ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 82–92

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О РАЗРЕШИМОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2022 г. С. С. Харибегашвили, Б. Г. Мидодашвили

Для одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными рассматривается специальная краевая задача в цилиндрической области. Исследованы вопросы существования, единственности и отсутствия решений этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122010095

1. Введение. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и t рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$L_f := \frac{\partial^{4k}u}{\partial t^{4k}} - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(u) = F(x,t), \tag{1.1}$$

где вектор-функции $f=(f_1,\ldots,f_N)^{\text{т}}$, $F=(F_1,\ldots,F_N)^{\text{т}}$ заданы (условия, которым они удовлетворяют, приводятся ниже), а $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}$ – искомая вектор-функция, $N\geqslant 2$; A_{ij} – заданные постоянные квадратные матрицы порядка N, причём $A_{ij}=A_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$, $n\geqslant 2$, k – натуральное число.

Для системы (1.1) рассмотрим краевую задачу в следующей постановке: в цилиндрической области $D_T := \Omega\times(0,T)$, где Ω – открытая липшицева область в $\mathbb{R}^n$, найти решение $u = u(x,t)$ системы (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{\Omega_0\bigcup\Omega_T} = 0, \quad i=\overline{0,2k-1}, \tag{1.3}$$

где $\Gamma := \partial\Omega\times(0,T)$ – боковая часть границы цилиндрической области D_T, а $\Omega_0=\Omega\times\{0\}$ и $\Omega_T=\Omega\times\{T\}$ – нижнее и верхнее основания этого цилиндра соответственно.

В скалярном случае, т.е. когда $N=1$, эта задача изучена в работе [1]. Исследованию начальных и смешанных задач для полулинейных дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка, имеющих структуру, отличную от (1.1), посвящена многочисленная литература (см., например, работы [2–12] и приведённую в них библиографию).

Обозначим через $C^{2,4k}(\overline{D}_T)$ линейное пространство непрерывных в $\overline{D}_T$ вектор-функций $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}$, имеющих непрерывные в $\overline{D}_T$ частные производные $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$, $\partial^l u/\partial t^l$, $i,j=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,4k}$. Положим

$$C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T) := \left\{u\in C^{2,4k}(\overline{D}_T) : u|_{\Gamma}=0,\ \left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{\Omega_0\bigcup\Omega_T}=0,\ i=\overline{0,2k-1}\right\}.$$

Введём гильбертово пространство $W_0^{1,2k}(D_T)$, которое получается пополнением по норме

$$\|u\|^2_{W_0^{1,2k}(D_T)} = \int\limits_{D_T}\left[|u|^2 + \sum_{i=1}^{2k}\left|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right]dx\,dt \tag{1.4}$$

классического пространства $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$, здесь и в дальнейшем $|u|^2=\sum_{i=1}^N u_i^2$.

Замечание 1.1. Из определения (1.4) следует, что если $u \in W_0^{1,2k}\ (D_T)$, то тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T)$ и $\partial^i u/\partial t^i \in L_2(D_T)$, $i = \overline{1, 2k}$. Здесь $W_2^1(D_T)$ – хорошо известное пространство Соболева, состоящее из элементов пространства $L_2(D_T)$, имеющих обобщённые частные производные первого порядка из $L_2(D_T)$, и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T) = \{u \in W_2^1(D_T) : u|_{\partial D_T} = 0\}$, где равенство $u|_{\partial D_T} = 0$ понимается в смысле теории следа [13, с. 70].

Будем предполагать, что в системе (1.1) нелинейная вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_N)^{\text{т}}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C(\mathbb{R}^N), \quad |f(u)| \leqslant M_1 + M_2|u|^\alpha, \quad u \in \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

