ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 54–65

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КЕЛЬВИНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

© 2022 г. К. Б. Сабитов

Доказана обобщённая теорема Кельвина и с её помощью, основываясь на фундаментальных решениях эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, построены функции Грина первой краевой задачи для таких уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122010071

Введение. Как известно, при построении функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговых областях важную роль играет теорема (или преобразование) Кельвина [1], с помощью которой строится эта функция. В связи с исследованиями Ф. Трикоми [2, с. 69–95] возник интерес к построению функции Грина задачи Дирихле или задачи со смешанными граничными условиями первого и второго рода для вырождающегося уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

в области D_0, ограниченной нормальной кривой Γ_0 (по терминологии Ф. Трикоми)

$$x^2 + \left(\frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2}\right)^2 = a^2, \quad a > 0,$$

лежащей в полуплоскости $y \geqslant 0$, и отрезком $[-a, a]$ прямой $y = 0$.

Для уравнения (1) в области D_0 Е. Хольмгрен [3], не приводя необходимых обоснований, впервые построил функцию Грина $G(x, y; x_0, y_0)$ задачи с граничными данными

$$u(x, y)|_{\Gamma_0} = \varphi(x), \quad -a \leqslant x \leqslant a, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \quad -a < x < a; \tag{2}$$

она имеет вид

$$G(x, y; x_0, y_0) = \cos(2\beta\pi) z(x, y; x_0, y_0) + \overline{z}(x, y; x_0, y_0) -$$
$$- \left(\frac{a^2}{x_0^2 + 4(m+2)^{-1} y_0^{m+2}}\right)^{\beta} (\cos(2\beta\pi) z(x, y; \overline{x}_0, \overline{y}_0) + \overline{z}(x, y; \overline{x}_0, \overline{y}_0)),$$

где

$$\overline{x}_0 = \frac{a^2 x_0}{x_0^2 + 4(m+2)^{-1} y_0^{m+2}}, \quad \overline{y}_0^{(m+2)/2} = \frac{a^2 y_0^{(m+2)/2}}{x_0^2 + 4(m+2)^{-1} y_0^{m+2}};$$

$$z(x, y; x_0, y_0) = \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{1}{r_1^{2\beta}} \left(F\left(\beta, \beta; 1; \frac{r^2}{r_1^2}\right) \ln \frac{r^2}{r_1^2} + G\left(\beta, \beta; 1; \frac{r^2}{r_1^2}\right)\right),$$

$$\overline{z}(x, y; x_0, y_0) = \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{1}{r^{2\beta}} \left(F\left(\beta, \beta; 1; \frac{r_1^2}{r^2}\right) \ln \frac{r_1^2}{r^2} + G\left(\beta, \beta; 1; \frac{r_1^2}{r^2}\right)\right);$$

$$\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} = \left\{ (x - x_0)^2 + \left(\frac{2}{m+2}(y^{(m+2)/2} \mp y_0^{(m+2)/2})\right)^2, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}; \right.$$

$F(\beta,\beta;1;x)$ – гипергеометрическая функция, которая является решением уравнения

$$x(1-x)y''+(1-(1+2\beta)x)y'-\beta^2y(x)=0;$$

$$G(\beta,\beta;1;x)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+\frac{\partial}{\partial c}\right)F(a,b;c;x)\right]_{\substack{c=1\\ a=b=\beta}},$$

$F(a,b;c;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

С. Геллерстедт в своей знаменитой работе [4, с. 23], ссылаясь на работу [3], привёл в более компактном виде формулу для функции Грина задачи (1), (2):

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta}q_1(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0), \tag{3}$$

где $R^2=x_0^2+4(m+2)^{-2}y_0^{m+2}$, а функция $q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1r_1^{-2\beta}F(\beta,\beta;2\beta;1-r^2/r_1^2)$ является фундаментальным решением уравнения (1), также не обосновывая, почему второе слагаемое из формулы (3) является решением уравнения (1). Эта формула воспроизведена в монографии [5, с. 72, с. 80], в ней же приведена (также без соответствующих обоснований) формула для функции Грина для уравнения (1) в области D_0 задачи Дирихле с данными

$$u(x,y)|_{\Gamma_0}=\varphi(x),\quad u(x,y)|_{y=0}=\tau(x),\quad -a\leqslant x\leqslant a;$$

она имеет вид

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_2(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta}q_2(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0),$$

здесь

$$q_2(x,y;x_0,y_0)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}r_1^{-2\beta}F\left(1-\beta,1-\beta;2-2\beta;1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)$$

– второе фундаментальное решение уравнения (1); значения постоянных k_1 и k_2 приведены в [5, с. 44, 49].

