ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 105–119

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55+517.929

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2022 г. А. В. Метельский, В. В. Карпук

Для спектрально управляемой линейной автономной системы с несоизмеримыми запаздываниями строится динамическая обратная связь по состоянию в виде дифференциально-разностного регулятора, обеспечивающая замкнутой системе финитную стабилизацию (полное успокоение исходной системы за конечное время). Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.31857/S0374064122010113

Введение. Пусть объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_ix(t-d_i) + bu(t), \quad t > 0, \quad x(t) = \eta(t), \quad t \in [-d_m, 0]. \tag{1}$$

Здесь x – n-вектор-столбец решения системы (1) $(n \geqslant 2)$; $0 < d_1 < \ldots < d_m$ – постоянные запаздывания; A_i – постоянные $n \times n$-матрицы $(i = \overline{0,m})$; b – постоянный n-столбец; η – начальная кусочно-непрерывная функция; u – скалярное управление. Далее векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих $'$ обозначает операцию транспонирования.

Не ограничивая общности, считаем, что $b = e_n = [0; \ldots; 0; 1]'$. Этого всегда можно достичь невырожденным линейным преобразованием переменных $\breve{x} = Tx$ с постоянной матрицей T. Кроме того, выбрав управление $u(t) = -e_n'(A_0x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_ix(t-d_i)) + \widetilde{u}(t)$ ($\widetilde{u}(t)$ – новое управление), получим, что последняя строка матриц A_i $(i = \overline{0,m})$ – нулевая. Тот же результат будем иметь, введя вспомогательную переменную $\dot{u}(t) = u_1(t)$. В этом случае вход системы (1) может содержать запаздывания: $\sum_{i=1}^{m} b_iu(t-d_i)$, b_i – постоянные n-столбцы $(i = \overline{0,m})$.

Пусть E_n – единичная матрица n-го порядка; $W(p) = pE_n - (A_0 + A_1e^{-pd_1} + \ldots + A_me^{-pd_m})$ – характеристическая матрица, $p \in \mathbb{C}$; $w(p) = |W(p)|$ – характеристический квазиполином однородной $(b = 0)$ системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ – определитель квадратной матрицы. Набор $\sigma = \{p \in \mathbb{C} : w(p) = 0\}$ корней характеристического квазиполинома (с учётом их кратностей) называют *спектром* системы (1). Так как коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p)$ действительны, то недействительные числа, входящие в σ, разбиваются на пары взаимно сопряжённых.

Считаем, что в уравнении (1) запаздывания имеют вид

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $\mu \leqslant m$ – натуральное, а k_{ij} – целые числа, $h_1 < \ldots < h_\mu$ – положительные действительные числа, которые могут быть произвольными, в частности, рационально независимыми. Обозначим

$$\theta_i = e^{-pd_i} = \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \quad \lambda_j = e^{-ph_j}, \quad i = \overline{1,m}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

В операторной записи уравнений полагаем: $\theta_i = e^{-pd_i}$ $(\lambda_j = e^{-ph_j})$ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования:

$$p^s\theta_i f(t) = p^s e^{-pd_i} f(t) = f^{(s)}(t - d_i)$$

или

$$p^s\theta_i f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}} f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} e^{-pk_{ij}h_j} f(t) = f^{(s)}\Big(t - \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j\Big),$$

$f(t)$ – функция; $s \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$, k_{ij} – целые числа.

Задача полного успокоения системы (1) заключается [1, с. 358] в обеспечении за счёт выбора управления $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, тождеств

$$x(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \tag{3}$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции η. В работе [2] установлено, что для разрешимости задачи полного успокоения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была спектрально управляема:

$$\operatorname{rank}[pE_n - (A_0 + A_1e^{-pd_1} + \ldots + A_me^{-pd_m}), b] = n \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Следуя [3], обеспечение полного успокоения исходной системы (1) посредством обратной связи будем называть *финитной стабилизацией*. В работах [4–7] задача финитной стабилизации решается посредством назначения замкнутой системе конечного спектра (*спектральное приведение* [8]). В работе [8] обосновано необходимое условие спектральной приводимости системы (1) в классе динамических дифференциально-разностных регуляторов: равенство (4) может нарушаться только в конечном числе точек

$$\widetilde{P}_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1,\nu_0} : \operatorname{rank}[W(p_i), b] < n\}. \tag{5}$$

Там же установлено, что для системы (1) с соизмеримыми запаздываниями условие (5) обеспечивает существование дифференциально-разностного регулятора, приводящего систему (1) к системе с конечным спектром. В настоящей статье показано (пример 3), что для системы (1) с несоизмеримыми запаздываниями условие (4) не является достаточным для спектральной приводимости.

