ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 66–81

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ИНЕРЦИИ

 Х. Г. Умаров

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, представляющего собой уравнение продольных колебаний толстого стержня с учётом поперечной инерции, в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0,+\infty)$ исследуется разрешимость задачи Коши в классе функций, которые при каждом фиксированном значении временно́й переменной $t \geqslant 0$ непрерывны на всей числовой оси и имеют конечные пределы на бесконечности. Найдены как достаточные условия существования глобального решения задачи Коши, так и достаточные условия его разрушения на конечном временно́м отрезке.

DOI: 10.31857/S0374064122010083

Введение. Нелинейное уравнение соболевского типа [1, гл. 2; 2, часть II], не разрешённое относительно временно́й производной второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + a\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+, \quad \mathbb{R}^1 = (-\infty,+\infty), \quad \mathbb{R}^1_+ = (0,+\infty), \tag{1}$$

где a, b – заданные числовые параметры, возникает при математическом моделировании различных физических процессов. Например, при $a = b = 0$ получается уравнение Буссинеска, описывающее течение несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости [3]; при $a \neq 0$, $b = 0$ – уравнение продольных колебаний толстого стержня с учётом поперечных инерционных эффектов [4, § 4.2.2]; при $a = 0$, $b \neq 0$ – уравнение продольных волн в нелинейно-упругом стержне [5, § 9.4.2], которое иногда называют модифицированным уравнением Буссинеска. Правая часть уравнения (1) при ненулевых a и b отражает совместное действие соответственно дисперсионных, поперечных инерционных и нелинейных эффектов.

Предполагаем, что стержень является бесконечным. Указанная идеализация допустима [6], если параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не отражаются.

Для уравнения (1) поставим задачу Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

считая, что начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат банахову пространству $C[\mathbb{R}^1]$ непрерывных функций $g\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, для которых существуют конечные пределы при $x \to \pm\infty$ и норма в котором задаётся равенством $\|g\|_C = \sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^1\}$ (см., например, [7, гл. VIII, § 1]). Классическое решение $u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times \overline{\mathbb{R}}^1_+$, $\overline{\mathbb{R}}^1_+ = [0,+\infty)$, задачи (1), (2) ищем в классе функций, которые при каждом фиксированном значении переменной $t \geqslant 0$ принадлежат по переменной x пространству $C[\mathbb{R}^1]$. Через $C^{(k)}[\mathbb{R}^1]$ обозначим линейное многообразие пространства $C[\mathbb{R}^1]$, состоящее из функций, первые k производных которых принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$, т.е.

$$C^{(k)}[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : g'(x), \ldots, g^{(k)}(x) \in C[\mathbb{R}^1]\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что если функция $g(x)$ принадлежит пересечению пространства $C[\mathbb{R}^1]$ с пространством Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, то справедлива [8] оценка

$$\|g\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |g(x)| \leqslant \|g\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ((g(x))^2 + (g'(x))^2)\,dx\right)^{1/2}, \tag{3}$$

причём если $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \to \pm\infty$ равен нулю.

Для скалярного произведения и нормы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ будем использовать соответственно обозначения $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|_2$, т.е.

$$(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

1. Вспомогательные результаты из теории сильно непрерывных полугрупп. В пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [7; 9, § 1.3] дифференциальный оператор d/dx с областью определения $D(d/dx) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$ является производящим оператором сильно непрерывной группы класса C_0 левых сдвигов:

$$U(t;d/dx)g(x) = g(x+t), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

а оператор d^2/dx^2, $D(d^2/dx^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, порождает сильно непрерывную полугруппу класса C_0:

$$U(t;d^2/dx^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x+\xi)\,d\xi, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+.$$

Обе эти операторнозначные функции являются сжимающими:

$$\|U(t;d/dx)\| \leqslant 1, \quad \|U(t;d^2/dx^2)\| \leqslant 1,$$

причём положительная полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентным множествам операторов d/dx и d^2/dx^2 и для соответствующих резольвент справедливы оценки норм

$$\|(\lambda I - d/dx)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}, \quad \|(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}\| = \|-(\sqrt{\lambda}I - d/dx)^{-1}(-\sqrt{\lambda}I - d/dx)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1},$$

где I – тождественный оператор.

Для функции $g = g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ справедливо неравенство [9, § 7.1] $\|g'\|_C^2 \leqslant 4\|g''\|_C\|g\|_C$, из которого следует, что $\|ag'(x)\|_C \leqslant \|g''(x)\|_C + a^2\|g(x)\|_C$. Последняя оценка означает, что оператор ad/dx подчинён оператору d^2/dx^2 с границей, не превышающей 1, но тогда [9, § 8.1] возмущённый оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx}$$

является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t,A)$ класса C_0 $(\|U(t;A)\| \leqslant 1)$, причём положительная полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A.