В работе [6] в полукруге $\{(x,y): x^2+y^2<1,\ \ x>0\}$ для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{p}{x}u_x=0,\quad p=\mathrm{const}>0, \tag{4}$$

изучены задачи Дирихле $(0<p<1)$ и Келдыша [7] $(p\geqslant 1)$. В [6] для построения решения этих задач функция Грина приводится в следующем виде:

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-g_1(x,y;x_0,y_0),$$

где $q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1\left(\dfrac{x}{r_1}\right)^pF\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2};p;1-\dfrac{r^2}{r_1^2}\right)$ – фундаментальное решение уравнения (4),

$$g_1(x,y;x_0,y_0)=r_0^{-p}\left(\frac{x}{r_1}\right)^pF\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2};p;1-\frac{\overline{r}^2}{\overline{r}_1^2}\right),\quad r_0^2=x_0^2+y_0^2,$$

здесь

$$\begin{matrix}r^2\\ r_1^2\end{matrix}=\Big\{(x\mp x_0)^2+(y-y_0)^2,\quad \begin{matrix}\overline{r}^2\\ \overline{r}_1^2\end{matrix}=\Big\{(x\mp \overline{x}_0)^2+(y-\overline{y}_0)^2,\quad \overline{x}_0=\frac{x_0}{r_0^2},\quad \overline{y}_0=\frac{y_0}{r_0^2}. \tag{5}$$

В этой работе также отсутствует обоснование того, почему функция $g_1(x,y;x_0,y_0)$ является решением уравнения (4).

Отметим, что в работах [8, 9] изучена задача Хольмгрена для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{p}{y}u_y+\frac{q}{y}u_x=0,$$

где $0<p<1$, $q=\mathrm{const}$, и методом потенциалов установлена её фредгольмость, а в работе [10] в шаровой области для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}+u_{zz}+\frac{k}{z}u_z=0,\quad 0<k<1,$$

найден аналог формулы Пуассона для решения задачи Дирихле с использованием теоремы Кельвина.

В работах [11, 12] для уравнения Келдыша

$$x^nu_{xx}+u_{yy}=0,\quad n=\mathrm{const}>0, \tag{6}$$

в области, ограниченной координатными осями и “нормальной” кривой $y=2|2-n|^{-1}\sqrt{1-x^{2-n}}$, $n\neq 2$, построены по аналогии с работами [4–6] функции Грина задач Дирихле и Хольмгрена, но без соответствующего обоснования.

В работах [13, 14] для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y-\lambda^2u=0,\quad 0<2\alpha<1,\quad 0<2\beta<1,\quad \lambda>0, \tag{7}$$

по аналогии с работами [4, 5] построены функции Грина задачи Дирихле в четверти круга $x^2+y^2<1$, $x>0$, $y>0$, но без соответствующих обоснований.

Эту цепочку работ, посвящённых построению функции Грина краевых задач, можно продолжить. В большом числе работ для эллиптических уравнений, имеющих сингулярные коэффициенты или вырождающихся на границе области, по аналогии с работами [4, 5] построены функции Грина без соответствующих обоснований. Чтобы указанные выше результаты считались обоснованными, необходимо перенести теорему Кельвина на вырождающиеся эллиптические уравнения или на эллиптические уравнения с сингулярными коэффициентами.

1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ с заданной в нём декартовой системой координат $Ox_1,\ldots,x_n$ уравнение эллиптического типа с коэффициентами, сингулярными на осях координат,

$$Su\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_ix_i}(x)+\frac{p_i}{x_i}u_{x_i}\right)=\Delta u+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}u_{x_i}=0, \tag{8}$$

где p_i – известные постоянные, $u=u(x)$ – решение уравнения (8), $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 2$.

Из курса уравнений математической физики (см., например, [15, с. 283; 16, с. 168; 17, с. 260; 18, с. 41; 19, с. 273] и др.) известно следующее утверждение, называемое *теоремой Кельвина*: если функция $u(x)$ является гармонической в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то функция

$$v(\eta)=\frac{1}{\rho^{n-2}}u\left(\frac{\eta_1}{\rho^2},\frac{\eta_2}{\rho^2},\ldots,\frac{\eta_n}{\rho^2}\right)=\frac{1}{\rho^{n-2}}u\left(\frac{\eta}{\rho^2}\right)$$

при $\rho\neq 0$ является гармонической в области D', сопряжённой с D (т.е. являющейся образом области D) при преобразовании инверсии относительно сферы единичного радиуса с центром в начале координат, где $\rho=|\eta|=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2}$.

Доказательство этого утверждения приведено в указанных выше учебниках при $n=2$ и $n=3$, а в учебнике [20, с. 177] – при любом $n\geqslant 2$.

В данной работе, следуя [20, с. 177], установлен аналог теоремы Кельвина для решений уравнения (8) и показаны применения этой теоремы при построении функции Грина первой граничной задачи для частных случаев уравнения (8).

Теорема. *Если функция $u(x)$ является в области D решением уравнения (8), то функция*

$$v(\eta)=\frac{1}{\rho^{n+\alpha-2}}u\left(\frac{\eta}{\rho^2}\right),\quad \alpha=\sum_{i=1}^{n}p_i, \tag{9}$$

при $\rho\neq 0$ также является решением уравнения (8) в области D', сопряжённой с D при преобразовании инверсии относительно сферы единичного радиуса с центром в начале координат.