Достаточно полный обзор публикаций, посвящённых различным задачам стабилизации и назначения спектра для линейных автономных систем с запаздыванием, представлен в [9]. Бóльшая часть известных работ относится к системам с одним или с соизмеримыми запаздываниями. Из последних исследований по данной тематике для объектов с несоизмеримыми запаздываниями отметим работу [10], в которой рассматривается задача модального управления для линейной системы, заданной автономным дифференциальным уравнением n-го порядка с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями в состоянии. Для такой системы получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи произвольного назначения коэффициентов характеристической функции посредством статической обратной связи по выходу.

В настоящей работе для системы (1) с несоизмеримыми запаздываниями решается задача финитной стабилизации. Именно, предлагается схема построения динамического дифференциально-разностного регулятора по типу обратной связи по состоянию, доставляющего полное успокоение системы (1). Решение этой задачи, как и в названных выше работах [4–7], выполняется в два этапа: внутренний контур регулятора обеспечивает приведение исходной системы к системе с конечным спектром, а внешний контур обеспечивает точечную вырожденность [11, 12] замкнутой системы в направлениях, выделяющих её первые n фазовых переменных.

Развиваемый ниже подход к построению регулятора финитной стабилизации является по своей сути алгебраическим, а для его реализации используются стандартные операции над полиномами и полиномиальными матрицами.

1. Спектральное приведение системы с несоизмеримыми запаздываниями. Построим двухконтурный дифференциально-разностный регулятор, обеспечивающий замкнутой системе (1) финитную стабилизацию (см. тождества (3)). Внутренний контур обеспечит приведение исходной системы к системе с конечным спектром, а внешний – обнуление первых n фазовых переменных.

Рассмотрим вопросы, связанные со спектральным приведением системы (1).

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$, $A(\Lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \prod_{j=1}^\mu \lambda_j^{k_{ij}}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$M(p, \Lambda) = [M_1(p, \Lambda), \ldots, M_n(p, \Lambda)]', \tag{6}$$

где $M_i(p, \Lambda)$– алгебраическое дополнение к i-му элементу (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F_\varphi(p, \Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & -a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij}(\Lambda)$ – элементы матрицы $A(\Lambda)$; $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, – полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы выполнялось равенство

$$|F_\varphi(p, \Lambda)| = d_0(p),$$

где $d_0(p)$ – некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geqslant n$. Если такой выбор возможен, то систему назовём *спектрально приводимой*.

Лемма 1. *Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (6) содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (6) содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$, множество корней которого обозначим через $\widetilde{P}_0$. В частности, возможно, что $\widetilde{d}_0(p) = 1$, и тогда $\widetilde{P}_0 = \varnothing$. По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином $\widetilde{\varphi}'(p, \Lambda) = (\widetilde{\varphi}_1(p, \Lambda), \ldots, \widetilde{\varphi}_n(p, \Lambda))$ такой, что справедливо разложение

$$\widetilde{\varphi}'(p, \Lambda) M(p, \Lambda) = \widetilde{d}_0(p). \tag{7}$$

Если степень полинома $\widetilde{\nu} = \deg \widetilde{d}_0(p)$ меньше, чем n, то обе части равенства (7) домножим на полином $d_1(p)$ с действительными коэффициентами степени $n - \widetilde{\nu}$. Обозначим $d_0(p) = d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$. Если $\deg \widetilde{d}_0(p) \geqslant n$, то полагаем $d_1(p) = 1$. Таким образом, $\nu = \deg d_0(p) \geqslant n$.

Согласно [13, следствие 1], равенство (7) можно преобразовать к виду

$$\Big[-\varphi_1(\Lambda), \ldots, -\varphi_{n-1}(\Lambda), p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \Big] M(p, \Lambda) = d_0(p), \tag{8}$$

где $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$ $(r = \nu - n + 1 \geqslant 1)$, – некоторые полиномы. Полиномы $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов, используя (8). Равенство (8) означает, что замкнутая система с характеристической матрицей $F\varphi(p, \Lambda)$ имеет конечный спектр.

Необходимость. Если система (1) спектрально приводима, то имеет место равенство (8). В таком случае по свойству базиса Грёбнера редуцированный базис для системы полиномов (6), построенный в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$ для системы полиномов (6), необходимо содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$ такой, что $d_0(p) = d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$. Лемма доказана.

Считаем, что старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен 1. Множество различных корней полинома $d_0(p)$ обозначим $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}\colon\ i = \overline{1,\mu_0}\}$.