где $M_i = \text{const} \geqslant 0$, $i = 1, 2$, и

$$0 \leqslant \alpha = \text{const} < (n+1)/(n-1). \tag{1.6}$$

Замечание 1.2. Оператор вложения $I : W_2^1(\overline{D}_T) \to L_q(D_T)$ является линейным непрерывным компактным оператором, если $1 < q < 2(n+1)/(n-1)$, $n > 1$ [13, с. 81]. В то же время оператор Немыцкого $K : L_q(D_T) \to L_2(D_T)$, действующий по формуле $Ku = f(u)$, где $u = (u_1, \ldots, u_N)^{\text{т}} \in L_q(D_T)$ и вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_N)^{\text{т}}$ удовлетворяет условию (1.5), является непрерывным и ограниченным при $q \geqslant 2\alpha$ [14, с. 66, 67]. Поэтому если $\alpha < (n+1)/(n-1)$, то существует число q такое, что $1 < q < 2(n+1)/(n-1)$ и $q \geqslant 2\alpha$. Следовательно, в этом случае оператор

$$K_0 = KI : W_2^1(D_T) \to L_2(D_T) \tag{1.7}$$

является непрерывным и компактным. Поэтому из включения $u \in W_2^1(D_T)$ следует включение $f(u) \in L_2(D_T)$, а из сходимости $u^m \to u$ при $m \to \infty$ в пространстве $W_2^1(D_T)$ – сходимость $f(u^m) \to f(u)$ при $m \to \infty$ в пространстве $L_2(D_T)$.

Здесь и ниже принадлежность вектор-функции $v = (v_1, \ldots, v_N)^{\text{т}}$ некоторому пространству X означает, что каждая её компонента v_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, принадлежит пространству X.

Замечание 1.3. Пусть $u \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ – классическое решение задачи (1.1)–(1.3). Умножив скалярно на произвольную вектор-функцию $\varphi \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ обе части системы (1.1) и проинтегрировав полученное равенство по частям по области D_T, получим

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] dx\,dt + \int\limits_{D_T} f(u)\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt. \tag{1.8}$$

Примем равенство (1.8) за основу определения слабого обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3).

Определение. Пусть вектор-функция f удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), а вектор-функция F принадлежит пространству $L_2(D_T)$. Вектор-функция $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ называется *слабым обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3)*, если интегральное равенство (1.8) справедливо для любой вектор-функции $\varphi \in W_0^{1,2k}(D_T)$, т.е.

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] dx\,dt + \int\limits_{D_T} f(u)\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любой} \quad \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T). \tag{1.9}$$

Отметим, что интеграл $\int_{D_T} f(u)\varphi\,dx\,dt$ в равенстве (1.9) определён корректно, поскольку в силу замечания 1.2 из $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ следует, что $f(u) \in L_2(D_T)$ и, значит, имеет место включение $f(u)\varphi \in L_1(D_T)$.

Нетрудно проверить, что если решение u задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения принадлежит классу $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$, то оно будет и классическим решением этой задачи.

2. Разрешимость задачи (1.1)–(1.3). Ниже предполагаем, что оператор

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.1}$$

является сильно эллиптическим, т.е. что матрица $Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\xi_i\xi_j$ при каждом ненулевом $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n$ является положительно определённой [13, с. 243]:

$$(Q(\xi)\eta, \eta)_{\mathbb{R}^N} > 0 \text{ для любого } \eta \in \mathbb{R}^N \backslash \{(0, \ldots, 0)^{\text{т}}\} \text{ при каждом } \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)^{\text{т}}\}, \tag{2.2}$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\mathbb{R}^N}$ – стандартное скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Как показано в [13, с. 244] неравенство (2.2) накладывает ограничение только на симметрическую часть матриц A_{ij}.

Отметим, что в скалярном случае оператор (2.1) является обычным эллиптическим оператором и в этом случае линейная часть оператора L_f из (1.1), т.е. оператор L_0, является семиэллиптической [15, с. 142].

При выполнении условия (2.2) в пространстве $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ наряду со скалярным произведением

$$(u, v)_0 = \int\limits_{D_T} \left[(u, v)_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial^i v}{\partial t^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx\, dt \tag{2.3}$$

с нормой $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{W_0^{1,2k}(D_T)}$, определённой правой частью равенства (1.4), введём скалярное произведение

$$(u, v)_1 = \int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx\, dt \tag{2.4}$$

и соответствующую норму

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_{D_T} \left[\left| \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \right|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dx\, dt, \tag{2.5}$$

где $u, v \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$.

Лемма 2.1. *Имеет место двойная оценка*

$$c_1\|u\|_0 \leqslant \|u\|_1 \leqslant c_2\|u\|_0 \quad \textit{для всех} \quad u \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T) \tag{2.6}$$

с положительными постоянными c_1 *и* c_2, *не зависящими от* u.