Доказательство. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – произвольная точка области D, а $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$, $\eta_i=x_i/r^2$, $i=\overline{1,n}$, – точка из области D', соответствующая точке x при преобразовании инверсии относительно сферы единичного радиуса с центром в начале координат; $r=|x|$, $\rho=|\eta|$, при этом $r\rho=1$.

Предварительно докажем, что имеет место тождество

$$Sv(\eta)=r^{n+\alpha+2}Su(x), \tag{10}$$

из которого непосредственно вытекает справедливость теоремы. Предварительно вычислим

$$\frac{\partial x_k}{\partial\eta_i}=\begin{cases}\rho^{-2}-2\rho^{-4}\eta_i^2, & k=i,\\ -2\rho^{-4}\eta_k\eta_i, & k\neq i.\end{cases} \tag{11}$$

Тогда вследствие определения (9) с учётом вычислений (11) имеем

$$\frac{\partial v(\eta)}{\partial\eta_i}=(2-n-\alpha)\rho^{1-n-\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\eta_i}u(x)+\rho^{2-n-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\eta_i}=$$

$$=(2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha}\eta_i u(x)-2\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\equiv$$

$$\equiv(2-n-\alpha)J_1-2J_2+J_3. \tag{12}$$

Теперь, учитывая формулы (11), найдём производную по η_i от каждой функции J_k, $k=1,2,3$, из правой части равенства (12):

$$\frac{\partial J_1}{\partial\eta_i}=-(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i^2u(x)+\rho^{-n-\alpha}u(x)-2\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\frac{\partial u(x)}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial\eta_i}=-(n+\alpha+2)\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k-$$

$$-2\rho^{-n-\alpha-6}\eta_i^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\eta_m\eta_k+\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial\eta_i}=-(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-2\rho^{-n-\alpha-4}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\eta_k+\rho^{-n-\alpha-2}\frac{\partial^2x_k}{\partial x_i^2}.$$

Тогда на основании вычисленных производных получаем, что

$$Sv(\eta)=(2-n-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J_1}{\partial\eta_i}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J_2}{\partial\eta_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J_3}{\partial\eta_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\eta_i}\left[(2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha}\eta_i u(x)-2\rho^{-n-\alpha-2}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k+\rho^{-n-\alpha}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right]=$$

$$= -(2-n-\alpha)(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha}u(x) + (2-n-\alpha)n\rho^{-n-\alpha}u(x) -$$

$$-(2-n-\alpha)2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\eta_k + (2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i +$$

$$+2(n+\alpha+2)\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\eta_k - 2n\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\eta_k + 4\rho^{-n-\alpha-4}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_k}\eta_m\eta_k -$$

$$-2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\eta_i\eta_k - 2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i -$$

$$-(n+\alpha)\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i - 2\rho^{-n-\alpha-4}\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\eta_k\eta_i + \rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} +$$

$$+(2-n-\alpha)\rho^{-n-\alpha}u(x)\sum_{i=1}^{n}p_i - 2\rho^{-n-\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\eta_k + \rho^{-n-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\eta_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = r^{n+\alpha+2}Su(x).$$

Тем самым доказана справедливость тождества (10). Отсюда с очевидностью вытекает, что функция (9), где $\rho \neq 0$, является решением уравнения (8) в области D'. Теорема доказана.

Отметим, что в работе [21] дано обобщение теоремы Кельвина на случай уравнения (8) с помощью перехода к сферической системе координат. Отметим также, что на стадии рецензирования данной статьи выяснилось, что в монографии [22, с. 156] получено обобщение теоремы Кельвина на случай уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y}u_y = 0, \quad p = \mathrm{const}.$$

Функция $u(x)$ при преобразовании инверсии относительно сферы S_R радиуса R с центром в начале координат принимает вид

$$v(\eta) = \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+\alpha-2} u\left(\frac{R^2}{\rho^2}\eta\right);$$

при этом функция v является решением уравнения (8).

2. Покажем применение доказанной выше теоремы при построении функции Грина первой граничной задачи для частных случаев уравнения (8) с подробным обоснованием, так как у разных авторов результаты отличаются друг от друга и при этом отсутствуют необходимые выкладки.

Пример 1. Рассмотрим в полукруге $D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\}$ изученное в работе [6] уравнение

$$S_1 u(x,y) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0, \quad p = \mathrm{const} > 0, \tag{13}$$

и поставим для него задачи Дирихле и Келдыша, отмеченные в п. 1, с указанием пространства функций, в котором ищется решение.

Задача 1 (задача Дирихле). *Пусть* $0 < p < 1$. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую следующим четырём условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}_1)\bigcap C^2(D_1); \tag{14}$$

$$S_1 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_1; \tag{15}$$

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \varphi(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 1; \tag{16}$$

$$u(0,y)=\psi(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 1,$$

здесь кривая Γ *– правая полуокружность* $x=\sqrt{1-y^2}$, *непрерывные функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *заданы,* $\varphi(-1)=\psi(-1)=\varphi(1)=\psi(1)$.

