ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 93–104

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4+515.124.2:517.988.63

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ МНОЖЕСТВО НАКРЫВАНИЯ ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. Е. С. Жуковский, В. Мерчела

Найдены достаточные условия существования в пространстве измеримых функций решений x скалярных интегральных уравнений

$$f\biggl(t, \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\biggr) = z(t) \quad \text{и} \quad f\biggl(t, \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\biggr) = z(t), \quad t \in [0,1],$$

где функции $\mathcal{K}$, z и f заданы; ядро $\mathcal{K}\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ измеримо и интеграл по второму аргументу от его модуля существенно ограничен, свободный член $z\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерим, а функция $f\colon [0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ – вещественная прямая, дополненная одной бесконечно удалённой точкой, с “обычной” метрикой: $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u,v) = |u-v|$ и $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(\infty,v) = \rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u,\infty) = +\infty$, $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(\infty,\infty) = 0$, где $u, v \in \mathbb{R}$). Условия получены на основании обобщения понятий и результатов теории накрывающих отображений на пространства более общие, чем метрические.

DOI: 10.31857/S0374064122010101

Введение. Исследование нелинейных интегральных уравнений вида

$$f\biggl(t, \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\biggr) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

(называемых не разрешёнными относительно неизвестной функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$) методами теории накрывающих отображений метрических пространств начато в работе [1]. В этой работе рассматривалось вольтеррово интегральное уравнение (т.е. уравнение вида (1) в случае $\mathcal{K}(t,s) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$), доказаны утверждения о его разрешимости в пространстве измеримых существенно ограниченных функций, об оценках решений и устойчивости решений по отношению к изменениям функций f и $\mathcal{K}$. Близкими методами в [2] рассмотрены вопросы продолжаемости решений вольтерровых уравнений.

Результаты о накрывающих отображениях метрических пространств оказались удобным инструментом исследования некоторых других классов функциональных уравнений, к которым не удавалось применить классические теоремы о неподвижной точке. В [3] этот подход был применён к обыкновенным дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной. В дальнейших исследованиях (см. работы [4, 5] и другие работы тех же авторов) рассмотрены вопросы существования, получены оценки и установлена зависимость от параметров решений задачи Коши, краевых задач и задач управления для таких уравнений. Результаты о накрывающих отображениях имеют также перспективы в применении их к исследованию задач оптимизации для анормальных процессов управления (см. [6]).

В работах [7–10] результаты о накрывающих отображениях метрических пространств были уточнены и распространены на пространства с обобщёнными метриками. Данная статья продолжает эти исследования. Здесь рассматривается абстрактное уравнение (1), которое порождается отображением f, действующим из метрического пространства в пространство с обобщённым расстоянием, удовлетворяющим только аксиоме тождества (остальные аксиомы метрики: симметричность и неравенство треугольника не предполагаются выполненными). В терминах множества накрывания этого отображения доказывается теорема о существовании и оценках решений. Полученное утверждение позволяет исследовать различные функциональные уравнения в широких классах не обязательно метрических функциональных пространств, например, возникающих при изучении некоторых сингулярных уравнений с несуммируемыми особенностями. В данной работе это утверждение применяется к скалярному интегральному уравнению вида (1) в пространстве измеримых функций, суммируемость которых не предполагается. Отметим, что для интегральных уравнений наиболее известные результаты получены в банаховых пространствах непрерывных функций или суммируемых функций (см. монографию [11], обзоры [12, 13], статью [14] и библиографию в них). Несмотря на то, что здесь интегральное уравнение рассматривается в пространстве измеримых функций (наделённом не нормой, а обобщённым расстоянием), полученные оценки решений позволяют, в том числе, проверять, является ли решение функцией, суммируемой с некоторой степенью.

1. Основные понятия. Обозначим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ и определим разность двух элементов, среди которых есть ∞, соотношениями

$$\infty-\infty=0 \ \text{ и } \ x-\infty=\infty-x=\infty \ \text{ для любого } \ x\in\mathbb{R}.$$

Также обозначим $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\} = [0,+\infty]$ и определим операцию вычисления модуля $|\cdot| : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, причём будем полагать, что $|\infty| = +\infty$. Будем считать, что в $\overline{\mathbb{R}}$ задана “обычная” метрика $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u_1,u_2) = |u_1-u_2|$, $u_1,u_2\in\overline{\mathbb{R}}$, и такая же “обычная” метрика $\rho_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ задана в $\overline{\mathbb{R}}_+$ (т.е. для $v_1,v_2\in\overline{\mathbb{R}}_+$ имеем: $\rho_{\overline{\mathbb{R}}_+}(v_1,v_2) = \rho_{\overline{\mathbb{R}}}(u_1,u_2)$, где $u_i := v_i$, если $v_i\neq+\infty$, и $u_i=\infty$, если $v_i=+\infty$, $i=1,2$).

Пусть $X=(X,\rho)$ – метрическое пространство с метрикой $\rho : X\times X\to\overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0,r)=\{x\in X : \rho(x,x_0)\leqslant r\}$ – замкнутый шар в X с центром в точке $x_0\in X$ радиуса $r\in\overline{\mathbb{R}}_+$ (при $r=+\infty$ и любом x_0 полагаем $B_X(x_0,+\infty)=X$).

Пусть на непустом множестве Y определено *обобщённое расстояние* – отображение $d : Y\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию:

$$d(y_1,y_2)=0, \ \text{если и только если} \ y_1=y_2 \tag{2}$$

(важно, что другими свойствами метрик отображение d может не обладать). Для $\{y_i\}\subset Y$, $y\in Y$ имеет место сходимость $y_i\to y$ при $i\to+\infty$, если $d(y_i,y)\to0$ при $i\to+\infty$. Очевидно, что из так определённой сходимости $y_i\to y$ не следуют ни единственность предела y, ни сходимость к нулю последовательности $d(y,y_i)$.