Отметим, что для $t > 0$ и натурального числа n если $g(x) \in C^{(n)}[\mathbb{R}^1]$, то $U(t;ad/dx)g(x) \in \in C^{(n)}[\mathbb{R}^1]$, и если $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$, то $U(t;d^2/dx^2)g(x) \in C^{(n)}[\mathbb{R}^1]$, при этом на произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливо представление

$$U(t;A)g(x) = U(t;ad/dx)U(t;d^2/dx^2)g(x) = U(t;d^2/dx^2)U(t;ad/dx)g(x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x+at+\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-x-at)^2/(4t)} g(\eta)\,d\eta,$$

для полугруппы, порождаемой оператором A, а для резольвенты этого оператора – представление

$$(\lambda I-A)^{-1}g(x)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda}U(s;A)g(x)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{a(\eta-x)/2}g(\eta)\,d\eta\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\lambda+a^2/4)s-(\eta-x)^2/(4s)}\frac{ds}{\sqrt{s}}=$$

(воспользуемся табличным интегралом [10, § 2.3.16])

$$=\frac{1}{2\sqrt{\lambda+a^2/4}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{a(\eta-x)/2-\sqrt{\lambda+a^2/4}|\eta-x|}g(\eta)\,d\eta.$$

Далее, оценим норму:

$$\left\|\frac{d}{dx}U\left(t;\frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)\right\|_C=\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\left\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\eta-x)e^{-(\eta-x)^2/(4t)}g(\eta)\,d\eta\right\|_C\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|g(x)\|_C}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}se^{-s^2/(4t)}ds\leqslant\frac{\|g(x)\|_C}{\sqrt{\pi t}}\quad\text{для всех}\quad g(x)\in C[\mathbb{R}^1].$$

Тогда, используя полученную мажоранту, имеем

$$\left\|a\frac{d}{dx}\left(\lambda I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}g(x)\right\|_C\leqslant|a|\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda s}\left\|\frac{d}{dx}U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)\right\|_C ds\leqslant$$

$$\leqslant|a|\frac{\|g(x)\|_C}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda s}\frac{ds}{\sqrt{s}}\leqslant\frac{|a|}{\sqrt{\lambda}}\|g(x)\|_C,\quad\lambda\in\mathbb{R}^1_+.$$

Следовательно, если $\lambda=1$ и $|a|<1$, то для нормы оператора

$$B=a\frac{d}{dx}\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}=a\left[\left(I-\frac{d}{dx}\right)^{-1}-\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right]$$

справедлива оценка $\|B\|\leqslant|a|<1$. Поэтому оператор $I-B$ обратим и для обратного к нему оператора справедливо разложение в степенной ряд $(I-B)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B^n$ и оценка нормы

$$\|(I-B)^{-1}\|\leqslant 1/(1-|a|).$$

Таким образом, если выполнено неравенство $|a|<1$, то для резольвенты $(I-A)^{-1}$ имеет место представление

$$(I-A)^{-1}=\left(I-a\frac{d}{dx}-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}=\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}(I-B)^{-1}=(I-B)^{-1}\left(I-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}.$$

2. Задача Коши для линейного однородного уравнения. Рассмотрим линейное однородное уравнение продольных колебаний толстого стержня, записанное в виде

$$(u-au_x-u_{xx})_{tt}=u_{xx}. \tag{4}$$

Пусть $u = u(x,t)$ – решение задачи Коши (4), (2), для которого частные производные u_{xx}, u_{xxt} непрерывны при $t \geqslant 0$. Введём новую неизвестную функцию

$$w = u - au_x - u_{xx}. \tag{5}$$

Используя принадлежность положительной полуоси $\lambda > 0$ резольвентному множеству дифференциального оператора A и замену (5), можно единственным образом определить начальные значения функции $w = w(x,t)$:

$$w_0(x) \equiv w|_{t=0} = \varphi(x) - a\varphi'(x) - \varphi''(x) \quad \text{и} \quad w_1(x) \equiv w_t|_{t=0} = \psi(x) - a\psi'(x) - \psi''(x),$$

при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат классу $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, и выразить через новую неизвестную функцию $w(x,t)$ решение $u(x,t)$ задачи Коши (4), (2):

$$u(x,t) = (I-A)^{-1}w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2/4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{a\eta/2-\sqrt{1+a^2/4}|\eta|} w(x+\eta,t)\,d\eta. \tag{6}$$

В результате подстановки (5) уравнение (4) можно записать в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = KW, \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{7}$$

где $W = W(t) : t \mapsto w(x,t)$ – искомая вектор-функция, определённая для $t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+$, со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, а K – линейный ограниченный оператор

$$K = (I-A)^{-1} - (I-B)^{-1}, \quad \|K\| \leqslant 2/(1-|a|) = a_0^2, \quad a_0 > 0,$$

который представляет собой продолжение на всё пространство $C[\mathbb{R}^1]$ линейного оператора

$$K_0 = (I-A)^{-1}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(I-A)^{-1},$$

определённого на функциях $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$.

Начальные условия в $C[\mathbb{R}^1]$ для уравнения (7) запишутся в виде

$$W|_{t=0} = \Phi, \quad W_t|_{t=0} = \Psi, \tag{8}$$

где $\Phi = \mathrm{w}_0(x)$, $\Psi = \mathrm{w}_1(x)$ – элементы пространства $C[\mathbb{R}^1]$.