Доказательство. Если $u \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$, то при фиксированном $t \in [0, T]$ вектор-функция $u(\,\cdot\,, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет неравенству [13, с. 62]

$$\|u(\,\cdot\,, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant c_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 dx \tag{2.7}$$

с положительной постоянной $c_0 = c_0(\Omega)$, не зависящей от u и t.

Как известно, из неравенства (2.2) следует, что [13, с. 244]

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx \geqslant k_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \quad \text{для любой} \quad v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{2.8}$$

с положительной постоянной k_0, не зависящей от v.

В силу оценок (2.7) и (2.8) имеем

$$\|u(\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{c_0}{k_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\,dx \quad \text{для всех} \quad u\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T). \tag{2.9}$$

Так как матрицы A_{ij} постоянны, то наряду с (2.8) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx \leqslant k_1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \quad \text{для любой} \quad v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \tag{2.10}$$

с положительной постоянной k_1, не зависящей от v.

Интегрируя неравенства (2.7)–(2.10) по $t\in[0,T]$, получаем оценки

$$\|u\|^2_{L_2(D_T)} \leqslant c_0\int\limits_{D_T}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2(x,t)\,dx\,dt, \tag{2.11}$$

$$\|u\|^2_{L_2(D_T)} \leqslant \frac{c_0}{k_0}\int\limits_{D_T}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\,dx\,dt, \tag{2.12}$$

$$k_0\int\limits_{D_T}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\,dt \leqslant \int\limits_{D_T}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx\,dt \leqslant k_1\int\limits_{D_T}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\,dt \tag{2.13}$$

для любой $u\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$.

Так как вектор-функция $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\mathrm{т}}\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$ удовлетворяет равенствам (1.3), то несложно видеть, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i} = \frac{1}{(2k-i-1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{2k-i-1}\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}\,d\tau, \quad i=\overline{1,2k-1},$$

откуда, используя неравенство Коши, будем иметь

$$\left|\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i}\right|^2 \leqslant \frac{1}{((2k-i-1)!)^2}\int\limits_0^t (t-\tau)^{2(2k-i-1)}\,d\tau\int\limits_0^t\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,t)}{\partial t^{2k}}\right|^2 d\tau =$$

$$= \frac{t^{4k-2i-1}}{((2k-i-1)!)^2(4k-2i-1)}\int\limits_0^t\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,t)}{\partial t^{2k}}\right|^2 d\tau \leqslant T^{4k-2i-1}\int\limits_0^T\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}v\right|^2 d\tau. \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) следует, что

$$\int\limits_0^t\left|\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i}\right|^2 d\tau \leqslant T^{4k-2i}\int\limits_0^T\left|\frac{\partial^{2k}u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}\right|^2 d\tau, \quad i=\overline{1,2k-1}.$$

Интегрируя полученное неравенство по Ω, получаем

$$\int\limits_{D_T}\left|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|^2 dx\,dt \leqslant T^{4k-2i}\int\limits_{D_T}\left|\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|^2 dx\,dt, \quad i=\overline{1,2k-1}. \tag{2.15}$$

Наконец, из (1.4), (2.3), (2.5), (2.11)–(2.13) и (2.15) легко следует (2.6). Лемма доказана.

Замечание 2.1. Согласно лемме 2.1 если пополнить пространство $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T)$ по норме (2.5), то вследствие определения (2.3) получится то же самое гильбертово пространство $W_0^{1,2k}(D_T)$ с эквивалентными скалярными произведениями (2.3) и (2.4).

Введём следующее условие:

$$\lim_{|u|\to\infty} \inf \frac{uf(u)}{|u|^2} \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Лемма 2.2. *Пусть $F \in L_2(D_T)$ и выполнены условия (1.5), (1.6) и (2.16). Тогда для любого слабого обобщённого решения $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ задачи (1.1)–(1.3) имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_0 = \|u\|_{W_0^{1,2k}(D_T)} \leqslant c_3 \|F\|_{L_2(D_T)} + c_4 \tag{2.17}$$

с постоянными $c_3 > 0$ и $c_4 \geqslant 0$, не зависящими от u и F.