В работах [10, 15] на отображения $(X,\rho)\to(Y,d)$ перенесены “обычные” определения анализа: отображение $f : X\to Y$ называется *непрерывным в точке* $x\in X$, если для любой последовательности $\{x_i\}\subset X$ такой, что $\rho(x_i,x)\to0$, имеет место сходимость $d(f(x_i),f(x))\to0$, и *замкнутым* в точке $x\in X$, если для любых последовательности $\{x_i\}\subset X$ и элемента $y\in Y$ таких, что $\rho(x_i,x)\to0$ и $d(f(x_i),y)\to0$, справедливо равенство $f(x)=y$. Отображение, являющееся непрерывным (замкнутым) во всех точках, называется *непрерывным* (*замкнутым*).

Отметим следующее свойство отображений, действующих в пространство с обобщённым расстоянием: если для точки x существует такая сходящаяся к ней последовательность $\{x_i\}$, что предел последовательности $\{f(x_i)\}$ не единственный, то отображение f не является замкнутым в точке x (при этом f может быть непрерывным в этой точке). В [9, 15] предложено понятие *множества замкнутости отображения* f *относительно множества* $U\subset X$, в котором единственность предела последовательности $\{f(x_i)\}$ перестаёт быть необходимой. Это множество определяется соотношением

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}\,[f;U] := \{(x,y)\in X\times Y\colon &\text{для любой последовательности } \{x_i\}\subset U \text{ такой, что}\\ &x_i\to x \text{ и } f(x_i)\to y, \text{ верно равенство } f(x)=y\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что если для любой сходящейся к x последовательности $\{x_i\}\subset U$ последовательность $\{f(x_i)\}\subset Y$ либо расходится, либо сходится и в множестве её пределов содержится элемент $f(x)$, то $(x, f(x)) \in \mathrm{Cl}\,[f;U]$. В то же время в рассматриваемой ситуации если предел не единственный, то отображение f не будет замкнутым в точке x.

Пусть заданы $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$. В полученных далее утверждениях существенно используются следующие множества, определённые в [9]: *множество α-накрывания отображения f относительно множества $U \subset X$*:

$$\begin{gathered}\mathrm{Cov}_\alpha[f;U] := \{(x,y) \in X \times Y \text{ существует } u \in U \text{ такой, что}\\ f(u) = y, \quad \rho(x,u) \leqslant \alpha^{-1} d(f(x),y), \quad \rho(x,u) < +\infty\};\end{gathered}$$

и *множество β-липшицевости отображения f относительно множества $U \subset X$*

$$\begin{gathered}\mathrm{Lip}_\beta[f;U] := \{(x,y) \in X \times Y \colon \text{для любого } u \in U \text{ такого, что}\\ f(u) = y, \text{ верно неравенство } d(f(x),y) \leqslant \beta\rho(x,u)\}.\end{gathered}$$

В частном случае, когда значения метрики ρ и обобщённого расстояния d конечны и $U = X$, множества $\mathrm{Cl}\,[f;U]$, $\mathrm{Cov}_\alpha[f;U]$, $\mathrm{Lip}_\beta[f;U]$ определены в работе [15].

Отметим, что равенство $\mathrm{Cov}_\alpha[f;X] = X \times Y$ равносильно свойству α-накрывания отображения f, а равенство $\mathrm{Lip}_\beta[f;X] = X \times Y$ – свойству β-липшицевости этого отображения.

Определённые здесь множества замкнутости, накрывания и липшицевости отображения f обладают следующим свойством монотонности относительно $U \subset X$:

$$\text{если } U \subset \overline{U} \subset X, \text{ то } \mathrm{Cl}\,[f;U] \supset \mathrm{Cl}\,[f;\overline{U}], \ \ \mathrm{Cov}_\alpha[f;U] \subset \mathrm{Cov}_\alpha[f;\overline{U}], \ \ \mathrm{Lip}_\beta[f;U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[f;\overline{U}]. \tag{3}$$

Теорема о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств получена А.В. Арутюновым в [16]. На отображения пространств с обобщёнными метриками эта теорема распространена в [7, 8], а на отображения, действующие из метрического пространства в пространство с обобщённым расстоянием – в [10]. Здесь мы докажем утверждение об уравнении другого вида с отображением из метрического пространства в пространство с обобщённым расстоянием, к которому сводится рассматриваемое далее интегральное уравнение (о связи этого операторного уравнения с уравнением для точки совпадения см. [15]).

Пусть задано отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x) := F(x,x) = \tilde{y} \tag{4}$$

относительно неизвестного $x \in X$. Следующая теорема о разрешимости уравнения (4) сформулирована в работе [9, теорема 2] без доказательства. Аналогичное утверждение при несколько более ограничительных условиях (метрика ρ и расстояние d не могут принимать бесконечные значения и $U = X$) получено в [15].

Теорема 1. *Пусть X – полное метрическое пространство и заданы элемент $x_0 \in X$ такой, что $d(F(x_0,x_0),\tilde{y}) < +\infty$, и числа $\alpha > \beta \geqslant 0$. Пусть также для любого $x \in U := B_X(x_0,R)$, где $R := d(F(x_0,x_0),\tilde{y})/(\alpha - \beta)$, выполнены включения*

$$(x,\tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,,x);X], \quad (x,\tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x,\cdot);U], \quad (x,\tilde{y}) \in \mathrm{Cl}\,[G;U].$$

Тогда в шаре U существует решение уравнения (4).