С задачей Коши (7), (8) связана сильно непрерывная косинус оператор-функция $C(t;K)$ класса C_0, для которой на произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливо представление [9, § 1.4, § 4.2]

$$C(t;K)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} K^n g(x), \quad t \in \mathbb{R}^1, \tag{9}$$

причём ряд сходится равномерно по t на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}^1$. Отметим, что операторнозначная функция $C(t;K)$ непрерывна в равномерной операторной топологии и для неё справедлива следующая оценка нормы:

$$\|C(t;K)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\|K\|^n \leqslant \operatorname{ch}(a_0 t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}^1_+. \tag{10}$$

Для косинус оператор-функции $C(t;K)$ можно записать в явном виде её представление [7, с. 664] на элементах $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$. Для этого, используя интегральное представление степеней резольвенты $(\lambda I-\tilde{A})^{-1}$ производящего оператора $\tilde{A}$ полугруппы $U(t;\tilde{A})$ класса C_0, тип которой ω:

$$(\lambda I-\tilde{A})^{-n}g(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda}s^{n-1}U(s;\tilde{A})g(x)\,ds,\quad \operatorname{Re}\lambda>\omega,$$

запишем представления для следующих вспомогательных оператор-функций 1)–5).

1) Группа, порождаемая оператором $a(I-d/dx)^{-1}$:

$$U(t;a(I-d/dx)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}(I-d/dx)^{-n}g(x)=$$

$$=g(x)+\sqrt{|a|t}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}Y(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)g(x+s)\frac{ds}{\sqrt{s}},$$

где обозначено

$$Y(2\sqrt{|a|z},\operatorname{sgn}a)=\begin{cases}I_1(2\sqrt{az}), & \text{если } a>0,\\ -J_1(2\sqrt{|a|z}), & \text{если } a<0,\end{cases}$$

здесь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n z^{n+1/2}}{n!(n+1)!}=\left\{\begin{array}{c}I_1(2\sqrt{z})\\ J_1(2\sqrt{z})\end{array}\right\}$$

– функции Бесселя [10, § 5.2.10].

2) Группа, порождаемая оператором $-a(I-d^2/dx^2)^{-1}$:

$$U(t;-a(I-d^2/dx^2)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(at)^n}{n!}(I-d^2/dx^2)^{-n}g(x)=$$

$$=g(x)+\sqrt{\frac{|a|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(t,\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi,$$

где обозначено

$$Z(t,\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}Y^*(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)\frac{ds}{s}$$

и

$$Y^*(2\sqrt{|a|z},\operatorname{sgn}a)=\begin{cases}-J_1(2\sqrt{az}), & \text{если } a>0,\\ I_1(2\sqrt{|a|z}), & \text{если } a<0.\end{cases}$$

3) Группа, порождаемая оператором B:

$$U(t;B)g(x)=U(at;(I-d/dx)^{-1})U(-at;(I-d^2/dx^2)^{-1})g(x)=$$

$$=g(x)+\sqrt{|a|t}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}Y(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)g(x+s)\frac{ds}{\sqrt{s}}+$$

$$+\sqrt{\frac{|a|t}{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(t,\xi^2)g(x+\xi)\,d\xi+\frac{|a|t}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}Y(2\sqrt{|a|ts},\operatorname{sgn}a)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(t,\xi^2)g(x+s+\xi)\,d\xi.$$

4) Косинус оператор-функция, порождаемая оператором $-(I-B)^{-1}$:

$$C(t;-(I-B)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}(I-B)^{-n}g(x)=$$

$$=g(x)+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-s}{}_0F_2(;3/2,2;st^2/4)U(s;B)g(x)\,ds,$$

где

$${}_0F_2(;3/2,2;z/4)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(2n+2)!}$$

– обобщённая гипергеометрическая функция [11, § 7.2.3].

5) Косинус оператор-функция, порождаемая оператором $(I-A)^{-1}$:

$$C(t;(I-A)^{-1})g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}(I-A)^{-n}g(x)=g(x)+\frac{t^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t^2,\xi^2)g(x+at+\xi)\,d\xi,$$

где обозначено

$$Q(t^2,\xi^2)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}{}_0F_2(;3/2,2;st^2/4)\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Производящий оператор K косинус оператор-функции $C(t;K)$, $t\in\mathbb{R}^1$, можно рассматривать как результат возмущения производящего оператора $(I-A)^{-1}$ косинус оператор-функции $C(t;(I-A)^{-1})$ линейным ограниченным оператором $-(I-B)^{-1}$, который в свою очередь порождает косинус оператор-функцию $C(t;-(I-B)^{-1})$, а поэтому [9, § 8.2] для произвольного элемента $g(x)$ из пространства $C[\mathbb{R}^1]$ имеем

$$C(t;K)g(x)=C(t;(I-A)^{-1})g(x)+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 j_1(t\sqrt{1-s^2},(I-A)^{-1})C(ts;(I-B)^{-1})g(x)\,ds,$$

где

$$j_1(t,(I-A)^{-1})g(x)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{1-s^2}C(ts;(I-A)^{-1})g(x)\,ds.$$

С косинус оператор-функцией (9) ассоциируют [9, § 1.4] синус оператор-функцию

$$S(t;K)g(x)=\int\limits_0^t C(s;K)g(x)\,ds,\quad g(x)\in C[\mathbb{R}^1], \tag{11}$$

и линейное многообразие

$$C_1[\mathbb{R}^1]=\{g(x)\in C[\mathbb{R}^1]:C(t;K)g(x)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^1,C[\mathbb{R}^1])\},$$

т.е. подмножество $C_1[\mathbb{R}^1]\subseteq C[\mathbb{R}^1]$ состоит из тех функций из $C[\mathbb{R}^1]$, для которых функция $C(t;K)g(x):\mathbb{R}^1\to C[\mathbb{R}^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной t. Очевидно, что в рассматриваемом случае $C_1[\mathbb{R}^1]=C[\mathbb{R}^1]$.