Задача 2 (задача Келдыша). *Пусть* $p\geqslant 1$. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям (14)–(16).*

Решения уравнения (13), следуя [4; 5, с. 40], будем искать в виде произведения

$$u(x,y)=r_1^{\alpha}v(1-\sigma)=r_1^{\alpha}v(\xi),\quad \alpha=\mathrm{const},\tag{17}$$

где $\sigma=r^2/r_1^2$ (величины r^2 и r_1^2 определены в (5)). Подставляя функцию (17) в уравнение (13), получаем

$$(\xi_x^2+\xi_y^2)v''(\xi)+\left(\xi_{xx}+\xi_{yy}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y)\right)v'(\xi)+$$
$$+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy})+\frac{p\alpha}{x}\frac{r_{1x}}{r_1}\right)v(\xi)=0.\tag{18}$$

Предварительно вычислим коэффициенты уравнения (18):

$$\xi_x^2+\xi_y^2=\frac{4x_0}{xr_1^2}\xi(1-\xi),$$

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y)=-\frac{2\xi}{r_1^2}(\alpha+p)+\frac{4x_0}{xr_1^2}\left(p-\left(1+\frac{p}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\xi\right),$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy})+\frac{p\alpha}{x}\frac{r_{1x}}{r_1}=-\frac{p^2}{4}\frac{4x_0}{xr_1^2}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в уравнение (18) и положим $\alpha=-p$. Тогда получим гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)v''(\xi)+(p-(1+p)\xi)v'(\xi)-\frac{p^2}{4}v(\xi)=0.$$

Его линейно независимыми решениями являются функции

$$\overline{q}_1(x,y;x_0,y_0)=\overline{r}_1^{\,-p}F(p/2,p/2;p;1-\sigma),\tag{19}$$

$$\overline{q}_2(x,y;x_0,y_0)=\overline{r}_1^{\,-p}\xi^{1-p}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma)=$$
$$=(4xx_0)^{1-p}\overline{r}_1^{\,p-2}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma),\tag{20}$$

когда p не является целым числом. Отметим, что функции (19) и (20) не удовлетворяют сопряжённому уравнению

$$S_1^*v\equiv v_{xx}+v_{yy}-\left(\frac{p}{x}v\right)_x=0.\tag{21}$$

В связи с этим обстоятельством в работе [6] предложено умножить функции (19) и (20) на x^p, так как произведение $x^pu(x,y)=v(x,y)$ является решением уравнения (21), когда $u(x,y)$ – решение исходного уравнения (13). Тогда получим два фундаментальных решения уравнения (13):

$$q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1(x/r_1)^pF(p/2,p/2;p;1-\sigma),\tag{22}$$

$$q_2(x,y;x_0,y_0)=k_2xx_0^{1-p}r_1^{p-2}F(1-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma),\tag{23}$$

где k_1 и k_2 – постоянные, подбирающиеся специальным образом, $F(\cdot)={}_2F_1(\cdot)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Функции (22) и (23) являются решениями сопряжённого уравнения

(21) по переменным (x, y) и решениями самого уравнения (13) по переменным (x_0, y_0) и при $r \to 0$ имеют логарифмическую особенность.

Функцией Грина задач 1 и 2 будем называть функцию

$$G(x, y; x_0, y_0) = q_1(x, y; x_0, y_0) - g_1(x, y; x_0, y_0), \tag{24}$$

здесь функция $g_1(x, y; x_0, y_0)$ должна быть по паре (x, y) решением уравнения (21), а по паре (x_0, y_0) решением уравнения (13) и

$$G(x, y; x_0, y_0)|_\Gamma = 0 \quad \text{и} \quad G(x, y; x_0, y_0)|_{x=0} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < p < 1. \tag{25}$$

На основании доказанной выше теоремы построим функцию $g_1(x, y; x_0, y_0)$. Используя симметрию относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$, из фундаментального решения (22) получаем

$$g_1(x, y; x_0, y_0) = r_0^{-p} q_1(x, y, \overline{x}_0, \overline{y}_0) = r_0^{-p} (x/\overline{r}_1)^p F(p/2, p/2; p; 1 - \overline{\sigma}), \tag{26}$$

где $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, $\overline{\sigma} = \overline{r}^2/\overline{r}_1^2$, а остальные величины определены в (5). Тогда функция (24) с учётом представления (26) является решением уравнения (13) по паре (x_0, y_0) и решением уравнения (21) по паре (x, y), а также удовлетворяет граничным условиям (25), так как при $(x, y) \in \Gamma$, т.е. когда $x = \sqrt{1 - y^2}$, справедливо равенство $r_1 = r_0 \overline{r}_1$. Действительно,

$$r_1^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2((x + \overline{x}_0)^2 + (y - \overline{y}_0)^2),$$

или

$$1 + 2xx_0 - 2yy_0 + r_0^2 = r_0^2(1 + 2x\overline{x}_0 - 2y\overline{y}_0 + \overline{x}_0^2 + \overline{y}_0^2) = r_0^2 + 2xx_0 - 2yy_0 + 1.$$

При $x = 0$ функция (24) обращается в нуль за счёт множителя x^p $(p > 0)$, когда $r_0 \neq 0$.