Доказательство. Без ограничения общности будем предполагать, что x_0 не является решением уравнения (4). Покажем по индукции, что существует последовательность $\{x_i\}$, члены которой удовлетворяют при всех $i = 1, 2, \ldots$ соотношениям

$$F(x_i,x_{i-1}) = \tilde{y}, \quad \rho(x_i,x_0) \leqslant \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha^i(\alpha-\beta)} d(F(x_0,x_0),\tilde{y}), \quad d(F(x_i,x_i),\tilde{y}) \leqslant \beta\rho(x_i,x_{i-1}). \tag{5}$$

В силу предположений доказываемой теоремы верно включение $(x_0,\tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,,x_0);U]$. Поэтому существует $x_1 \in X$, для которого справедливы соотношения

$$F(x_1,x_0) = \tilde{y} \quad \text{и} \quad \rho(x_1,x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha} d(F(x_0,x_0),\tilde{y}) < R.$$

Из последнего неравенства следует включение $x_1 \in U,$ и согласно предположениям доказываемой теоремы $(x_1, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot\,); U],$ поэтому $d(F(x_1, x_1), \tilde{y}) \leqslant \beta\rho(x_1, x_0).$ Для $i = 1$ соотношения (5) установлены.

Пусть соотношения (5) выполнены при всех натуральных $i \leqslant k.$ Докажем их справедливость при $i = k + 1.$

Для любого $j \leqslant k$ из неравенств

$$\rho(x_j, x_0) \leqslant \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha^j(\alpha - \beta)} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) < R$$

следуют включения

$$(x_j, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,, x_j); X] \quad \text{и} \quad (x_j, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_j, \cdot\,); U].$$

Согласно первому из этих включений существует $x_{j+1},$ для которого

$$F(x_{j+1}, x_j) = \tilde{y}, \tag{6}$$

$$\rho(x_{j+1}, x_j) \leqslant \frac{1}{\alpha} d(F(x_j, x_j), \tilde{y}) = \frac{1}{\alpha} d(F(x_j, x_j), F(x_j, x_{j-1})),$$

а согласно второму включению имеем

$$d(F(x_j, x_j), F(x_j, x_{j-1})) \leqslant \beta\rho(x_j, x_{j-1}).$$

Таким образом,

$$\rho(x_{j+1}, x_j) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho(x_j, x_{j-1}) \leqslant \ldots \leqslant \frac{\beta^j}{\alpha^j}\rho(x_1, x_0). \tag{7}$$

Для $i = k + 1$ первое соотношение в (5) непосредственно следует из (6), если положить $j = k.$ А из (7) при $j = k$ вытекают неравенства

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leqslant \frac{\beta^k}{\alpha^k}\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}).$$

Используя эту оценку расстояния $\rho(x_{k+1}, x_k),$ получаем

$$\rho(x_0, x_{k+1}) \leqslant \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) + \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}).$$

Итак, второе соотношение в (5) для $i = k+1$ выполнено, откуда следует, что $\rho(x_0, x_{k+1}) \leqslant R,$ $x_{k+1} \in U,$ и так как $(x_{k+1}, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot\,); U],$ имеем $d(F(x_{k+1}, x_{k+1}), \tilde{y}) \leqslant \beta\rho(x_{k+1}, x_k).$ Поэтому третье соотношение в (5) для $i = k + 1$ также выполнено.

Покажем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. При любых натуральных $n, m,$ $m > n,$ в силу второго соотношения в (5) имеем неравенства

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{i=n}^{m-1} \frac{\beta^i}{\alpha^i} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}) \leqslant \frac{\beta^n}{\alpha^n}\frac{1}{\alpha - \beta} d(F(x_0, x_0), \tilde{y}).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных n, m таких, что $m > n > N = \log_{\beta/\alpha}(\varepsilon(\alpha - \beta)/d(F(x_0, x_0), \tilde{y})),$ верно неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$

Фундаментальная последовательность $\{x_i\} \subset U$ сходится при $i \to \infty$ в полном метрическом пространстве X к некоторому $\tilde{x} \in U.$ Из третьего соотношения в (5) следует сходимость $d(F(x_i, x_i), \tilde{y}) \to 0,$ т.е. $G(x_i) \to \tilde{y}.$ А так как имеет место включение $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathrm{Cl}\,[G; U],$ окончательно получаем $G(\tilde{x}) = \tilde{y}.$ Теорема доказана.

2. Множества накрывания и липшицевости отображений в пространствах измеримых функций. Пусть $\tau > 0$ Напомним, что функция $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой*, если множества $\{t \in [0,\tau] : u(t) \leqslant z\}$, $z \in \mathbb{R}$, и $\{t \in [0,\tau] : u(t) = \infty\}$ измеримы (по Лебегу). Очевидно, для измеримости функции $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы измеримым было её эффективное множество $\{t \in [0,\tau] : u(t) \neq \infty\}$ и чтобы сужение функции u на эффективное множество было измеримым (в "обычном" смысле). Обозначим через $\overline{\mathbb{S}}_\tau$ линейное пространство (классов) измеримых по Лебегу функций $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$, а через $\mathbb{S}_\tau$ его подпространство, состоящее из функций $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}$. В пространстве $\overline{\mathbb{S}}_\tau$ определим обобщённое расстояние следующим образом.