Вследствие оценки (10) из определения (11) вытекает, что

$$\|S(t;K)\| \leqslant a_0^{-1}\mathrm{sh}(a_0t), \quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+. \tag{12}$$

Для того чтобы задача Коши (7), (8) была равномерно корректной на $\overline{\mathbb{R}}^1_+$, необходимо и достаточно, чтобы оператор K являлся производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(t;K)$ класса C_0, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (7), (8) даётся формулой [9, § 1.4]

$$W(t)=C(t;K)\Phi+S(t;K)\Psi, \quad t\in\mathbb{R}^1,$$

для любых $\Phi\in D(K)$ и $\Psi\in C_1[\mathbb{R}^1]$ (в рассматриваемом случае – для любых Φ и $\Psi\in C[\mathbb{R}^1]$).

Теперь, проводя обратную замену (6) и используя перестановочность между собой резольвенты $(I-A)^{-1}$ и косинус оператор-функции, порождаемой оператором K, находим решение задачи Коши для уравнения (4):

$$u(x,t)=(I-A)^{-1}W(t)=C(t;K)\varphi(x)+S(t;K)\psi(x). \tag{13}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть параметр a в уравнении (1) удовлетворяет условию $|a|<1$ и начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат подклассу $C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ пространства $C[\mathbb{R}^1]$. Тогда задача Коши (2) для линейного однородного уравнения (4) равномерно корректна, классическое решение даётся формулой (13) и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u(x,t)|\leqslant \mathrm{ch}(a_0t)\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi(x)|+a_0^{-1}\mathrm{sh}(a_0t)\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}^1_+.$$

Замечание 1. Классическое решение $u(x,t)$ задачи Коши (4), (2) принадлежит классу $C(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)\bigcap C^{0,1}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)\bigcap C^{2,2}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1_+)$. Классическое решение абстрактной задачи Коши (7), (8) – функция $W(t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+,C[\mathbb{R}^1])$, следовательно, $w(x,t)\in C^{0,2}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)$. В силу формулы (13) найденное решение $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,2}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)$, поэтому, учитывая ограниченность оператора K, заключаем, что это решение бесконечно дифференцируемо по временно́й переменной t, т.е. $u(x,t)\in C^{2,\infty}(\mathbb{R}^1,\overline{\mathbb{R}}^1_+)$.

3. Локальное решение задачи Коши для уравнения продольных колебаний толстого стержня. Рассмотрим уравнение, получающееся дифференцированием по x обеих частей уравнения (1) и последующей подстановкой $u_x=v$:

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}-a\frac{\partial^3v}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^4v}{\partial x^2\partial t^2}=\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2v^2}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Подействуем на обе части уравнения (14) линейным ограниченным оператором $(I-A)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (14) уравнение, которое в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt}=KV+F(V), \tag{15}$$

где $V=V(t):t\mapsto v(x,t)$ – искомая вектор-функция, оператор K – тот же, что и в уравнении (7), а F – заданный нелинейный оператор:

$$F(g)=[(I-A)^{-1}-(I-B)^{-1}]f(g),$$

здесь $f(g)$ – оператор суперпозиции:

$$f(g)=bg^2(x)/2, \quad g(x)\in C[\mathbb{R}^1].$$

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций и ограниченности операторов $(I-A)^{-1}$ и $(I-B)^{-1}$ следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(\cdot)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, а значит, $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Следовательно, существует промежуток $[0,t_0)$, в котором абстрактная задача Коши (15), (8) для любых $\Phi\in D(K)$ и $\Psi\in C_1[\mathbb{R}^1]$ (в рассматриваемом случае для любых Φ и $\Psi\in C[\mathbb{R}^1]$) имеет [12, § 3] единственное обобщённое решение $V=V(t)$, $t\in[0,t_0)$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$V(t)=C(t;K)\Phi+S(t;K)\Psi+\int\limits_0^t S(t-\tau;K)F(V(\tau))\,d\tau. \tag{16}$$

Из интегрального уравнения (16) в силу оценок (10), (12) вытекает интегральное неравенство

$$\|V(t)\|_C\leqslant h(t)+\frac{a_0|b|}{2}\int\limits_0^t \operatorname{sh}(a_0(t-\tau))\|V(\tau)\|_C^2\,d\tau, \tag{17}$$

в котором $h(t)=\|\Phi\|_C\operatorname{ch}(a_0t)+a_0^{-1}\|\Psi\|_C\operatorname{sh}(a_0t)$.