Замечание 1. В силу равенства (8) значения $p_k \in \widetilde{P}_0$ войдут в состав корней полинома $d_0(p)$ при любом выборе полиномов $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,n}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,r}$, обеспечивающих выполнение этого равенства. Поэтому $d_0(p) = d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$ и $\widetilde{P}_0 \subseteq P_0$. Значения $p_k \in \widetilde{P}_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями*, а полином $\widetilde{d}_0(p)$ – *инвариантным полиномом.*

Если система

$$M(p,\Lambda) = 0$$

несовместна (редуцированный базис Грёбнера имеет вид $\{1\}$), то $\widetilde{P}_0 = \varnothing$, и множество корней полинома $d_0(p) = d_1(p)$ при спектральном приведении может быть произвольным при условии, что недействительные корни разбиваются на пары взаимно сопряжённых. Однако для построения второго контура регулятора финитной стабилизации при выборе полинома $d_1(p)$ имеются некоторые ограничения, описанные ниже в шаге 2) п. 4.

Замечание 2. Набор величин $h_1 < \ldots < h_\mu$, порождающий переменные $\lambda_i = e^{-ph_i}$, $i = \overline{1,\mu}$, назовём *базисным.* Этот набор для заданных запаздываний $0 < d_1 < \ldots < d_m$ (см. представление (2)), очевидно, можно сформировать по-разному. Следующий пример показывает, что для одного базисного набора спектрально управляемая система (1) с несоизмеримыми запаздываниями будет спектрально приводимой, а для другого – нет. В этом для систем вида (1) состоит принципиальное отличие запаздываний, среди которых имеются несоизмеримые, от запаздываний, кратных одному и тому же числу. Для последних (т.е. попарно соизмеримых запаздываний) система (1) в случае спектральной управляемости спектрально приводима [8, 14].

Поясним замечание 2 следующими примерами, содержащими подходы к решению задачи спектрального приведения.

Пример 1. Пусть система (1) задана своей характеристической матрицей ($\Theta = (\theta_1,\theta_2)$, $\theta_i = e^{-pd_i}$, $i = \overline{1,2}$)

$$pE_2 - \widetilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p-\theta_2 & -\theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2, \quad d_2 = \ln 3. \tag{9}$$

Система (1), (9) имеет характеристический квазиполином $w(p) = p(p-3^{-p})$ и бесконечный спектр. Для алгебраических дополнений $\widetilde{M}(p,\Theta) = [\widetilde{M}_1(p,\Theta), \widetilde{M}_2(p,\Theta)]'$ к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p,\Theta)$ очевидны равенства $\widetilde{M}_1(p,\Theta) = \theta_1$, $\widetilde{M}_2(p,\Theta) = p - \theta_2$.

Очевидно также, что при любых запаздываниях d_1, d_2 данная система полностью управляема, поскольку $\theta_1 = e^{-pd_1} \neq 0$ для всех $p \in \mathbb{C}$. В то же время система

$$\widetilde{M}(p,\Theta) = 0$$

относительно p имеет бесконечно много решений, поэтому для набора $d_1 = \ln 2$, $d_2 = \ln 3$ спектральное приведение невозможно. Действительно, полагая $\theta_1 = 0$, получаем

$$\begin{vmatrix} p-\theta_2 & 0 \\ -\varphi_1(\Theta) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Theta)p^{r-i} \end{vmatrix} = (p-\theta_2)\left(p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Theta)p^{r-i}\right), \quad \theta_2 = e^{-pd_2}, \tag{10}$$

т.е. система (1), (9) не приводится к системе с конечным спектром.

Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_1 \neq 0$. Запишем d_2 в виде $d_2 = (\ln 3 - \ln 2) + \ln 2$ и возьмём $h_1 = \ln 2$, $h_2 = \ln 3 - \ln 2$. Тогда $\theta_2 = e^{-pd_2} = e^{-ph_1}e^{-ph_2} = \lambda_1\lambda_2$ ($\lambda_i = e^{-ph_i}$, $i = \overline{1,2}$); $\lambda_2 = \theta_2/\theta_1$ и $\theta_1 \neq 0$.