Пусть задана функция $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что при любом фиксированном $z \in \overline{\mathbb{R}}$ функция $\theta(\,\cdot\,, z) : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна в точке z, выполняются равенство $\theta(z,z) = 0$ и условие:

$$\begin{gathered}\text{для любого } \delta > 0 \text{ существует } \gamma = \gamma(z,\delta) > 0, \text{ для которого при всех } z' \in \overline{\mathbb{R}}\\ \text{таких, что } |z'-z| \geqslant \delta, \text{ справедливо неравенство } \theta(z',z) \geqslant \gamma.\end{gathered} \tag{8}$$

Функция θ удовлетворяет условию (2), т.е. является обобщённым расстоянием в $\overline{\mathbb{R}}$; соответствующее пространство будем обозначать через $\overline{\mathbb{R}}^\theta := (\overline{\mathbb{R}}, \theta)$. Будем также предполагать, что функция θ суперпозиционно измерима, т.е. $\theta(z_1(\cdot), z_2(\cdot)) \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ для любых функций $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$.

Замечание 1. Для суперпозиционной измеримости функции θ достаточно, чтобы по каждому аргументу эта функция была непрерывной. Более общие условия суперпозиционной измеримости получены в [17] (см. также в [18]) для функций с аргументами из $\mathbb{R}$. Эти результаты остаются верными, если аргументы принимают значения из "расширенного" пространства $\overline{\mathbb{R}}$. Например, функция θ суперпозиционно измерима, если по каждому аргументу она односторонне непрерывна (т.е. каждая из функций $\theta(z,\cdot)$, $\theta(\,\cdot\,,z)$ непрерывна справа на всём $\overline{\mathbb{R}}$ или непрерывна слева на всём $\overline{\mathbb{R}}$).

Свойство суперпозиционной измеримости функции θ позволяет определить отображение $d^\theta : \overline{\mathbb{S}}_\tau \times \overline{\mathbb{S}}_\tau \to \overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением

$$d^\theta(z_1,z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta(z_1(t), z_2(t)), \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}_\tau.$$

Так как равенства $\theta(z_1,z_2) = 0$ и $z_1 = z_2$ равносильны, то для отображения d^θ выполнено условие (2), т.е. d^θ – обобщённое расстояние в $\overline{\mathbb{S}}_\tau$. Пространство измеримых функций с таким расстоянием обозначим символом $\overline{\mathbb{S}}_\tau^\theta := (\overline{\mathbb{S}}_\tau, d^\theta)$. Подпространство $\mathbb{S}_\tau \subset \overline{\mathbb{S}}_\tau$ с индуцированным расстоянием обозначим $\mathbb{S}_\tau^\theta := (\mathbb{S}_\tau, d^\theta)$. Аналогичное определение обобщённого расстояния в пространстве $\mathbb{S}_\tau$ введено в работе [9]. В этом определении из [9] предполагалось, что функция θ задана на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, непрерывна по каждому аргументу, а в условии (8) величина положительного γ не зависит от точки z.

Простейшая функция, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, – это функция $\theta_0 : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, заданная равенством

$$\theta_0(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{R}},$$

определяющая "стандартную" метрику в $\overline{\mathbb{R}}$. Такое "обычное" метрическое пространство будем обозначать $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta_0)$. Отметим, что сходимости в $\overline{\mathbb{R}}$ относительно расстояния θ и "стандартной" метрики θ_0 совпадают. Действительно, если для некоторых $z \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{z_i\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, выполнено $\theta(z_i,z) \to 0$, и тем не менее $\theta_0(z_i,z) := |z_i - z| \not\to 0$, то существуют $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{z_{i_j}\}$ такие, что $|z_{i_j} - z| \geqslant \delta$. Из условия (8) следует, что найдётся $\gamma > 0$, для которого $\theta(z_{i_j}, z) \geqslant \gamma$, что противоречит соотношению $\theta(z_i,z) \to 0$. Обратно, в силу непрерывности функции $\theta(\,\cdot\,,z)$ в точке z получаем, что из сходимости $|z_i - z| \to 0$ следует $\theta(z_i,z) \to \theta(z,z) = 0$.

Так как сходимости в $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ совпадают, то для действующих в $\overline{\mathbb{R}}$ функций свойства непрерывности не зависят от того, какое из расстояний θ или θ_0 задано в $\overline{\mathbb{R}}$. Также следствием доказанной эквивалентности сходимостей относительно расстояния θ и метрики θ_0 является совпадение замкнутых множеств пространств $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ (соответственно, и совпадение открытых множеств этих пространств). Поэтому мы будем говорить о непрерывности функций, замкнутости (или открытости) множеств в $\overline{\mathbb{R}}$, не упоминая конкретное расстояние в этом пространстве.

Используя функцию θ_0, определим отображение $d^{\theta_0} : \overline{\mathbb{S}}_\tau \times \overline{\mathbb{S}}_\tau \to \overline{\mathbb{R}}_+$ равенством

$$d^{\theta_0}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} |z_1(t) - z_2(t)|, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}_\tau.$$

Очевидно d^{θ_0} – метрика в $\overline{\mathbb{S}}_\tau$. Обозначим $\rho := d^{\theta_0}$, $\overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{S}}_\tau, \rho)$. Подпространство $\mathbb{S}_\tau \subset \overline{\mathbb{S}}_\tau$ с индуцированной метрикой обозначим $\mathbb{S}_\tau^{\theta_0} := (\mathbb{S}_\tau, \rho)$. Отметим, что метрическое пространство $\overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}$ является полным, шар $B_{\overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}}(z_0, r) = \{z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau : \rho(z, z_0) \leqslant r\}$ в этом пространстве – это множество измеримых функций $z : [0, \tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ со значениями, удовлетворяющими включению $z(t) \in [z_0(t) - r, z_0(t) + r]$ при п.в. $t \in [0, \tau]$.

Теперь рассмотрим отображения, действующие в определённых здесь пространствах измеримых функций, которые будут использованы в исследовании интегральных уравнений.