Используя элементарные соотношения $\operatorname{sh}(t-\tau)\leqslant\operatorname{ch}(t-\tau)\leqslant\operatorname{ch}(t)\operatorname{ch}(\tau)$, $t,\tau\in\overline{\mathbb{R}}^1_+$, запишем интегральное неравенство (17) в виде

$$\|V(t)\|_C\leqslant h(t)+\frac{a_0|b|}{2}\operatorname{ch}(a_0t)\int\limits_0^t \operatorname{ch}(a_0\tau)\|V(\tau)\|_C^2\,d\tau.$$

Отсюда выводим [13, § 1.3] оценку для нормы обобщённого решения

$$\|V(t)\|_C\leqslant h(t)\biggl(1-\frac{a_0|b|}{2}\int\limits_0^t \operatorname{ch}^2(a_0\tau)h(\tau)\,d\tau\biggr)^{-1},$$

или в подробной записи

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|v(x,t)|\leqslant 6\frac{a_0\|\Phi\|_C\operatorname{ch}(a_0t)+\|\Psi\|_C\operatorname{sh}(a_0t)}{6a_0-|b|\{a_0\|\Phi\|_C\operatorname{sh}(a_0t)(\operatorname{sh}^2(a_0t)+3)+\|\Psi\|_C(\operatorname{ch}^3(a_0t)-1)\}}, \tag{18}$$

в которой время t изменяется на отрезке $[0,t_1]$, где

$$t_1=\sup_\tau\Bigl\{a_0\|\Phi\|_C\operatorname{sh}(a_0\tau)[\operatorname{sh}^2(a_0\tau)+3]+\|\Psi\|_C\operatorname{ch}^3(a_0\tau)<6a_0/|b|+\|\Psi\|_C\Bigr\}.$$

Обобщённое решение $V(t)$, $t\in[0,t_1]$, интегрального уравнения (16) будет классическим решением абстрактной задачи Коши (15), (8), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что является следствием [12] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора F, при условии принадлежности начальных данных Φ и Ψ соответственно множествам $D(K)$ и $C_1[\mathbb{R}^1]$ и, значит, в рассматриваемом случае, для любых Φ и Ψ из $C[\mathbb{R}^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть параметр a в уравнении (1) удовлетворяет условию $|a|<1$ и начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $C[\mathbb{R}^1]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно. Тогда на временно́м отрезке $[0,t_1]$ существует единственное классическое решение $v=v(x,t)$ задачи Коши (14), (2) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка (18).*

Замечание 2. Из существования в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ локального классического решения уравнения (14)

$$v(x,t) = u_x(x,t) \in C[\mathbb{R}^1] \bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1) \tag{19}$$

следует существование на том же временно́м отрезке $[0,t_1]$ соответствующего классического решения $u(x,t) = \int_{-\infty}^{x} v(\xi,t)\,d\xi,$ уравнения (1) при выполнении требования принадлежности его пространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$.

4. Существование глобального решения и разрушение решения уравнения продольных колебаний толстого стержня. Рассмотрим для уравнения (1) так называемый интеграл энергии

$$y(t) \equiv (u,u) + (u_x,u_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2)\,dx, \quad t \in [0,t_1]. \tag{20}$$

Применяя к значениям производной $y'(t)$ интеграла энергии и её квадрата $[y'(t)]^2$ неравенство Коши–Буняковского $|(\varphi,\psi)| \leqslant \|\varphi\|_2 \|\psi\|_2,$ выводим вспомогательные оценки

$$y(t) \leqslant y(0) + \int\limits_0^t y(s)\,ds + \int\limits_0^t z(s)\,ds, \tag{21}$$

где $y(0) = (\varphi,\varphi) + (\varphi',\varphi') = \|\varphi\|^2_{W_2^1},$ и

$$(y'(t))^2 \leqslant 4y(t)z(t), \tag{22}$$

в которых обозначено

$$z(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{xt}^2)\,dx \equiv \|u_t\|^2_{W_2^1}.$$

Умножая обе части уравнения (1) на $u,$ интегрируя полученное равенство по $x \in \mathbb{R}^1,$ применяя формулу интегрирования по частям и учитывая равенство нулю при $x \to \pm\infty$ вне интегральных слагаемых, приходим к равенству

$$(u + au_x - u_{xx}, u_{tt}) + \|u_x\|_2^2 + \frac{b}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\,dx = 0. \tag{23}$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (1) на $u_t,$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left[z(t) + \|u_x\|_2^2 + \frac{b}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\,dx\right] = -2a(u_{xt},u_{tt}),$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0,t],$ находим, что

$$z(t) + \|u_x\|_2^2 + \frac{b}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\,dx = Z_0 - 2a\int\limits_0^t (u_{x\tau},u_{\tau\tau})\,d\tau, \tag{24}$$

где

$$Z_0 = \|\psi\|^2_{W_2^1} + \|\varphi'\|_2^2 + \frac{b}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(x))^3\,dx.$$

Далее, умножим обе части уравнения (1) на u_{tt} и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{xtt}\|_2^2 = (u_{tt}, u_{xx}) + b(u_{tt}, u_x u_{xx}). \tag{25}$$

Оценим квадрат нормы u_{tt}, записав уравнение (1) в виде

$$u_{tt} = Ku + \frac{b}{2} K_1 u_x^2, \tag{26}$$

где оператор

$$K_1 = (I-A)^{-1}\frac{d}{dx} = (I-B)^{-1}\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\frac{d}{dx} =$$
$$= (I-B)^{-1}\left[\left(I - \frac{d}{dx}\right)^{-1} - \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right] = \frac{1}{a}[(I-B)^{-1} - I],$$
$$\|K_1\| \leqslant \frac{1}{|a|}\left(1 + \frac{1}{1-|a|}\right).$$