Доказательство. Так как $f \in C(\mathbb{R}^N)$, то из условия (2.16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M_\varepsilon \geqslant 0$, при котором

$$uf(u) \geqslant -M_\varepsilon - \varepsilon |u|^2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{R}^N. \tag{2.18}$$

Полагая $\varphi = u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ в равенстве (1.9) и принимая во внимание неравенство (2.18) и определение (2.5), для любого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\|u\|_1^2 = -\int\limits_{D_T} uf(u)\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} Fu\,dx\,dt \leqslant M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + \varepsilon \int\limits_{D_T} u^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} \left(\frac{1}{4\varepsilon}F^2 + \varepsilon|u|^2\right) dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{L_2(D_T)}^2 + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon \|u\|_{L_2(D_T)}^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{L_2(D_T)}^2 + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon\|u\|_0^2. \tag{2.19}$$

Из (2.6) и (2.19) следует двойное неравенство

$$c_1^2\|u\|_0^2 \leqslant \|u\|_1^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{L_2(D_T)}^2 + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon\|u\|_0^2,$$

положив в котором $\varepsilon = c_1^2/4$, получим

$$\|u\|_0^2 \leqslant 2c_1^{-4}\|F\|_{L_2(D_T)}^2 + 2c_1^{-2} M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка (2.17), где ${c_3}^2 = 2c_1^{-4}$ и ${c_4}^2 = 2c_1^{-2} M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T$ при $\varepsilon = c_1^2/4$. Лемма доказана.

Замечание 2.2. Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в нелинейном случае, рассмотрим соответствующую (1.1)–(1.3) линейную задачу, т.е. когда $f = 0$. В этом случае при $F \in L_2(D_T)$ аналогичным образом вводится определение слабого обобщённого решения $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ этой задачи: для него должно выполняться интегральное равенство

$$(u,\varphi)_1 = \int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] dx\,dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt \quad \text{для любой} \quad \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T). \tag{2.20}$$

С учётом левой оценки в (2.6) имеем

$$\left|\int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt\right| \leqslant \|F\|_{L_2(D_T)} \|\varphi\|_{L_2(D_T)} \leqslant \|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_0 \leqslant c_1^{-1}\|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_1. \tag{2.21}$$

В силу замечания 2.1 и соотношений (2.20) и (2.21) из теоремы Рисса следует существование единственной вектор-функции $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$, для которой выполняется равенство (2.20) и для нормы которой справедлива оценка

$$\|u\|_1 \leqslant c_1^{-1}\|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.22}$$

В силу левой оценки в (2.6) из (2.22) следует, что

$$\|u\|_0 = \|u\|_{W_0^{1,2k}(D_T)} \leqslant c_1^{-2}\|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.23}$$

Таким образом, вводя обозначение $u = L_0^{-1}F$, находим, что линейной задаче, соответствующей задаче (1.1)–(1.3), т.е. когда $f = 0$, отвечает линейный ограниченный оператор

$$L_0^{-1} : L_2(D_T) \to W_0^{1,2k}(D_T),$$

для нормы которого в силу (2.23) имеет место оценка

$$\|L_0^{-1}\|_{L_2(D_T)\to W_0^{1,2k}(D_T)} \leqslant c_1^{-2}. \tag{2.24}$$

Принимая во внимание определение и замечание 2.2, запишем интегральное тождество (1.9), эквивалентное задаче (1.1)–(1.3), в виде функционального уравнения

$$u = L_0^{-1}[-f(u) + F] \tag{2.25}$$

в гильбертовом пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$.

Замечание 2.3. Так как в силу определения (1.4) и замечания 1.1 пространство $W_0^{1,2k}(D_T)$ непрерывно вложено в пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T)$, то при выполнении условий (1.5), (1.6) оператор

$$K_1 = KII_1 : W_0^{1,2k}(D_T) \to L_2(D_T),$$

где KI – оператор, определённый в замечании 1.2 (см. (1.7)), $I_1 : W_0^{1,2k}(D_T) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_T)$ – оператор вложения, также является непрерывным и компактным.