Пусть задана удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (т.е. для любых $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0, \tau]$ функция $g(\,\cdot\,, x) : [0, \tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, а функция $g(t, \cdot\,) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна). Отметим, что для такой функции при любом фиксированном $t \in [0, \tau]$ выполнена импликация:

если существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, при котором $g(t, \tilde{x}) \neq \infty$, то $g(t, x) \neq \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Это непосредственно следует из замкнутости двух множеств: множества $\{x \in \mathbb{R} : g(t, x) \neq \infty\}$ и его дополнения $\{x \in \mathbb{R} : g(t, x) = \infty\}$ (замкнутость этих множеств очевидна: если $x_i \to x$, то $g(t, x_i) \to g(t, x)$, при этом в случае $g(t, x_i) \in \mathbb{R}$ получаем $g(t, x) \in \mathbb{R}$, а в случае $g(t, x_i) = \infty$ получаем $g(t, x) = \infty$).

Определим оператор Немыцкого $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ соотношением

$$(N_g u)(t) = g(t, u(t)) \quad \text{для всех } u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где } t \in [0, \tau]. \tag{9}$$

Приведём два утверждения об операторе $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, которые распространяют соответствующие результаты [9, предложения 1, 2] на введённые здесь пространства измеримых функций.

Предложение 1. *Определённый соотношением (9) оператор* $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ *является замкнутым.*

Несмотря на то, что функция θ здесь удовлетворяет менее ограничительным условиям, чем в [9], доказательство сформулированного предложения не отличается от доказательства предложения 1 цитируемой работы, поэтому мы его опускаем.

Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Phi : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$, значения которого $\Phi(t) \neq \varnothing$, $t \in [0, \tau]$, являются замкнутыми в $\mathbb{R}$ множествами. Определим множество *измеримых сечений* этого отображения

$$\operatorname{Sel}(\Phi) := \{u \in \mathbb{S}_\tau : u(t) \in \Phi(t) \text{ при п.в. } t \in [0, \tau]\}.$$

Имеем $\operatorname{Sel}(\Phi) \neq \varnothing$ (используемые здесь и далее результаты многозначного анализа см. в [19, п. 8.1.2; 20, § 2.5; 21, § 1.5]).

Следующее предложение устанавливает связь между множеством накрывания оператора Немыцкого $N_g : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ относительно $\operatorname{Sel}(\Phi) \subset \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ и множеством накрывания функции $g(t, \cdot\,) : \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ относительно $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^{\theta_0}$ при п.в. $t \in [0, \tau]$.

Предложение 2. *Пусть для заданных* $x \in \mathbb{S}_\tau$, $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ *и* $\alpha > 0$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено включение* $(x(t), z(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[g(t,\cdot);\Phi(t)]$, *т.е. для некоторого* $u \in \Phi(t)$ *имеют место соотношения*

$$g(t,u) = z(t) \ \ \text{и} \ \ |x(t) - u| \leqslant \theta(g(t,x(t)), z(t))/\alpha.$$

Тогда $(x,z) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; \mathrm{Sel}\,(\Phi)]$. *В частности, если* $(x(t),z(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[g(t,\cdot);\mathbb{R}^{\theta_0}]$, *то* $(x,z) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}]$.

Сформулированное утверждение аналогично полученному в [9] при более ограничительных требованиях на функцию θ результату о множестве накрывания оператора Немыцкого, действующего из $\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ в $\mathbb{S}_\tau^{\theta}$. Тем не менее доказательство [9, предложение 2] сохраняется практически без изменений и поэтому здесь не приводится.

Теперь рассмотрим оператор следующего вида. Пусть задана удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $\overline{g} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ и измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau] \times [0,\tau] \to \mathbb{R}$. Определим отображение $\Upsilon : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ отношением

$$(\Upsilon u)(t) = \overline{g}\bigg(t, \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds\bigg) \quad \text{для всех} \ \ u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где} \ \ t \in [0,\tau]. \tag{10}$$

Если при некотором t интеграл не существует, то при этом t полагаем значение интеграла равным ∞. Оператор (10) можно представить в виде композиции $\Upsilon = N_{\overline{g}}K$ интегрального оператора $K : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}$, заданного равенством

$$(Ku)(t) = \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds \quad \text{для всех} \ \ u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где} \ \ t \in [0,\tau],$$

и оператора Немыцкого $N_{\overline{g}} : \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, порождённого функцией $\overline{g}$, т.е.

$$(N_{\overline{g}}y)(t) = \overline{g}(t, y(t)) \quad \text{для всех} \ \ y \in \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где} \ \ t \in [0,\tau].$$

Исследование композиции $\Upsilon = N_{\overline{g}}K$ начнём с рассмотрения множества липшицевости оператора $N_{\overline{g}} : \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$. Установим связь между этим множеством и множеством липшицевости функции $\overline{g} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$.

Пусть задано многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ такое, что $\Omega(t) \neq \varnothing$, $t \in [0,\tau]$. Будем предполагать, что это отображение имеет измеримое сечение, т.е.

$$\mathrm{Sel}\,(\Omega) := \{u \in \overline{\mathbb{S}}_\tau : u(t) \in \Omega(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0,\tau]\} \neq \varnothing.$$

Предложение 3. *Пусть для заданных* $v, z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ *и* $\beta \geqslant 0$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено включение* $(v(t), z(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\overline{g}(t,\cdot);\Omega(t)]$, *т.е. имеет место соотношение:*

$$\begin{gathered} \textit{для произвольного } u \in \Omega(t) \textit{ такого, что } \overline{g}(t,u) = z(t), \\ \textit{справедливо неравенство } \theta(\overline{g}(t,v(t)), z(t)) \leqslant \beta|v(t) - u|. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда $(v,z) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \mathrm{Sel}\,(\Omega)]$.