Обозначим

$$k_0 = \max\left\{\|K\|; \frac{|b|}{2}\|K_1\|\right\} = \max\left\{\frac{2}{1-|a|}; \frac{|b|}{2|a|}\left(1 + \frac{1}{1-|a|}\right)\right\}.$$

Тогда, используя уравнение (26), условие (19) и оценку (3), приходим к цепочке неравенств

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \left(\|K\|\|u\|_2 + \frac{|b|}{2}\|K_1\|\|u_x^2\|_2\right)^2 \leqslant 2k_0^2(\|u\|_2^2 + \|u_x^2\|_2^2) \leqslant$$
$$\leqslant 2k_0^2\left(y(t) + \sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx\right) \leqslant 2k_0^2\left(y(t) + (\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|u_x|)^2 y(t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2k_0^2\left(y(t) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right)y(t)\right) \leqslant 2k_0^2\left(y(t) + \left(y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right)y(t)\right).$$

Таким образом,

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 2k_0^2((1 + \|u_{xx}\|_2^2)y(t) + y^2(t)). \tag{27}$$

Получим ещё одну оценку квадрата нормы u_{tt}, используя представление уравнения (1) в виде

$$u_{tt} = Ku + b(I-A)^{-1}u_x u_{xx}. \tag{28}$$

Обозначим

$$k_1 = \max\{\|K\|; |b|\|(I-A)^{-1}\|\} = \max\left\{\frac{2}{1-|a|}; \frac{|b|}{1-|a|}\right\}.$$

Используя уравнение (28), приходим к цепочке неравенств

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant (\|K\|\|u\|_2 + |b|\|(I-A)^{-1}\|\|u_x u_{xx}\|_2)^2 \leqslant 2k_1^2(\|u\|_2^2 + \|u_x u_{xx}\|_2^2) \leqslant$$
$$\leqslant 2k_1^2\left(y(t) + \sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right) \leqslant 2k_1^2\left[y(t) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\right)\|u_{xx}\|_2^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2k_1^2(y(t) + (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2)\|u_{xx}\|_2^2).$$

Итак,
$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 2k_1^2((1+\|u_{xx}\|_2^2)y(t)+\|u_{xx}\|_2^4). \tag{29}$$
Вернёмся к равенству (25), из него очевидно следует неравенство
$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant (u_{tt},u_{xx})+b(u_{tt},u_xu_{xx}),$$
применяя к слагаемым правой части которого оценку Коши–Буняковского, получим следующую цепочку неравенств:
$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \|u_{tt}\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+|b|(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_xu_{xx}\|_2^2) \leqslant$$
$$\leqslant (1+|b|)\|u_{tt}\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+|b|\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_x^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (1+|b|)\|u_{tt}\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+|b|\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2\,dx\Bigg)\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1+|b|)\|u_{tt}\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+y^2(t))+|b|(y(t)+\|u_{xx}\|_2^2)\|u_{xx}\|_2^2.$$
Отсюда, используя оценку (27) и обозначая для удобства записи $\|u_{xx}\|_2^2=N,$ приходим к неравенству
$$2|b|k_0^2y^2(t)+|b|(2k_0^2+(2k_0^2+1)N)y(t)+(1+|b|N)N \geqslant 0, \tag{30}$$
которое справедливо для всех значений интеграла энергии $y(t),$ но тогда дискриминант квадратного относительно $y(t)$ трёхчлена из левой части неравенства (30) должен быть неположителен, т.е.
$$b^2(2k_0^2-1)^2N^2+4k_0^2|b|(|b|(2k_0^2+1)-2)N+4b^2k_0^4 \leqslant 0, \tag{31}$$
причём $2k_0^2-1>0$ по определению постоянной $k_0.$

Для того чтобы дискриминант квадратного относительно N трёхчлена из левой части неравенства (31) был неотрицателен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:
$$|b| \leqslant \frac{1}{2k_0^2} \quad \text{или} \quad |b| \geqslant 1. \tag{32}$$
При выполнении условий (32) оба корня квадратного трёхчлена в (31) положительны, если и только если имеет место условие
$$|b|(2k_0^2+1)-2<0. \tag{33}$$

Из совместного рассмотрения условий (32) и (33) вытекает, что квадратный трёхчлен из неравенства (31) имеет положительные корни $N_{1,2}$ тогда и только тогда, когда
$$|b| \leqslant \frac{1}{2k_0^2}, \tag{34}$$
при этом
$$N_{1,2}=2k_0^2\frac{2-|b|(2k_0^2+1)\pm 2\sqrt{(2|b|k_0^2-1)(|b|-1)}}{|b|(2k_0^2-1)^2},$$
причём неравенство (31) будет выполняться при $N_1 \leqslant N \leqslant N_2,$ откуда следует оценка сверху для квадрата нормы функции u_{xx}:
$$\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant N_2. \tag{35}$$

Теперь неравенство (29) можно записать в виде
$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 2k_1^2((1+N_2)y(t)+N_2^2). \tag{36}$$

Из равенств (23) и (24), исключая слагаемое, содержащее параметр b, получаем

$$z(t) + \frac{1}{3}\|u_x\|_2^2 = Z_0 + \frac{2}{3}(u + au_x - u_{xx}, u_{tt}) - 2a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau,$$