Запишем уравнение (2.25) в виде

$$u = Au := L_0^{-1}(K_1u + F). \tag{2.26}$$

Принимая во внимание уравнение (2.25) и замечание 2.3, заключаем, что оператор $A : W_0^{1,2k}(D_T) \to W_0^{1,2k}(D_T)$ из (2.26) является непрерывным и компактным. В то же время вследствие схемы доказательства априорной оценки (2.17) из леммы 2.2, в которой $c_3^2 = 2c_1^{-4}$ и $c_4^2 = 2c_1^{-2}M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T$, $\varepsilon = c_1^2/4$, нетрудно видеть, что для любого значения параметра $\tau \in \in [0,1]$ и любого решения $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ уравнения $u = \tau Au$ справедлива та же априорная оценка (2.17) с теми же постоянными $c_3 > 0$ и $c_4 \geqslant 0$, не зависящими от u, F и τ. Поэтому, согласно теореме Лере–Шаудера о неподвижной точке [16, с. 375], уравнение (2.26), а следовательно, и задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно слабое обобщённое решение u в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (1.5), (1.6) и (2.16). Тогда для любой вектор-функции $F \in L_2(D_T)$ задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно слабое обобщённое решение u в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$.*

3. Единственность решения задачи (1.1)–(1.3). Введём условие

$$(f(u) - f(v))(u - v) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Несложно проверить, что условие (3.1) будет выполнено, если вектор-функция $f=(f_1,\ldots,f_N)^{\text{т}}$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{R}^N)$ и матрица $(\partial f_i/\partial u_j)_{i,j=1}^N$ является неотрицательно определённой, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u)\xi_i\xi_j\geqslant 0\quad\text{для всех }\ \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_N)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^N\ \text{ при каждом }\ u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^N.$$

Теорема 3.1. *Пусть вектор-функция f удовлетворяет условиям (1.5), (1.6), (3.1). Тогда для любой вектор-функции $F\in L_2(D_T)$ задача (1.1)–(1.3) не может иметь более одного слабого обобщённого решения в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,2k}_0(D_T)$.*

Доказательство. Пусть $F\in L_2(D_T)$ и $u_1,\ u_2$ – два слабых обобщённых решения задачи (1.1)–(1.3) в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$, т.е., согласно (1.9), имеют место равенства

$$\int\limits_{D_T}\bigg[\frac{\partial^{2k}u_l}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\bigg]\,dx\,dt+\int\limits_{D_T}f(u_l)\varphi\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{D_T}F\varphi\,dx\,dt\quad\text{для любой}\quad\varphi\in W_0^{1,2k}(D_T),\quad l=1,2. \tag{3.2}$$

Из (3.2) вытекает, что для разности $v=u_2-u_1$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{D_T}\bigg[\frac{\partial^{2k}v}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\bigg]\,dx\,dt=$$

$$=-\int\limits_{D_T}(f(u_2)-f(u_1))\varphi\,dx\,dt\quad\text{для любой}\quad\varphi\in W_0^{1,2k}(D_T), \tag{3.3}$$

полагая в котором $\varphi=v\in W_0^{1,2k}(D_T)$, в силу определения (2.5) получаем

$$\|v\|_1=-\int\limits_{D_T}(f(u_2)-f(u_1))(u_2-u_1)\,dx\,dt. \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) и условия (3.1) с учётом левой оценки (2.6) следует, что

$$c_1\|v\|_0\leqslant\|v\|_1\leqslant 0,$$

поэтому $v=0$, т.е. $u_2=u_1$. Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия (1.5), (1.6), (2.16) и (3.1). Тогда для любой вектор-функции $F\in L_2(D_T)$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное слабое обобщённое решение u в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$.*

4. Случаи отсутствия решения задачи (1.1)–(1.3). Ниже рассмотрим частный случай системы (1.1), когда она расщеплена в главной части, т.е. $A_{ij}=a_{ij}I_N$, где I_N – единичная матрица порядка N, а числа a_{ij} такие, что оператор $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2/\partial x_i\partial x_j$ является скалярным эллиптическим оператором.

Наложим на вектор-функцию f следующее условие: существуют числа $l_1,\ \ldots,\ l_N$, не все из которых нулевые, такие, что

$$\sum_{i=1}^{N}l_if_i(u)\leqslant-\bigg|\sum_{i=1}^{N}l_iu_i\bigg|^{\beta}\quad\text{для любого}\ \ u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^N,\quad 1<\beta=\text{const}<\frac{n+1}{n-1}. \tag{4.1}$$

Для упрощения изложения рассмотрим случай, когда область Ω – единичный шар $|x|<1$.