Доказательство этого предложения с очевидностью следует из определения множества липшицевости. Аналогичное утверждение для оператора Немыцкого в пространстве $\mathbb{S}_\tau$, порождённого функцией $g : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, в случае измеримого замкнутозначного отображения $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ и непрерывной по каждому аргументу вещественной функции $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ получено в [9].

Предложение 4. *Пусть*

$$k_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int\limits_0^\tau |\mathcal{K}(t,s)|\,ds < +\infty, \tag{12}$$

заданы $x \in \mathbb{S}_\tau$, $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$, $\beta \geqslant 0$ *и многозначное отображение* $\Phi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *со значениями* $\Phi(t) \neq \varnothing$, $t \in [0,\tau]$, *такое, что* $\mathrm{Sel}\,(\Phi) \neq \varnothing$. *Пусть также для пары функций* $v = Kx \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$, $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ *и многозначного отображения*

$$\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}, \quad \Omega(t) = (K\Phi)(t) := \left\{ \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds, \quad u \in \mathrm{Sel}\,(\Phi) \right\}, \quad t \in [0,\tau],$$

при п.в. $t \in [0,\tau]$ *выполнено соотношение (11). Тогда* $(x,z) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[\Upsilon; \mathrm{Sel}\,(\Phi)]$.

Доказательство. Для любого $u \in \mathrm{Sel}\,(\Phi)$ функция $Ku \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ является измеримым сечением многозначного отображения Ω, поэтому множество $\mathrm{Sel}\,(\Omega) \subset \overline{\mathbb{S}}_\tau$ не пусто.

Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in \mathrm{Sel}\,(\Phi)$ выполнено равенство $N_{\overline{g}}K\widehat{u} = z$. Определим функцию $u := K\widehat{u}$. Очевидно, что $u \in \mathrm{Sel}(\Omega)$ и $N_{\overline{g}}u = z$. Так как справедливо соотношение (11), то, согласно предложению 3, имеем $(v,z) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \mathrm{Sel}\,(\Omega)]$. Поэтому в силу определения множества $\mathrm{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \mathrm{Sel}\,(\Omega)]$ получаем $d^\theta(N_{\overline{g}}Kx, z) = d^\theta(N_{\overline{g}}v, z) \leqslant \beta\rho(v,u) = \beta\rho(Kx, K\widehat{u})$. Следовательно,

$$d^\theta(N_{\overline{g}}Kx, z) \leqslant \beta \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,\tau]} |x(s) - \widehat{u}(s)| \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int\limits_0^\tau |\mathcal{K}(t,s)|\,ds = k_0\beta\rho(x,\widehat{u}).$$

Итак, $(x,z) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[N_{\overline{g}}K; \mathrm{Sel}\,(\Phi)]$. Предложение доказано.

Замечание 2. Условие (12) выполнено, например, в случае, когда ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрального оператора $K : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta_0}$ мажорируется суммируемой функцией, т.е. выполнено соотношение

$$\begin{gathered}\text{существует } M \in \mathbb{S}_\tau, \text{ для которой } |\mathcal{K}(t,s)| \leqslant M(s) \\ \text{при п.в. } (t,s) \in [0,\tau]\times[0,\tau] \text{ и } \textstyle\int_0^\tau M(s)\,ds < +\infty.\end{gathered} \tag{13}$$

3. Интегральное уравнение. Применим полученные утверждения к исследованию разрешимости интегрального уравнения. Как и выше предполагаем, что задана измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau]\times[0,\tau] \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию (12). Пусть также заданы $\tilde{z} \in \overline{\mathbb{S}}_\tau$ и функция $f : [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим уравнение

$$f\left(t, \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\right) = \tilde{z}(t), \quad t \in [0,\tau], \tag{14}$$

относительной неизвестной функции $x \in \mathbb{S}_\tau$.

Для произвольной функции $x \in \mathbb{S}_\tau$ определим функцию $\overline{g}^{[x]} : [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^\theta$ равенством

$$\overline{g}^{[x]}(t,u) = f(t,u,x(t)) \text{ для всех } (t,u) \in [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}, \tag{15}$$

и функцию $g^{[x]} : [0,\tau]\times\mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^\theta$ соотношением

$$g^{[x]}(t,u) = f\left(t, \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, u\right) \text{ для всех } (t,u) \in [0,\tau]\times\mathbb{R}.$$

Функции $g^{[x]}$, $\overline{g}^{[x]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 2. *Пусть задана функция* $x_0 \in \mathbb{S}_\tau$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \theta(f(t, v_0(t), x_0(t)), \tilde{z}(t)) < +\infty, \quad \text{где} \quad v_0(t) := (Kx_0)(t) = \int\limits_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x_0(s)\,ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$ *и* $R := R_0/\sigma$, *а многозначное отображение* $\overline{\Omega} : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ *определено соотношением* $\overline{\Omega}(t) := [v_0(t) - k_0R, v_0(t) + k_0R]$ *для любого* $t \in [0,\tau]$. *Пусть, кроме того, при любом* $x \in B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *имеют место включения*

$$(x(t), \tilde{z}(t)) \in \operatorname{Cov}_\alpha[g^{[x]}(t,\cdot); \mathbb{R}^{\theta_0}], \quad ((Kx)(t), \tilde{z}(t)) \in \operatorname{Lip}_\beta[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot); \overline{\Omega}(t)],$$

где $\beta := (\alpha - \sigma)/k_0$. *Тогда в шаре* $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ *существует решение уравнения (14).*

Доказательство. Определим отображение $F : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \times \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ равенством

$$(F(x,u))(t) = f(t, (Ku)(t), x(t)) \quad \text{для всех} \ \ x, u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}, \quad \text{где} \ \ t \in [0,\tau],$$

и отображение $G : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, положив $G(x) = F(x,x)$. Уравнение (14), таким образом, записывается в виде (4). Проверим для такого уравнения выполнимость условий теоремы 1.