откуда в силу соотношений

$$2\biggl|\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau\biggr| \leqslant \int\limits_0^t (\|u_{x\tau}\|_2^2 + \|u_{\tau\tau}\|_2^2)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau$$

с учётом неравенств $|a| < 1$ и

$$\frac{2}{3}|(u + au_x - u_{xx}, u_{tt})| \leqslant \frac{1}{3}(y(t) + \|u_{xx}\|_2^2) + \|u_{tt}\|_2^2,$$

вытекает, что

$$z(t) \leqslant Z_0 + \frac{1}{3}(y(t) + \|u_{xx}\|_2^2) + \|u_{tt}\|_2^2 + |a|\int\limits_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2\,d\tau + |a|\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

Используя неравенства (35) и (36), запишем оценку (37) в виде

$$z(t) \leqslant q(t) + |a|\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \tag{38}$$

где

$$q(t) = Z_0 + N_2\frac{1 + 2k_1^2 N_2}{3} + 2|a|k_1^2 N_2^2 t + \frac{1 + 2k_1^2(1 + N_2)}{3}y(t) + 2|a|k_1^2(1 + N_2)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

Пусть $Z_0 \geqslant 0$, т.е.

$$b\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(x))^3\,dx \geqslant -3(\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi'\|_2^2), \tag{39}$$

тогда $q(t) \geqslant 0$, и, значит, применяя к неравенству (38) лемму Гроноулла, будем иметь

$$z(t) \leqslant q(t) + |a|\int\limits_0^t q(s)e^{|a|(t-s)}\,ds. \tag{40}$$

Используя следующую оценку второго слагаемого в правой части неравенства (40):

$$|a|\int\limits_0^t q(s)e^{|a|(t-s)}\,ds \leqslant M_1 e^{|a|t} + M_2\int\limits_0^t y(\tau)e^{|a|(t-\tau)}\,d\tau,$$

где обозначено

$$M_1 = Z_0 + \frac{1}{3}N_2 + \frac{8}{3}k_1^2 N_2^2 \quad \text{и} \quad M_2 = \frac{1}{3}|a| + \frac{8}{3}|a|k_1^2(1 + N_2),$$

запишем неравенство (40) в виде

$$z(t) \leqslant q(t) + M_1 e^{|a|t} + M_2 \int\limits_0^t y(\tau) e^{|a|(t-\tau)}\, d\tau. \tag{41}$$

Учитывая неравенство (41), получаем оценку

$$\int\limits_0^t z(s)\, ds \leqslant q_1(t) + q_2(t) \int\limits_0^t y(s)\, ds, \tag{42}$$

где обозначено

$$q_1(t) = \left(Z_0 + N_2 \frac{1 + 2k_1^2 N_2}{3}\right) t + |a| k_1^2 N_2^2 t^2 + \frac{M_1}{|a|} e^{|a|t}$$

и

$$q_2(t) = \left(\frac{1 + 2k_1^2 (1 + N_2)}{3} + 2|a| k_1^2 (1 + N_2) t + M_2 t e^{|a|t}\right).$$

Воспользовавшись неравенством (42), запишем оценку (21) в виде интегрального неравенства

$$y(t) \leqslant (y(0) + q_1(t)) + (1 + q_2(t)) \int\limits_0^t y(s)\, ds,$$

откуда [13, § 1.2] для интеграла энергии (20) выводим оценку

$$y(t) \leqslant M(t) = (y(0) + q_1(t)) + (1 + q_2(t)) \int\limits_0^t (y(0) + q_1(s)) \exp\left(\int\limits_s^t (1 + q_2(\xi))\, d\xi\right) ds. \tag{43}$$

Из неравенств (43) и (3) вытекает следующая оценка нормы решения $u = u(x,t)$ уравнения (1) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u| \leqslant \sqrt{M(t)}, \tag{44}$$

обеспечивающая существование глобального решения задачи Коши (1), (2).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1) продольных колебаний толстого стержня параметр a удовлетворяет неравенству $|a| < 1$, а параметр b и начальные функции задачи Коши $\varphi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(x))^3\, dx \leqslant \infty$, $\psi(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$ – условиям (34) и (39). Тогда существует единственное глобальное классическое решение $u = u(x,t)$ задачи Коши (1), (2) такое, что $u(x,t)$, $u_x(x,t) \in C[\mathbb{R}^1] \bigcap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, и для него справедлива оценка (44).*

Далее исследуем вопрос о разрушении решения уравнения (1) на некотором конечном временно́м отрезке $[0,T]$, т.е. получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для интеграла энергии $y(t)$. Отрезок $[0,T]$ выбираем таким, чтобы на нём выполнялось неравенство $y(t) > 0$, которое в силу гладкости интеграла энергии следует из начального условия

$$y(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0. \tag{45}$$

Вычисляя производную второго порядка интеграла энергии (20), используя уравнение (1) и интегрируя по частям, выводим энергетическое равенство

$$y''(t) - 2z(t) + 2\|u_x\|_2^2 = -b \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x^3\, dx - 2a(u_x, u_{tt}). \tag{46}$$

Исключая из равенств (46) и (24) слагаемое с параметром b, будем иметь

$$y''(t) - 5z(t) + 3Z_0 + 2a(u_x, u_{tt}) + 6a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau = \|u_x\|_2^2,$$