Теорема 4.1. *Пусть вектор-функция f удовлетворяет условиям (1.5), (1.6) и (4.1). Пусть $F^0=(F_1^0,\ldots,F_N^0)^{\text{т}}\in L_2(D_T)$, $G=\sum_{i=1}^N l_iF_i^0\geqslant 0$ и $\|G\|_{L_2(D_T)}\neq 0$. Тогда существует число $\mu_0=\mu_0(G,\beta)>0$ такое, что при $\mu>\mu_0$ задача (1.1)–(1.3) не имеет слабого обобщённого решения в пространстве $W_0^{1,2k}(D_T)$ для $F=\mu F_0$.*

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены и слабое обобщённое решение $u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}}\in W_0^{1,2k}(D_T)$ задачи (1.1)–(1.3) существует для любого фиксированного $\mu>0$. Предположим также, что $\varphi=(l_1\varphi_0,\ldots,l_N\varphi_0)^{\text{т}}$ в равенстве (1.9), где φ_0 – скалярная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_0\geqslant 0,\quad \varphi_0\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T), \tag{4.2}$$

где пространство $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)\subset W_0^{1,2k}(D_T)$ введено во введении.

Тогда, обозначая $v=\sum_{i=1}^N l_iu_i$ и принимая во внимание расщеплённость системы (1.1) в главной части, а также условия (4.1) и (4.2), из равенства (1.9) получаем

$$\int\limits_{D_T}\left[\frac{\partial^{2k}v}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi_0}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_j}\right]dx\,dt=\int\limits_{D_T}\biggl(-\sum_{i=1}^N l_if_i(u)\biggr)\varphi_0\,dx\,dt+\mu\int\limits_{D_T}G\varphi_0\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{D_T}|v|^\beta\varphi_0\,dx\,dt+\mu\int\limits_{D_T}G\varphi_0\,dx\,dt. \tag{4.3}$$

Так как $v\in W_0^{1,2k}(D_T)$ и $\varphi_0\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$, то интегрирование по частям даёт

$$\int\limits_{D_T}\left[\frac{\partial^{2k}v}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi_0}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_j}\right]dx\,dt=\int\limits_{D_T}vL_0\varphi_0\,dx\,dt, \tag{4.4}$$

где L_0 – скалярный оператор, соответствующий оператору из (1.1) при $f=0$. Из (4.3) и (4.4) вытекает неравенство

$$\int\limits_{D_T}|v|^\beta\varphi_0\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{D_T}vL_0\varphi_0\,dx\,dt-\mu\int\limits_{D_T}G\varphi_0\,dx\,dt. \tag{4.5}$$

Ниже воспользуемся методом пробных функций [17, с. 10–12]. В качестве пробной функции возьмём $\varphi_0\in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T,\partial D_T)$ такую, что $\varphi_0|_{D_T}>0$. Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon>0$, т.е. в неравенстве

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon}{\beta}a^\beta+\frac{1}{\beta'\varepsilon^{\beta'-1}}b^{\beta'},\quad\text{где}\quad a,b\geqslant 0,\quad \beta'=\frac{\beta}{\beta-1},$$

положим $a=|u|\varphi_0^{1/\beta}$, $b=|L_0\varphi_0|/\varphi_0^{1/\beta}$, то, учитывая равенство $\beta'/\beta=\beta'-1$, будем иметь

$$|vL_0\varphi_0|=|v|\varphi_0^{1/\beta}\frac{|L_0\varphi_0|}{\varphi_0^{1/\beta}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\beta}|v|^\beta\varphi_0+\frac{1}{\beta'\varepsilon^{\beta'-1}}\frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}. \tag{4.6}$$

Из неравенств (4.5) и (4.6) следует, что

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\beta}\right)\int\limits_{D_T}|v|^\beta\varphi_0\,dx\,dt=\frac{1}{\beta'\varepsilon^{\beta'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}\,dx\,dt-\mu\int\limits_{D_T}G\varphi_0\,dx\,dt,$$

откуда при $\varepsilon < \beta$ получаем

$$\int\limits_{D_T} |v|^\beta \varphi_0 \, dx \, dt \leqslant \frac{\beta}{(\beta-\varepsilon_0)\beta'\varepsilon_0^{\beta'-1}} \int\limits_{D_T} \frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \, dx \, dt - \frac{\beta\mu}{\beta-\varepsilon} \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt. \tag{4.7}$$