Теперь, используя функцию Грина (24), решение задач 1 и 2 методом Грина можно построить в явном виде, что сделано в работе [6], но без обоснования того, почему функция (26) является решением уравнения (13) по паре (x_0, y_0).

Отметим, что в работе [23, с. 43] формула (23) приведена без вывода.

Пример 2. В четверти круга $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, \;\; x > 0, \;\; y > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$S_2 u(x, y) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x} u_x + \frac{p}{y} u_y = 0, \quad p > 0. \tag{27}$$

Следуя [24], решение этого уравнения будем искать в виде

$$u(x, y) = (r_1 r_2)^{-p} v(\xi), \tag{28}$$

здесь

$$\xi = 1 - \sigma = 1 - \left(\frac{r r_3}{r_1 r_2}\right)^2 = \frac{16 x x_0 y y_0}{(r_1 r_2)^2},$$

где величины r^2 и r_1^2 определены в (5), а величины $r_2^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2$ и $r_3^2 = (x + x_0)^2 + (y + y_0)^2$. Подставляя функцию (28) в уравнение (27), получаем

$$\begin{aligned} S_2[(r_1 r_2)^{-p} v(\xi)] = (r_1 r_2)^{-p} \Bigg\{ & v''(\xi)(\xi_x^2 + \xi_y^2) + \\ & + v'(\xi)\left(\xi_{xx} + \xi_{yy} - 2p\xi_x\left(\frac{r_{1x}}{r_1} + \frac{r_{2x}}{r_2}\right) - 2p\xi_y\left(\frac{r_{1y}}{r_1} + \frac{r_{2y}}{r_2}\right) + \frac{p}{x}\xi_x + \frac{p}{y}\xi_y\right) + \\ & + v(\xi)\left(-\frac{p}{r_1}(r_{1xx} + r_{1yy}) - \frac{p}{r_2}(r_{2xx} + r_{2yy}) + \frac{p(p+1)}{r_1^2}(r_{1x}^2 + r_{1y}^2) + \frac{p(p+1)}{r_2^2}(r_{2x}^2 + r_{2y}^2) + \right. \\ & \left. + \frac{2p^2}{r_1 r_2}(r_{1x} r_{2x} + r_{1y} r_{2y}) - \frac{p^2}{x}\left(\frac{r_{1x}}{r_1} + \frac{r_{2x}}{r_2}\right) - \frac{p^2}{y}\left(\frac{r_{1y}}{r_1} + \frac{r_{2y}}{r_2}\right)\right)\Bigg\} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Предварительно вычислим следующие величины:

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \frac{16x_0y_0(x^2+y^2)}{xy(r_1r_2)^2}\xi(1-\xi),$$

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = -\frac{16x_0y_0(x^2+y^2)}{xy(r_1r_2)^2}\xi, \quad r_{1x}^2 + r_{1y}^2 = 1, \quad r_{2x}^2 + r_{2y}^2 = 1,$$

$$r_{1xx} + r_{1yy} = \frac{1}{r_1}, \quad r_{2xx} + r_{2yy} = \frac{1}{r_2}, \quad r_{1x}r_{2x} + r_{1y}r_{2y} = \frac{x^2+y^2-x_0^2-y_0^2}{r_1r_2},$$

$$\frac{r_{1x}}{r_1} + \frac{r_{2x}}{r_2} = \frac{r_2^2(x+x_0) + r_1^2(x-x_0)}{(r_1r_2)^2}, \quad \frac{r_{1y}}{r_1} + \frac{r_{2y}}{r_2} = \frac{r_2^2(y-y_0) + r_1^2(y+y_0)}{(r_1r_2)^2},$$

$$\frac{\xi_x r_{1x}}{r_1} + \frac{\xi_y r_{1y}}{r_1} = \frac{16x_0y_0}{(r_1r_2)^4}((yx_0 - xy_0)r_2^2 - 2xy(x^2+y^2-x_0^2-y_0^2)),$$

$$\frac{\xi_x r_{2x}}{r_2} + \frac{\xi_y r_{2y}}{r_2} = \frac{16x_0y_0}{(r_1r_2)^2}((xy_0 - x_0y)r_1^2 - 2xy(x^2+y^2-x_0^2-y_0^2)).$$

Подставляя эти значения в уравнение (29), приходим к уравнению

$$S_2[(r_1r_2)^{-p}v] = (r_1r_2)^{-p}\frac{16x_0y_0(x^2+y^2)}{xy(r_1r_2)^2}\left(\xi(1-\xi)v''(\xi) + (p-(1+p)\xi)v'(\xi) - \frac{p^2}{4}v(\xi)\right) = 0.$$

Отсюда для функции $v(\xi)$ получаем гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)v''(\xi) + (p-(1+p)\xi)v'(\xi) - \frac{p^2}{4}v(\xi) = 0,$$

