаем $u_1=u_2$, что доказывает теорему.

По найденной функции $u(x,t)\in S_d(0)$ с помощью формулы (19) находится неизвестный коэффициент $q(t)$ – решение обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М., 2012.
3. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
4. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.

5. *Дурдиев Д.К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 574–582.
6. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
7. *Дурдиев Д.К.* Обратные задачи для сред с последействием. Ташкент, 2014.
8. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычислит. математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
9. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
10. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временнóй частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189.
11. *Durdiev U., Totieva Z.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. P. 1–12.
12. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2d memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Euras. J. of Math. and Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
13. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 26–32.
14. *Wang Y.-R., Fang Z.-W.* Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56. № 2. P. 337–346.
15. *Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G.* Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions // J. Sound Vibrat. 2013. V. 332. № 4. P. 795–806.
16. *Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С.* Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1379–1391.
17. *Сабитов К.Б., Акимов А.А.* Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
18. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
19. *Сабитов К.Б.* Начально-краевая задача для уравнения колебаний балки // Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне. Самара, 2015. С. 34–42.
20. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
21. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 48–68.
23. *Сабитов К.Б.* Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.
24. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М., 1975.
25. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 2002.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
им. В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 07.05.2021 г.
После доработки 08.07.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.