Имеем ($\Lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$)

$$pE_2 - A(\Lambda) = \begin{bmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Отсюда $M_1(p,\Lambda)=\lambda_1$, $M_2(p,\Lambda)=p-\lambda_1\lambda_2$. Находим базис Грёбнера: $\{p,\lambda_1\}$ для системы полиномов $M(p,\Lambda)$; значит, в разложении (7) $\widetilde{d}_0(p)=p$. Возьмём $d_1(p)=p+1$, тогда $d_0(p)=$ $=p(p+1)$, $P_0=\{0,-1\}$. Равенство (8) примет вид

$$[\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2, p+1+\lambda_1\lambda_2]M(p,\Lambda)=p(p+1), \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}=p(p+1).$$

С учётом того, что $\lambda_1=\theta_1$, $\lambda_2=\theta_2/\theta_1$, получаем

$$\begin{vmatrix} p-\theta_2 & -\theta_1 \\ \theta_2/\theta_1+\theta_2^2/\vartheta_1 & p+1+\theta_2 \end{vmatrix}=p(p+1).$$

Таким образом, второе уравнение замкнутой системы следующее:

$$\dot{x}_2(t)=-x_1(t-(d_2-d_1))-x_1(t-(2d_2-d_1))-x_2(t)-x_2(t-d_2).$$

Заметим, что везде аргумент запаздывающего типа: $d_2-d_1>0$, $2d_2-d_1>0$.

Следующий пример показывает, что при построении контура спектрального приведения можно использовать только операторную запись системы управления, т.е. её характеристическую матрицу.

Пример 2. Пусть система (1) задана своей характеристической матрицей

$$pE_2-\widetilde{A}(\Theta)=\begin{bmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1=\ln 2, \quad d_2=\ln 3.$$

При любых запаздываниях d_1, d_2 данная система полностью управляема, так как $\theta_2=$ $=e^{-pd_2}\neq 0$ для всех $p\in\mathbb{C}$.

Как и в примере 1, положив $\theta_2=0$, получим равенство, аналогичное (10), поэтому для набора $d_1=\ln 2$, $d_2=\ln 3$ спектральное приведение невозможно. Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_2\neq 0$.

По предположению $d_1<d_2$. Пусть $2d_1>d_2$, тогда первую строку характеристической матрицы представим следующим образом: $(p-(\theta_1^2/\theta_2)(\theta_2/\theta_1), -(\theta_2/\theta_1)^2(\theta_1^2/\theta_2))$. Это равносильно преобразованию запаздываний

$$d_1=(2d_1-d_2)+(d_2-d_1), \quad d_2=2(d_2-d_1)+(2d_1-d_2).$$

Введя величины $h_1=2d_1-d_2>0$, $h_2=d_2-d_1>0$, первую строку характеристической матрицы получим в виде

$$(p-\lambda_1\lambda_2, -\lambda_2^2\lambda_1), \quad \text{где} \quad \lambda_1=\theta_1^2/\theta_2, \quad \lambda_2=\theta_2/\theta_1.$$

Теперь базис Грёбнера для полиномов $\{p-\lambda_1\lambda_2, -\lambda_2^2\lambda_1\}$ содержит полином p^2: $\{p^2, p\lambda_2, p-$ $-\lambda_1\lambda_2\}$. Решая полиномиальное уравнение (8), где $d_0(p)=p^2$, $M(p,\Lambda)=(\lambda_2^2\lambda_1, p-\lambda_1\lambda_2)$, находим вторую строку спектрально приведённой системы $(\lambda_1, p+\lambda_1\lambda_2)$:

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^2/\theta_2 & p+\theta_1 \end{vmatrix}=p^2, \quad \theta_i=e^{-pd_i}, \quad i=\overline{1,2}.$$

Если $2d_1<d_2$, а $3d_1>d_2$, то полагаем $(p-(\theta_1^3/\theta_2)(\theta_2/\theta_1^2), -(\theta_2/\theta_1^2)^3(\theta_1^3/\theta_2)^2)$ и

$$h_1=3d_1-d_2>0, \quad h_2=d_2-2d_1>0.$$

Тогда спектрально приведённая система имеет вид

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^3/\theta_2 & p^2+p\theta_1+\theta_1^2 \end{vmatrix}=p^3,$$

или в нормальной форме

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ \theta_1^3/\theta_2 & \theta_1^2 & p+\theta_1 \end{vmatrix} = p^3.$$

В случае спектральной управляемости система вида (1) с соизмеримыми запаздываниями спектрально приводима [8, 14]. Для систем того же вида с несоизмеримыми запаздываниями это не так. Приведём простой пример спектрально управляемой системы с несоизмеримыми запаздываниями, которая не является спектрально приводимой ни при каком базисном наборе запаздываний (см. (2)).

Пример 3. Рассмотрим систему (1) с характеристической матрицей

$$pE_2 - \widetilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p-\theta_2 & 1-\theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2, \quad d_2 = \ln 3.$$

Несложно убедиться, что при любых несоизмеримых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, так как система уравнений $p - e^{-pd_2} = 0$, $1 - e^{-pd_1} = 0$ относительно p несовместна.