которое при нецелом $p > 0$ имеет два линейно независимых решения

$$v_1(\xi) = F(p/2, p/2; p; \xi), \tag{30}$$

$$v_2(\xi) = \xi^{1-p}F(1-p/2, 1-p/2; 2-p; \xi). \tag{31}$$

На основании решений (30) и (31) получаем два линейно независимых решения уравнения (27):

$$\overline{q}_1(x,y;x_0,y_0) = k_1(r_1r_2)^{-p}F(p/2, p/2; p; 1-\sigma), \tag{32}$$

$$\overline{q}_2(x,y;x_0,y_0) = k_2(r_1r_2)^{-p}\xi^{1-p}F(1-p/2, 1-p/2; 2-p; 1-\sigma). \tag{33}$$

Функции (32) и (33) являются решениями уравнения (27) по переменным (x,y) и (x_0,y_0), так как выражение для ξ симметрично относительно этих пар. Однако указанные функции не являются по переменным (x,y) и (x_0,y_0) решениями сопряжённого уравнения

$$S_2^*v \equiv v_{xx} + v_{yy} - \left(\frac{p}{x}u\right)_x - \left(\frac{p}{y}u\right)_y = 0. \tag{34}$$

Нетрудно заметить, что если функция $u(x,y)$ является решением уравнения (27), то произведение $(xy)^p u(x,y) = v(x,y)$ будет решением сопряжённого уравнения (34). Следовательно, фундаментальными решениями уравнения (27) являются следующие функции:

$$q_1(x,y;x_0,y_0) = k_1\left(\frac{xy}{r_1r_2}\right)^p F(p/2, p/2; p; \xi), \tag{35}$$

$$q_2(x,y;x_0,y_0) = k_2\left(\frac{xy}{r_1r_2}\right)^p \xi^{1-p}F(1-p/2, 1-p/2; 2-p; \xi). \tag{36}$$

Теперь, используя фундаментальное решение (35), на основании установленной теоремы нетрудно построить функцию Грина $G(x,y;x_0,y_0)$ первой граничной задачи для уравнения (27) в четверти круга D_2, именно:

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_1(x,y;x_0,y_0)-r_0^{-2p}q_1(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0)=$$
$$=k_1\left(\left(\frac{xy}{r_1r_2}\right)^pF(p/2,p/2;p;1-\sigma)-\left(\frac{xy}{\overline{r}_1\overline{r}_2}\right)^p r_0^{-2p}F(p/2,p/2;p;1-\overline{\sigma})\right),\qquad(37)$$

где

$$\overline{\sigma}=\left(\frac{\overline{r}\overline{r}_3}{\overline{r}_1\overline{r}_2}\right)^2,\quad \overline{r}_3^2=(x+\overline{x}_0)^2+(y+\overline{y}_0)^2,\quad \overline{r}_2^2=(x-\overline{x}_0)^2+(y+\overline{y}_0)^2.$$

Функция (37) обращается в нуль на осях координат $x=0$ и $y=0$, так как $p>0$, и на дуге $x^2+y^2=1$ в силу того, что $r=r_0\overline{r}$, $r_1=r_0\overline{r}_1$, $r_2=r_0\overline{r}_2$, $r_3=r_0\overline{r}_3$.

Пример 3. Рассмотрим в полушаре $D_3=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<1,\ x>0\}$ уравнение

$$S_3u(x,y,z)\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{p}{x}u_x=0,\quad p=\mathrm{const}>0.\qquad(38)$$

Отметим, что в работах [23, 25] построены фундаментальные решения уравнения (38), однако эти решения различаются между собой. В связи с этим найдём фундаментальные решения независимо от указанных работ.

Как и в случае примера 1, решение уравнения (38) будем строить в виде произведения

$$u(x,y,z)=r_1^\alpha v(\xi),\quad \alpha=\mathrm{const},\qquad(39)$$

где

$$\xi=1-\sigma=1-\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{4xx_0}{r_1^2},$$
$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\quad r_1^2=(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2.$$

Подставляя функцию (39) в уравнение (38), получаем

$$(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)v''(\xi)+\left(\xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y+r_{1z}\xi_z)\right)v'(\xi)+$$
$$+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2+r_{1z}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy}+r_{1zz})+\frac{p\alpha}{x}\frac{r_{1x}}{r_1}\right)v(\xi)=0.\qquad(40)$$