откуда следует неравенство

$$y''(t) + 3Z_0 + 2a(u_x, u_{tt}) + 6a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau})\,d\tau \geqslant 5z(t).$$

Это неравенство сохранится, если мы, воспользовавшись оценками $\|u_x\|_2^2 \leqslant y(t)$, $\|u_{x\tau}\|_2^2 \leqslant z(\tau)$ и (36), (42), увеличим его левую часть:

$$2a(u_x, u_{tt}) \leqslant |a|(\|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) \leqslant |a|(1 + 2k_1^2(1 + N_2))y(t) + 2|a|k_1^2N_2^2$$

и

$$6a\int\limits_0^t (u_{x\tau}, u_{\tau\tau})\,d\tau \leqslant 3|a|\int\limits_0^t (\|u_{x\tau}\|_2^2 + \|u_{\tau\tau}\|_2^2)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 3|a|(q_1(t) + 2k_1^2N_2^2t) + 3|a|(q_2(t) + 2k_1^2(1 + N_2))\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau,$$

а также, применяя оценку (22), уменьшим правую часть:

$$y''(t) - \frac{5}{4}\frac{(y'(t))^2}{y(t)} + 3Z_0 + 2|a|k_1^2N_2^2 + 3|a|(q_1(t) + 2k_1^2N_2^2t) +$$

$$+ |a|(1 + 2k_1^2(1 + N_2))y(t) + 3|a|(q_2(t) + 2k_1^2(1 + N_2))\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau \geqslant 0.$$

Обозначая

$$\alpha(t) = 3Z_0 + 2|a|k_1^2N_2^2 + 3|a|(q_1(t) + 2k_1^2N_2^2t),$$

$$\beta = |a|(1 + 2k_1^2(1 + N_2)), \quad \gamma(t) = 3|a|(q_2(t) + 2k_1^2(1 + N_2)),$$

запишем последнее неравенство в виде

$$y''(t) - \frac{5}{4}\frac{(y'(t))^2}{y(t)} + \alpha(t) + \beta y(t) + \gamma(t)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau \geqslant 0,$$

откуда, учитывая равенства

$$\max_{t\in[0,T]} \alpha(t) = \alpha(T) \quad \text{и} \quad \max_{t\in[0,T]} \gamma(t) = \gamma(T),$$

получаем, что

$$y(t)y''(t) - \frac{5}{4}(y'(t))^2 + \alpha(T)y(t) + \beta y^2(t) + \gamma(T)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau\, y(t) \geqslant 0. \tag{47}$$

Из непрерывной дифференцируемости интеграла энергии $y(t)$ следует, что при выполнении начального условия

$$y'(0) = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x)\psi(x) + \varphi'(x)\psi'(x))\,dx > 0 \tag{48}$$

найдётся такой временно́й отрезок $[0, T_1] \subseteq [0, T]$, на котором производная интеграла энергии будет неотрицательна: $y'(t) \geqslant 0$, но тогда справедлива цепочка соотношений

$$\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau = \tau y(\tau)\Big|_0^t - \int\limits_0^t \tau y'(\tau)\,d\tau \leqslant ty(t) \leqslant T_1 y(t). \tag{49}$$

С учётом (49) из неравенства (47) следует, что на отрезке $[0, T_1]$ выполняется неравенство

$$y(t)y''(t) - \frac{5}{4}(y'(t))^2 + (\beta + T_1\gamma(T))y^2(t) + \alpha(T)y(t) \geqslant 0, \tag{50}$$

сравнивая которое с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств для интеграла энергии [14, Приложение, § 5], заключаем, что имеет место

Теорема 4. *Пусть параметры a $(|a| < 1)$, b в уравнении (1) продольных колебаний толстого стержня и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задачи Коши обеспечивают, в дополнение к условиям (45), (48), выполнение требования*

$$(y'(0))^2 > 4(\beta + T_1\gamma(T))y^2(0) + \frac{4}{3}\alpha(T)y(0).$$

Тогда временно́й отрезок $[0, T_1] \subseteq [0, T]$ не может быть сколь угодно большим, а именно, справедлива следующая оценка сверху времени существования классического решения задачи Коши (1), (2):

$$T_1 \leqslant T_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{y(0)}\,\Omega},$$

где постоянная $\Omega > 0$ определяется равенством

$$\Omega^2 = \frac{1}{16}y^{-5/2}(0)(y'(0))^2 - \frac{\beta + T_1\gamma(T)}{4}y^{-1/2}(0) - \frac{\alpha(T)}{12}y^{-3/2}(0),$$

причём имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} \sup y(t) = +\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г.В. Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск, 1998.
2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
3. *Габов С.А., Оразов Б.Б.* Об уравнении $\partial^2/\partial t^2[u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 92–102.
4. *Beards C.F.* Structural Vibration: Analysis and Damping. Oxford, 2003.
5. *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М., 2003.
6. *Ерофеев И.В.* Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях // Вестн. науч.-техн. развития. 2012. № 5 (57). С. 3–18.

7. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
8. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
9. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 58. М., 1990. С. 87–202.
10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
11. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
12. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
13. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002.
14. *Корпусов М.О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М., 2012.

Отдел физико-математических и химических наук
Академия наук Чеченской Республики, г. Грозный,
Чеченский государственный педагогический университет,
г. Грозный

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.
После доработки 14.12.2020 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.