При любом представлении запаздываний можно положить $\theta_1 = 1$ (даже если переменная θ_1 окажется в знаменателе), и тогда получаем равенство (10). Таким образом, данная система дифференциально-разностным регулятором к конечному спектру не приводится.

2. Предварительные результаты. Покажем, что найдутся скалярный полином $\lambda = \lambda(\Lambda) = \lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ и векторный полином $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \ldots, \psi_n(\Lambda))$ такие, что

$$\lambda(\Lambda) = \Psi'(\Lambda) M(p, \Lambda). \tag{11}$$

Лемма 2. *Если система (1) спектрально управляема, то найдётся редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке вида $p > \lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu}$) для системы полиномов (6), содержащий полином вида $\lambda = \lambda(\Lambda)$, отличный от тождественного нуля.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_p = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)_p : p \in \widetilde{P}_0\}$ – множество наборов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)_p$ таких, что (p, Λ_p) – решение системы

$$M(p, \Lambda_p) = 0. \tag{12}$$

Напомним, что $\widetilde{P}_0$ – множество различных корней полинома $\widetilde{d}_0(p)$. Равенство (12) означает, что выполняется неравенство $\operatorname{rank}[pE_n - A(\Lambda_p), b] < n$, $p \in \widetilde{P}_0$, а для этого необходимо [15, с. 351], чтобы

$$\operatorname{rank}[b, A(\Lambda_p)b, \ldots, A^{n-1}(\Lambda_p)b] < n.$$

Таким образом, множество Λ_p образовано [5] нулями полинома

$$\delta(\Lambda) = |b, A(\Lambda)b, \ldots, A^{n-1}(\Lambda)b|,$$

отличного от тождественного нуля [2]. Зная Λ_p, из системы (12) для каждого $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)_p \in \Lambda_p$ можно найти соответствующие значения $p \in \widetilde{P}_0$.

Так как все решения системы (12) являются нулями полинома $\delta(\Lambda)$, то согласно теореме Гильберта о нулях найдётся векторный полином $\widetilde{\Psi}'(p, \Lambda) = (\widetilde{\psi}_1(p, \Lambda), \ldots, \widetilde{\psi}_n(p, \Lambda))$ и натуральное число k такие, что $\widetilde{\Psi}'(p, \Lambda) M(p, \Lambda) = \delta^k(\Lambda)$. Отсюда следует [13, 14] существование векторного полинома $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \ldots, \psi_n(\Lambda))$, для которого имеет место равенство (11), или в подробной записи

$$\lambda(\Lambda) = \begin{vmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & p - a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ \psi_1(\Lambda) & \ldots & \psi_{n-1}(\Lambda) & 0 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Очевидно равенство $\psi_n(\Lambda) = 0$, поскольку в противном случае определитель (13) содержал бы член с p^{n-1}. Лемма доказана.

Предлагаемая конструкция регулятора финитной стабилизации основана на двух предположениях. Первое: система спектрально приводима, т.е. при некотором полиноме $d_0(p)$ и при некоторых полиномах $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, имеет место равенство (8). Второе: полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$, существование которого обосновано предыдущей леммой 2, обладает свойством

$$\widetilde{\lambda}(p) = \lambda(e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu}) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad p \in \widetilde{P}_0. \tag{14}$$

Замечание 3. Предположение (14) не является "жёстким", так как в равенстве (11) векторный полином $M(p, e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$ отличен от нуля при любом $p \in \widetilde{P}_0$ ввиду условия (4) спектральной управляемости.

Обозначим $\bar{\lambda}(p) = \chi(e^{-ph_0})\widetilde{\lambda}(p)$, где $\chi(\lambda_0)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами.

Лемма 3. *Пусть выполнено свойство (14). Тогда за счёт выбора полинома $\chi(\lambda_0)$ и числа $h_0 > 0$ можно обеспечить выполнение следующих соотношений:*

$$\bar{\lambda}(p_i) \neq \bar{\lambda}(p_k), \quad \textit{если} \;\; p_i \neq p_k, \quad p_i, p_k \in \widetilde{P}_0; \tag{15}$$

$$\frac{d\bar{\lambda}(p)}{dp} = \frac{d}{dp}(\chi(e^{-ph_0})\widetilde{\lambda}(p)) \neq 0 \quad \textit{для всех} \quad p \in \widetilde{P}_0. \tag{16}$$