Вычислим коэффициенты уравнения (40):

$$\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2=\frac{4x_0}{xr_1^2}\xi(1-\xi),\quad \xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}=-\frac{2\xi}{r_1^2}-\frac{4x_0}{xr_1^2}\xi;$$
$$\frac{1}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y+r_{1z}\xi_z)=\frac{4x_0^2}{r_1^4}-\frac{\xi}{r_1^2};$$
$$\xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}+\frac{p}{x}\xi_x+\frac{2\alpha}{r_1}(r_{1x}\xi_x+r_{1y}\xi_y+r_{1z}\xi_z)=-\frac{2\xi}{r_1^2}(1+p+\alpha)+\frac{4x_0}{xr_1^2}\left(p-\left(1+\frac{p}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\xi\right),$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{r_1^2}(r_{1x}^2+r_{1y}^2+r_{1z}^2)+\frac{\alpha}{r_1}(r_{1xx}+r_{1yy}+r_{1zz})+\frac{p\alpha}{xr_1}r_{1x}=\frac{\alpha(\alpha+1+p)}{r_1^2}+\frac{p\alpha}{4}\frac{4x_0}{xr_1^2}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (40) и полагая $\alpha=-1-p$, приходим к гипергеометрическому уравнению

$$\xi(1-\xi)v''(\xi)+\left(p-\left(p+\frac{3}{2}\right)\xi\right)v'(\xi)-\frac{p(p+1)}{4}v(\xi)=0,$$

линейно независимыми решениями которого при нецелом $p > 0$ являются функции

$$\overline{q}_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = r_1^{-p-1}F(p/2+1/2,p/2;p;1-\sigma) = \frac{1}{rr_1^p}F(p/2-1/2,p/2;p;1-\sigma); \quad (41)$$

$$\overline{q}_2(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = r_1^{-p-1}\xi^{1-p}F(1/2-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma) =$$
$$= (4xx_0)^{1-p}r_1^{p-2}r^{-1}F(1/2-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma). \quad (42)$$

Функции (41) и (42) по переменным (x,y,z) не удовлетворяют сопряжённому уравнению

$$S_3^* u \equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\left(\frac{pu}{x}\right)_x = 0, \quad (43)$$

в связи с чем по той же причине, что и выше, функции (41) и (42) следует умножить на x^p. Тогда получим два фундаментальных решения уравнения (38):

$$q_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = k_1 x^p r_1^{-p} r^{-1} F(p/2-1/2,p/2;p;1-\sigma), \quad (44)$$

$$q_2(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = k_2 x x_0^{1-p} r_1^{p-2} r^{-1} F(1/2-p/2,1-p/2;2-p;1-\sigma),$$

которые отличаются от решений из работы [25] на множитель x^p, а решения в [23] имеют другой вид.

Используя доказанную выше теорему, нетрудно построить функцию Грина первой граничной задачи для уравнения (38) в полушаре D_3. Эта функция определяется формулой

$$G(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = q_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) - g_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0), \quad (45)$$

здесь функция q_1 задаётся равенством (44), а функция g_1 на основании теоремы имеет вид

$$g_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = r_0^{-p-1} q_1(x,y,z,\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{z}_0) = k_1 \frac{1}{r_0\overline{r}}\left(\frac{x}{r_0\overline{r}_1}\right)^p F((p-1)/2,p/2;p;1-\overline{r}^2/\overline{r}_1^2),$$

здесь

$$r_0^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2, \quad \overline{x}_0 = \frac{x_0}{r^2}, \quad \overline{y}_0 = \frac{y_0}{r^2}, \quad \overline{z}_0 = \frac{z_0}{r^2},$$

$$\overline{r}^2 = (x+\overline{x}_0)^2+(y-\overline{y}_0)^2+(z-\overline{z}_0)^2, \quad \overline{r}_1^2 = (x+\overline{x}_0)^2+(y-\overline{y}_0)^2+(z-\overline{z}_0)^2.$$

Построенная функция (45) является по переменным x_0, y_0, z_0 решением уравнения (38), по переменным x, y, z – решением сопряжённого уравнения (43) и удовлетворяет нулевому граничному условию на границе ∂D_3 полушара D_3. На сфере $x^2+y^2+z^2=1$ функция G равна нулю, так как в этом случае $r_1 = r_0\overline{r}_1$ и $r = r_0\overline{r}$.

Отметим, что, используя построенные функции Грина первой граничной задачи решения этой задачи для уравнений (27) и (38) можно построить в явном виде в указанных соответствующих областях D_2 и D_3. Построенные вторые фундаментальные решения уравнений (13), (27) и (38) можно использовать для построения решения задачи Хольмгрена в областях D_i, $i=\overline{1,3}$, где в отличии от задачи Дирихле на линии или плоскости сингулярности задаётся производная по нормали с весом.

3. Рассмотрим теперь эллиптические уравнения, вырождающиеся на части границы области, в которой они заданы, например уравнения (1), (6) из п. 1 и другие:

$$y^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0, \quad n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0, \quad m+n>0, \quad x>0, \quad y>0, \quad (46)$$

$$u_{xx} + x^n(u_{yy}+u_{zz}) = 0, \quad n>0, \quad x>0. \quad (47)$$

Уравнение (1) заменой переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{2}{2+m}y^{(2+m)/2} \quad (48)$$

с последующим переобозначением x_1 через y, а y_1 через x сводится к уравнению (13), где $p = m/(2+m) \in (0,1)$ при всех $m > 0$, для которого построены фундаментальные решения (22) и (23). Они с учётом замены (48) являются фундаментальными решениями уравнения (1), так как уравнение (1) является самосопряжённым.