Принимая во внимание, что $\beta' = \beta/(\beta-1)$, $\beta = \beta'/(\beta'-1)$ и равенство

$$\min_{0<\varepsilon<\beta} \frac{\beta}{(\beta-\varepsilon)\beta'\varepsilon^{\beta'-1}} = 1,$$

которое достигается при $\varepsilon = 1$, в силу (4.7) приходим к неравенству

$$\int\limits_{D_T} |v|^\beta \varphi_0 \, dx \, dt \leqslant \int\limits_{D_T} \frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \, dx \, dt - \beta'\mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt. \tag{4.8}$$

Нетрудно проверить, что пробная функция

$$\varphi_0(x,t) = ((1-|x|^2)t(T-t))^m \tag{4.9}$$

при достаточно большом положительном m удовлетворяет условиям

$$\varphi_0 \in C_0^{2,4k}(\overline{D}_T, \partial D_T), \quad \varphi_0|_{D_T} > 0, \quad \kappa_0 = \int\limits_{D_T} \frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \, dx \, dt < \infty. \tag{4.10}$$

Так как, согласно предположениям теоремы, $G \in L_2(D_T)$, $\|G\|_{L_2(D_T)} \neq 0$, $G \geqslant 0$ и $\operatorname{mes} D_T < +\infty$, то, поскольку $\varphi_0|_{D_T} > 0$, имеем

$$0 < \kappa_1 = \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt < +\infty. \tag{4.11}$$

Обозначим через $g(\mu)$ правую часть неравенства (4.8), которая является линейной функцией относительно μ. Тогда в силу (4.10) и (4.11) справедливы неравенства

$$g(\mu) < 0 \quad \text{при} \quad \mu > \mu_0 \quad \text{и} \quad g(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu < \mu_0, \tag{4.12}$$

где $g(\mu) = \kappa_0 - \beta'\mu\kappa_1$, $\mu_0 = \kappa_0/(\beta'\kappa_1) > 0$.

Согласно (4.12) при $\mu > \mu_0$ правая часть неравенства (4.8) отрицательна, в то время как его левая часть неотрицательна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что если условие (4.1) выполнено, то условие (2.16) нарушается. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно взять $u = \lambda(l_1, \ldots, l_N)^{\mathrm{T}}$ при $\lambda \to +\infty$.

Замечание 4.1. Напомним, что в теореме 4.1 для упрощения доказательства мы предположили, что область Ω является единичным шаром $|x| < 1$. Однако эта теорема остаётся справедливой и в более общем случае – когда Ω представляет собой область с достаточно гладкой границей. Указанное предположение было обусловлено конструкцией пробной функции φ_0, удовлетворяющей условиям (4.10) и определяемой формулой (4.9) для достаточно большого положительного m. Если граница $\partial\Omega$ области Ω задана уравнением $\omega(x) = 0$, где $\nabla_x \omega|_{\partial\Omega} \neq 0$, $\omega|_\Omega > 0$, $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ и $\omega \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то тогда вместо пробной функции (4.9) следует взять функцию

$$\varphi_0(x,t) = (\omega(x)t(T-t))^m,$$

где m – достаточно большое положительное число, и в этом случае теорема 4.1 остаётся справедливой.

Замечание 4.2. Теорема 4.1 останется справедливой, если условие (4.1) заменить более общим условием

$$\sum_{i=1}^{N} l_i f_i(u) \leqslant -d_0 \left| \sum_{i=1}^{N} l_i u_i \right|^{\beta} \quad \text{для любого} \quad u=(u_1,\ldots,u_N)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^N, \quad 1<\beta=\text{const}<\frac{n+1}{n-1}, \quad (4.13)$$

где $d_0 = \text{const} > 0$. Действительно, неравенство (4.13) сводится к неравенству (4.1). Для этого нужно в неравенстве (4.13) сделать замену $l_i = \lambda \tilde{l}_i$, где $\lambda = d_0^{1/(1-\beta)}$, и разделить обе части полученного неравенства на λ. В результате этого получим неравенство (4.1), в котором вместо l_i будет написано $\tilde{l}_i$.