Прежде всего отметим, что пространство $\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ является полным.

Покажем, что отображения F и G замкнуты. Пусть для произвольных последовательностей $\{x_i\}, \{u_i\} \subset \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$, элементов $x, u \in \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}$ и $z \in \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$ при $i \to \infty$ имеют место сходимости

$$\rho(x_i, x) \to 0, \quad \rho(u_i, u) \to 0, \quad d^\theta(F(x_i, u_i), z) \to 0.$$

Так как $\rho(Ku_i, Ku) \leqslant k_0\rho(u_i, u)$, то в силу второго из перечисленных соотношений получаем, что $\rho(Ku_i, Ku) \to 0$. Согласно определению расстояний ρ и d^θ при п.в. $t \in [0,\tau]$ имеют место сходимости

$$\theta_0(x_i(t), x(t)) \to 0, \quad \theta_0((Ku_i)(t), (Ku)(t)) \to 0, \quad \theta((F(x_i,u_i))(t), z(t)) \to 0.$$

А так как сходимости в пространствах $\overline{\mathbb{R}}^\theta$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ совпадают, получаем, что

$$x_i(t) \to x(t), \quad (Ku_i)(t) \to (Ku)(t), \quad (F(x_i,u_i))(t) \to z(t).$$

Отсюда в силу непрерывности при п.в. $t \in [0,\tau]$ функции $f(t,\cdot,\cdot)$ (по совокупности двух аргументов) следует, что справедлива эквивалентность

$$f(t, (Ku_i)(t), x_i(t)) \to f(t, (Ku)(t), x(t)) \ \Leftrightarrow \ (F(x_i,u_i))(t) \to (F(x,u))(t).$$

В то же время $(F(x_i,u_i))(t) \to z(t)$, поэтому $(F(x,u))(t) = z(t)$, $t \in [0,\tau]$. Таким образом, отображение F является замкнутым, а значит, отображение G также замкнуто.

Для каждого $x \in B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(x,\cdot)$ – это оператор $\Upsilon : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, определяемый формулой (10), в которой $\overline{g} := \overline{g}^{[x]}$. Определим многозначное отображение $\Phi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ соотношением

$$\Phi(t) := [x_0(t) - R, x_0(t) + R] \quad \text{для любого} \quad t \in [0,\tau].$$

Очевидно, что $\Omega(t) := (K\Phi)(t) \subset \overline{\Omega}(t)$. Следовательно (см. (3)),

$$((Kx)(t), \tilde{z}(t)) \in \operatorname{Lip}_\beta[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot); \Omega(t)].$$

Согласно предложению 4 выполнено включение $(x, \tilde{z}) \in \operatorname{Lip}_{k_0\beta}[F(x,\cdot); \operatorname{Sel}(\Phi)]$. Учитывая, что $\operatorname{Sel}(\Phi) = B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$, получаем

$$(x, \tilde{z}) \in \operatorname{Lip}_{k_0\beta}[F(x,\cdot); B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)].$$

Отметим, что здесь коэффициент липшицевости $k_0\beta = \alpha - \sigma$.

Для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(\,\cdot\,, x)$ является оператором Немыцкого $N_{g^{[x]}} : \mathbb{S}_\tau^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_\tau^{\theta}$, порождённым функцией $g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$. Согласно предложению 2 имеет место включение $(x, \tilde{z}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\,\cdot\,, x); \mathbb{S}_\tau^{\theta_0}]$.

Итак, для уравнения (14) выполнены все условия теоремы 1, и, согласно этой теореме, в шаре $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ существует решение уравнения (14). Теорема доказана.

4. Интегральное уравнение Вольтерры. Теперь рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры

$$f\biggl(t, \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, x(t)\biggr) = \tilde{z}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{16}$$

Здесь функция $\mathcal{K}$, заданная на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$, является измеримой, $\tilde{z} \in \overline{\mathbb{S}}_1$, функция $f : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов.

Конечно, уравнение (16) является частным случаем рассмотренного выше уравнения (14) и записывается в виде (14), если доопределить функцию $\mathcal{K}$, положив $\mathcal{K}(t,s) = 0$ при п.в. (t,s) из треугольника $0 \leqslant t < s \leqslant 1$. Таким образом, теорема 2 позволяет устанавливать существование решения $x(t)$, $t \in [0,1]$, уравнения (16). Но для уравнения Вольтерры естественно рассматривать решения, определённые не только на всём “временнóм” отрезке $[0,1]$, но и на его подотрезках.

Определение. Пусть $\tau \in (0,1]$. *Решением уравнения (16), определённым на* $[0,\tau]$, называют функцию $x \in \mathbb{S}_\tau$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0,\tau]$.

Очевидно, сужение на $[0,\tilde{\tau}]$ решения $x \in \mathbb{S}_\tau$ уравнение (16) при любом $\tilde{\tau} \in (0,\tau)$ является решением этого уравнения на отрезке $[0,\tilde{\tau}]$.

Теории интегральных и более общих операторных уравнений Вольтерры посвящены многочисленные исследования. Сведения о существовании и свойствах решений можно найти, например, в [1; 12; 22] и в библиографии этих работ.