Заменой
$$x_1 = \frac{2}{|2-n|} y^{(2-n)/2}, \quad y_1 = y \tag{49}$$
уравнение (6) преобразуется в уравнение вида (13), где $p = -n/(2-n) < 0$, если $n < 2$, и $p = n/(n-2)$, если $n > 2$. Согласно примеру 1 фундаментальными решениями уравнения (6) являются функции (22) и (23) с учётом замены (49). С их помощью можно построить функцию Грина задач Дирихле и Хольмгрена, что и сделано в работах [11, 12].

Замена
$$x_1 = \frac{2}{2+n} x^{(2+n)/2}, \quad y_1 = \frac{2}{2+m} y^{(2+m)/2}$$
сводит уравнение (46) к виду
$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} + \frac{p}{x_1} u_{x_1} + \frac{q}{y_1} u_{y_1} = 0, \tag{50}$$
здесь $p = n/(2+n)$, $q = m/(2+m)$. Для уравнения (50) при $p = q$ в примере 3 построены фундаментальные решения (35) и (36), которые можно использовать для уравнения (46) при $m = n$ для решения задач Дирихле и Хольмгрена методом Грина.

Уравнение (47) заменой
$$z_1 = \frac{2}{2+m} z^{(2+m)/2}, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y$$
преобразуется в уравнение (38), где $p = m/(2+m) \in (0,1)$ при $m > 0$. Функции (41) и (42) являются фундаментальными решениями уравнения (47), их можно использовать для построения функции Грина указанных граничных задач.

В заключение отметим, что результаты работ [3–6, 11, 12] вследствие доказанной теоремы можно считать обоснованными, а результаты работ [13, 14] для уравнения (7) верны только тогда, когда $\lambda = 0$, так как при $\lambda \neq 0$ эта теорема для уравнения (7) неверна. В работах [25, 26] для трёхмерных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами найдены фундаментальные решения, которые использованы для построения решения задачи Дирихле и Хольмгрена в полупространстве. Используя теорему, решения этих задач можно построить в шаровых областях.

Автор благодарит участников семинара, руководимого академиком Е.И. Моисеевым, в Московском университете, на котором им докладывались результаты этой работы, за конструктивное, полезное и доброжелательное её обсуждение, а также выражает признательность профессору С.М. Ситнику за указание на работу [21] и присылку её оттиска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson W. (Lord Kelvin).* Extrait d'une lettre de M. William Thomson à M. Liouville // J. de Math. Pures et Appl. 1845. V. 10. P. 364–367.
2. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.; Л., 1947.
3. *Holmgren E.* Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Matem., Astron., Fysik. 1926. V. 19B. № 14. P. 1–3.
4. *Gellerstedt S.* Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second order de type mixte: These pour le doctorat. Uppsala, 1935.
5. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.
6. *Пулькин С.П.* Некоторые краевые задачи для уравнений $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Учен. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та им. В.В. Куйбышева. 1968. Вып. 21. С. 3–55.

7. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
8. *Евсин В.И.* Задача Хольмгрена для одного уравнения с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 41–48.
9. *Евсин В.И.* О разрешимости задачи Хольмгрена для одного эллиптического вырождающегося уравнения // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 38–46.
10. *Евсин В.И.* Об одном аналоге формулы Пуассона // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 41–45.
11. *Сабитов К.Б.* О постановке краевых задач для уравнения смешанного типа с вырождением второго рода на границе бесконечной области // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 4. С. 146–150.
12. *Сабитов К.Б.* Задача типа Трикоми для уравнения смешанного типа с сильным характеристическим вырождением // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 333–337.
13. *Salakhitdinov M.S., Hasanov A.* A solution of the Neumann–Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. V. 53. № 4. P. 355–364.
14. *Salakhitdinov M.S., Hasanov A.* The Dirichlet problem for the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Euras. Math. J. 2012. V. 3. № 4. P. 99–110.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1968.
16. *Соболев С.С.* Уравнения математической физики. М., 1966.
17. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
18. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1976.
19. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М., 2000.
20. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М., 2013.
21. *Weinstein A.* On a singular differential operator // Ann. Mat. Pura Appl. 1960. V. 49. P. 359–365.
22. *Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара, 2008.
23. *Волкодавов В.Ф., Лернер М.Е., Николаев Н.Я., Носов В.А.* Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов. Куйбышев, 1982.
24. *Ежов А.М.* О решении пространственной задачи для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями вырождения // Дифференц. уравнения. Тр. пединститутов РСФСР. 1973. Вып. 2. С. 84–102.
25. *Rassias J.M., Hasanov A.* Fundamental solutions of two degenerated elliptic equations and solutions of boundary value problems in infinite area // Int. J of Appl. Math. & Stat. 2007. V. 8. № 7. P. 87–95.
26. *Hasanov A., Karimov E.T.* Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22. P. 1828–1832.

Институт стратегических исследований
Республики Башкортостан,
Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета

Поступила в редакцию 23.06.2020 г.
После доработки 06.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.