Приведём один класс вектор-функций f, которые удовлетворяют условию (4.13):

$$f_i(u_1,\ldots,u_N) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} |u_j|^{\beta_{ij}} + b_i, \quad i=\overline{1,N}, \quad (4.14)$$

где для чисел a_{ij}, β_{ij} и b_i выполняются неравенства

$$a_{ij} > 0, \quad 1 < \beta_{ij} < \frac{n+1}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{N} b_i > 0, \quad i,j=\overline{1,N}. \quad (4.15)$$

В этом случае в (4.13) следует взять $l_1 = \ldots = l_N = -1$. Действительно, в силу (4.15) выберем числа α_0 и β такими, чтобы

$$0 < a_0 \leqslant \min_{i,j} a_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \geqslant 0, \quad 1 < \beta < \beta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,N}. \quad (4.16)$$

Несложно проверить, что $|s|^{\beta_{ij}} \geqslant |s|^{\beta} - 1$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Используя известное неравенство [18, с. 302]

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i|^{\beta} > N^{1-\beta} \left| \sum_{i=1}^{N} y_i \right|^{\beta} \quad \text{для любого} \quad y=(y_1,\ldots,y_N)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^N, \quad \beta=\text{const}>1,$$

вследствие (4.14) и (4.15) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(u_1,\ldots,u_N) \geqslant a_0 \sum_{i,j=1}^{N} |u_j|^{\beta_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant a_0 \sum_{i,j=1}^{N} (|u_j|^{\beta} - 1) + \sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant$$

$$\geqslant a_0 N \sum_{j=1}^{N} |u_j|^{\beta} - a_0 N^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta} + \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \geqslant a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta}. \quad (4.17)$$

В силу (4.17) заключаем, что если выполнены условия (4.14) и (4.15), то имеет место неравенство (4.13), в котором $l_1 = \ldots = l_N = -1$ и $d_0 = a_0 N^{2-\beta}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* A boundary value problem for higher-order semilinear partial differential equations // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 766–776.
2. *Харибегашвили С.С., Мидодашвили Б.Г.* О существовании, единственности и отсутствии решений одной краевой задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Укр. мат. журн. 2019. Т. 71. № 8. С. 1123–1132.

3. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* Solvability of characteristic boundary-value problems for nonlinear equations with iterated wave operator in the principal part // Electr. J. Differ. Equat. 2008. № 72. P. 1–12.
4. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* On one boundary value problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part // Georgian Math. J. 2008. T. 15. № 3. P. 541–554.
5. *Kharibegashvili S.* Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. 2009. V. 46. P. 1–114.
6. *Xiangying C.* Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear evolution equation of fourth order // Appl. Math. J. Chinese Univ. 2001. Ser. B. V. 16. № 3. P. 251–258.
7. *Budd C.J., Galaktionov V.A., Williams J.F.* Self-similar blow-up in higher-order semilinear parabolic equations // Siam J. Appl. Math. 2004. V. 64. № 5. P. 1775–1809.
8. *Aliev A.B., Lichaei B.H.* Existence and nonexistence of global solutions of the Cauchy problem for higher order semilinear pseudohyperbolic equations // J. Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 2010. V. 72. № 7–8. P. 3275–3288.
9. *Wang Y.Z., Wang Y.X.* Existence and nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equations of higher order // J. Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 2010. V. 72. № 12. P. 4500–4507.
10. *Galaktionov V.A., Mitidieri E.L., Pohozhaev S.I.* Blow-up for Higher-Order Parabolic, Hyperbolic, Dispersion and Schrodinger Equations. New York, 2014.
11. *Ma T., Gu J., Li L.* Asymptotic behaviour of solutions to a class of fourth-order nonlinear evolution equations with dispersive and dissipative terms // J. Inequal. Appl. 2016. V. 2016. Art. 318.
12. *Lin G., Gao Y., Sun Y.* On local existence and blow-up solutions for nonlinear wave equations of higher-order Kirchhoff type with strong dissipation // Int. J. Modern Nonlinear Theory and Appl. 2017. V. 6. № 1. P. 11–25.
13. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
14. *Куфнер Ф., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М., 1988.
15. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
16. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1993.
17. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2001. Т. 134. С. 3–383.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М., 1969.

Грузинский технический университет,
г. Тбилиси,
Тбилисский государственный университет
им. И.А. Джавахишвили, Грузия

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 23.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.