Введём необходимые обозначения, аналогичные обозначениям, использовавшимся в предыдущем параграфе.

Определим оператор $K_0 : \mathbb{S}_1^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}_1^{\theta_0}$ следующим соотношением:

$$(K_0 u)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds \quad \text{для всех} \;\; u \in \mathbb{S}_1^{\theta_0}, \quad \text{где} \;\; t \in [0,1].$$

Положим

$$\kappa(t) := \int\limits_0^t |\mathcal{K}(t,s)|\,ds, \quad t \in [0,1].$$

Функция κ является измеримой. Будем предполагать, что для этой функции выполнено следующее условие:

$$\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует } \delta \in (0,1] \text{ такое, что } \kappa(t) \leqslant \varepsilon \text{ при п.в. } t \in [0,\delta]. \tag{17}$$

Это условие выполнено, если для некоторого $\tau \in (0,1]$ функция $\mathcal{K}$ мажорируется на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau\}$ суммируемой функцией, т.е. справедливо соотношение (13).

Для произвольных $x \in \mathbb{S}_1$ и $\tau \in (0,1]$ определим функции $\overline{g}^{[x]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношением (15) и функцию $g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношением

$$g^{[x]}(t,u) = f(t, \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds, u) \quad \text{для всех} \quad (t,u) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}.$$

Функции $g^{[x]}$, $\overline{g}^{[x]}$ удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 3. *Пусть заданы функция* $x_0 \in \mathbb{S}_1$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \theta(f(t, v_0(t), x_0(t)), \tilde{y}(t)) < +\infty, \quad \text{где} \quad v_0(t) := (K_0x_0)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x_0(s)\,ds,$$

и числа $\sigma > 0$, $\varsigma > 0$. *Пусть* $R = \sigma^{-1}R_0$, *а многозначное отображение* $\widehat{\Omega} : [0,1] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ *определено соотношением*

$$\widehat{\Omega}(t) := [v_0(t) - \varsigma R, v_0(t) + \varsigma R] \quad \text{для любого} \ t \in [0,1].$$

Пусть, кроме того, выполнено условие (17) и существуют $\alpha > \sigma$, $\beta \geqslant 0$, *для которых при любом* $x \in B_{\mathbb{S}_1^{\theta_0}}(x_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *имеют место включения*

$$(x(t), \tilde{z}(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[g^{[x]}(t,\cdot); \mathbb{R}^{\theta_0}], \quad ((Kx)(t), \tilde{z}(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot); \widehat{\Omega}(t)].$$

Тогда найдётся такое $\tau \in (0,1]$, *что в шаре* $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ *существует определённое на* $[0,\tau]$ *решение уравнения (16).*

Доказательство. Достаточно показать, что при некотором $\tau \in (0,1]$ для уравнения (16), рассматриваемого при $t \in [0,\tau]$, выполнены все условия теоремы 2.

В силу условия (17) существует такое $\delta_1 \in (0,1]$, что $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\delta_1]} \kappa(t) \leqslant \varsigma$, и существует такое $\delta_2 \in (0,1]$, что $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\delta_2]} \kappa(t) \leqslant \beta^{-1}(\alpha - \sigma)$. Положим

$$\tau := \min\{\delta_1, \delta_2\} \tag{18}$$

и рассмотрим уравнение (16) при $t \in [0,\tau]$. Тогда $k_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \kappa(t)$ и справедливы соотношения

$$\overline{\Omega}(t) = [v_0(t) - k_0R, v_0(t) + k_0R] \subset \widehat{\Omega}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0,\tau], \quad \beta \leqslant {k_0}^{-1}(\alpha - \sigma).$$

Таким образом, при определении τ равенством (18) условия теоремы 2 выполнены. Теорема доказана.

Замечание 3. В условиях теоремы 2 и теоремы 3 утверждается существование решения x интегрального уравнения (14) и, соответственно, уравнения (16), принадлежащего шару $B_{\mathbb{S}_\tau^{\theta_0}}(x_0, R)$ в пространстве измеримых на $[0,\tau]$ функций. Это включение означает, что для решения при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено неравенство $x_0(t) - R \leqslant x(t) \leqslant x_0(t) + R$. Из полученной оценки следует, что если функция x_0 суммируема с некоторой p-й степенью на $[0,\tau]$, то решение x также суммируемо с p-й степенью на $[0,\tau]$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-04-60524). Результаты п. 2 получены Жуковским Е.С. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlin. Anal.: Theory, Methods and Appl. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.
2. *Жуковская Т.В.* О продолжении решений нелинейного уравнения Volterra // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2012. Т. 17. № 3. С. 857–866.
3. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

4. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
5. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.
6. *Arutyunov A., Jacimovic V., Pereira F.* Second order necessary conditions for optimal impulsive control problems // J. Dynam. and Contr. Systems. 2003. V. 9. № 1. P. 131–153
7. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.
8. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 3–32.
9. *Жуковский Е.С., Мерчела В.* О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.
10. *Мерчела В.* К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73.
11. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. М., 1968.
12. *Цалюк З.Б.* Интегральные уравнения Вольтерры // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. М., 1977. Т. 15. С. 131–198.
13. *Прёсдорф З.* Линейные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. М., 1988. Т. 27. С. 5–130.
14. *Diogo T., Pedas A., Vainikko G.* Integral equations of the third kind in L^p spaces // J. Integral Equat. Appl. 2020. V. 32. № 4. P. 417–427.
15. *Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.* Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.
16. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
17. *Шрагин И.В.* Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 476–478.
18. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.
19. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.
20. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М., 2014.
21. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М., 2011.
22. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Мат. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.

Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.
После доработки 06.09.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.