Доказательство. Если соотношения (15), (16) для полинома $\widetilde{\lambda}(p)$ нарушаются, то вместо полинома $\lambda(\Lambda)$ возьмём полином $\hat{\lambda}(\hat{\Lambda}) = \chi(\lambda_0)\lambda(\Lambda)$, $\hat{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$. Для этого домножим последнюю строку определителя (13) на некоторый полином $\chi(\lambda_0)$ с действительными коэффициентами. Выберем число $h_0 > 0$, при котором значения $e^{-p_k h_0}$ будут различными для разных $p_k \in \widetilde{P}_0$. Чтобы не расширять список переменных λ_i, $i = \overline{1, \mu}$, возьмём $h_0 = h_i$, $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, если это условие для некоторого h_i, $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, выполняется; тогда $\hat{\Lambda} = \Lambda$.

Значения полинома $\chi(\lambda_0)$ при $\lambda_0 = e^{-p_k h_0}$, $p_k \in \widetilde{P}_0$, зададим такими, чтобы числа $\chi(e^{-p_k h_0})\widetilde{\lambda}(p_k)$ были различными для разных $p_k \in \widetilde{P}_0$. Это возможно, так как выполнено свойство (14). В частности, можно положить $\chi(e^{-p_k h_0})\widetilde{\lambda}(p_k) = p_k$ для $p_k \neq 0$, $p_k \in \widetilde{P}_0$. Тогда ($\lambda_0 = e^{-ph_0}$)

$$\frac{d\bar{\lambda}(p)}{dp} = \frac{d\chi(\lambda_0)}{d\lambda_0}\lambda_0(-h_0)\widetilde{\lambda}(p) + \chi(\lambda_0)\frac{d\widetilde{\lambda}(p)}{dp}.$$

Из свойства (14) вытекает, что значения производных $d\chi(\lambda_0)/d\lambda_0$ при $\lambda_0 = e^{-p_k h_0}$, $p_k \in \widetilde{P}_0$, можно выбрать такими, чтобы обеспечить выполнение соотношений (16). Подходящий полином $\chi(\lambda_0)$ получим как интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра.

Итак, для полинома $\hat{\lambda}(\hat{\Lambda}) = \chi(\lambda_0)\lambda(\Lambda)$, $\hat{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ будут выполнены соотношения (15), (16).

Если же соотношения (15), (16) для полинома $\widetilde{\lambda}(p)$ выполняются, то полагаем $\chi(\lambda_0) = 1$ и $\hat{\lambda}(\hat{\Lambda}) = \lambda(\Lambda)$. Лемма доказана.

Регулятор финитной стабилизации будем строить в виде

$$x_n^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\Lambda)x_i(t) + \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\Lambda)x_n^{(r-i)}(t) + f_1(p, \lambda)x_{n+1}(t) + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$x_{n+1}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i(\Lambda)x_i(t) + f_2(p, \lambda)x_{n+1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t > 0. \tag{17}$$

Здесь $a_i(\lambda)$, $i = \overline{1,2}$, $q'(\lambda) = [q_1(\lambda), q_2(\lambda)]$; $f_1(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{r_1} \hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0,r_1}$, $f_2(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{s} \bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$, $\bar{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{0,s}$, – некоторые полиномы, $r_1 \geqslant 0$, $s \geqslant 1$.

Характеристическая матрица замкнутой системы (1), (17) имеет следующий вид ($\Lambda = (e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$, $\lambda = \lambda(e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$):

$$\widetilde{A}(p,\Lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \ldots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \ldots & p - a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) & 0 & 0 \\ -\varphi_1(\Lambda) & \ldots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\Lambda)p^{r-i} & -f_1(p,\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda) \\ -\psi_1(\Lambda) & \ldots & -\psi_{n-1}(\Lambda) & 0 & p^s - f_2(p,\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Замкнутую систему (1), (17) с характеристической матрицей (18) будем называть *системой (18)*. Коэффициенты регулятора (17) подберём такими, чтобы имело место равенство

$$|\widetilde{A}(p,\Lambda)| = d(p),$$

где $d(p) = d_2(p)d_0(p)$ – характеристический полином степени $N = \deg d(p) \geqslant n+2$, $d_2(p)$ – некоторый полином с действительными коэффициентами.

3. Приведение замкнутой системы (18) к нормальной форме. Введём обозначение $G(p,\lambda) = (\lambda, d_0(p))'$ и положим

$$k(p,\lambda) = (a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p), \quad K(p,\lambda) = k(p,\lambda) + p^s d_0(p). \quad (19)$$

Докажем, что справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (4) спектральной управляемости. Для того чтобы система (18) имела характеристический полином $d(p)$ степени $N = n+r+s$ достаточно:*

а) выбрать векторный полином $q'(\lambda)$ таким, чтобы функция $k(p,\lambda)$ была полиномом;

б) векторный полином $f'(p,\lambda) = (f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda))$ взять таким, чтобы выполнялись равенства

$$f'(p,\lambda)G(p,\lambda) = K(p,\lambda), \quad G(p,\lambda) = (\lambda, d_0(p))', \quad (20)$$

где функция $K(p,\lambda)$ определена в (19).

Доказательство. Пусть выполнены условия 1) и 2). Разлагая определитель матрицы (18) по последней строке, получаем

$$|\widetilde{A}(p,\lambda)| = (p - a_2(\lambda))(p^s - f_2(p,\lambda))d_0(p) - f_1(p,\lambda)\lambda - a_1(\lambda)(q_1(\lambda)\lambda + q_2(\lambda)d_0(p)) =$$

$$= (p - a_2(\lambda))(p^s d_0(p) - f'(p,\lambda)G(p,\lambda)) - a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda). \quad (21)$$

Так как $f'(p,\lambda)G(p,\lambda) = K(p,\lambda)$, то из равенств (19), (21) вытекает, что $|\widetilde{A}(p,\lambda)| = d(p)$. Теорема доказана.

Покажем, что если $N \geqslant 2n+r-1$, то система (18) приводится к нормальной форме и имеет запаздывающий тип. Неравенство $N \geqslant 2n+r-1$ всегда можно обеспечить за счёт степени полинома $d_2(p)$, именно, при $\deg d_2(p) = s+1$.

В силу равенств (20) имеем

$$K(p,\lambda) = f_1(p,\lambda)\lambda + f_2(p,\lambda)d_0(p). \quad (22)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *При $N \geqslant 2n+r-1$ для степеней полиномов f_1 и f_2 в равенстве (22) можно обеспечить выполнение неравенств*

$$r_1 = \deg_p f_1(p,\lambda) \leqslant n+r-2, \quad r_2 = \deg_p f_2(p,\lambda) \leqslant s-1. \quad (23)$$

Доказательство. Если по переменной p степень $\deg_p f_1(p,\lambda)$ не меньше, чем $n+r-1$, то представим полином $f_1(p,\lambda)$ в виде $f_1(p,\lambda)=\xi_0(p,\lambda)d_0(p)+\xi_1(p,\lambda)$, где $\xi_i(p,\lambda)$, $i=0,1$, – полиномы, причём $\deg_p \xi_1(p,\lambda)\leqslant n+r-2$. Это возможно, так как полином $d_0(p)$ имеет старший член p^{n+r-1}. В результате получим

$$K(p,\lambda)=\xi_1(p,\lambda)\lambda+(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\lambda)d_0(p). \tag{24}$$

Покажем, что $\deg_p(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\lambda)\leqslant s-1$. Если допустить противоположное неравенство, то

$$\deg_p(f_2(p,\lambda)+\xi_0(p,\lambda)\lambda)d_0(p)\geqslant n+r+s-1. \tag{25}$$

Так как $\deg_p(\xi_1(p,\lambda)\lambda)\leqslant n+r-2$, то $\deg_p K(p,\lambda)\geqslant n+r+s-1$ в силу (24), (25), что противоречит равенству (19), согласно которому $\deg_p K(p,\lambda)\leqslant n+r+s-2$. Лемма доказана.

Покажем, что если $N\geqslant 2n+r-1$ и выполнены неравенства (23), то система (18) может быть записана в нормальной форме. Для упрощения будем оперировать элементами характеристической матрицы (18).

Шаг 1. Если $r\geqslant 2$, то введя вспомогательные переменные

$$\dot x_{n+1}(t)=\widetilde x_1(t),\quad \dot{\widetilde x}_1(t)=\widetilde x_2(t),\quad \ldots,\quad \dot{\widetilde x}_{r-2}(t)=\widetilde x_{r-1}(t),$$

из системы (18) получим систему с характеристической матрицей, в которой после n-й строки и n-го столбца добавятся $r-1$ строк и столбцов. Поскольку эта процедура общеизвестна, то запишем только фрагмент полученной матрицы, начиная с элемента, расположенного в позиции $(n,n+1)$:

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1,n}(\Lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ p & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \ldots & p & -1 & 0\\ -\bar\varphi_r(\lambda) & -\bar\varphi_{r-1}(\lambda) & \ldots & -\bar\varphi_2(\lambda) & p-\bar\varphi_1(\lambda) & -f_1(p,\lambda)\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^s-\sum_{i=1}^s \bar f_i(\lambda)p^{s-i} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Если $m_1=r_1-(r-1)\geqslant 0$, то, выполняя элементарные преобразования над столбцами этой матрицы (см. [16, п. 3.4]), её последний столбец приведём к виду

$$\left[0,-\widetilde f_1(p,\lambda),\ldots,-\widetilde f_{r-1}(\lambda),-\widetilde f_r(\lambda),p^s-\sum_{i=1}^s \bar f_i(\lambda)p^{s-i}\right]'.$$

Здесь $\widetilde f_1(p,\lambda)$ – некоторый полином со старшим членом $\hat f_1(\lambda)p^{r_1-(r-1)}$ относительно p; $\widetilde f_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r-1}$, – некоторые полиномы.

Так как $N\geqslant 2n+r-1$, то $s=N-n-r\geqslant n-1$. Если $s\geqslant 2$, то в полученной характеристической матрице после $(n+r)$-й строки и $(n+r)$-го столбца аналогично (26) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что опять-таки равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных.

Шаг 2. Согласно (23) получаем, что $m_1\leqslant n-1$, а так как $n-1\leqslant s$, то $m_1\leqslant s$. Если $m_1>0$, то, используя строки с номерами с $n+r$ по $n+r+s-1$, посредством элементарных преобразований элементы n-й строки $[0,\ldots,p,-1,0,\ldots,0,-\widetilde f_1(p,\lambda),0,\ldots,0]$, начиная с $(n+r)$-го, последовательно заменим полиномами, зависящими только от λ. В результате получим регулятор финитной стабилизации в виде

$$u(t)=\psi_1(\Lambda)f(\lambda)x_1(t)+\ldots+\psi_{n-1}(\Lambda)f(\lambda)x_{n-1}(t)+x_{n+1}(t)+\ldots+\check f_1(\lambda)x_{N-s}(t)+\ldots$$

$$\ldots+\check f_s(\lambda)x_{N-1}(t)+f(\lambda)q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t),$$

$$\dot x_{n+1}(t)=x_{n+2}(t)+\widetilde f_2(\lambda)x_{N-s}(t),\quad \ldots,\quad \dot x_{N-s-2}(t)=x_{N-s-1}(t)+\widetilde f_{r-1}(\lambda)x_{N-s}(t),$$

$$\dot{x}_{N-s-1}(t) = \varphi_1(\Lambda)x_1(t) + \ldots + \varphi_{n-1}(\Lambda)x_{n-1}(t) + \bar{\varphi}_r(\Lambda)x_n(t) + \ldots$$
$$\ldots + \bar{\varphi}_1(\Lambda)x_{N-s-1}(t) + \widetilde{f}_r(\lambda)x_{N-s}(t) + \ldots + q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t),$$
$$\dot{x}_{N-s}(t) = x_{N-s+1}(t), \quad \ldots, \quad \dot{x}_{N-2}(t) = x_{N-1}(t),$$
$$\dot{x}_{N-1}(t) = \psi_1(\Lambda)x_1(t) + \ldots + \psi_{n-1}(\Lambda)x_{n-1}(t) + \ldots + \bar{f}_s(\lambda)x_{N-s}(t) + \ldots$$
$$\ldots + \bar{f}_1(\lambda)x_{N-1}(t) + q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_N(t), \quad \dot{x}_N(t) = x_{N-s}(t) + a_2(\lambda)x_N(t), \quad t > 0. \tag{27}$$

Здесь $\breve{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1,s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat{f}_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p,\lambda)$ при p^{r_1}, если $m_1 = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Если $r = 1$, то преобразования шага 1 отменяются и после шага 2 первое уравнение регулятора (27) будет таким:

$$u(t) = (\varphi_1(\Lambda) + \psi_1(\Lambda)f(\lambda))x_1(t) + \ldots + (\varphi_{n-1}(\Lambda) + \psi_{n-1}(\Lambda)f(\lambda))x_{n-1}(t) + \bar{\varphi}_1(\Lambda)x_n(t) + \ldots$$
$$\ldots + \breve{f}_1(\lambda)x_{N-s}(t) + \ldots + \breve{f}_s(\lambda)x_{N-1}(t) + (q_1(\lambda) + f(\lambda)q_2(\lambda))a_1(\lambda)x_N(t).$$

Здесь, как и в (27), $\breve{f}_i(\lambda)$, $i = \overline{1,s}$, – некоторые полиномы; $f(\lambda) = \hat{f}_0(\lambda)$ – коэффициент полинома $f_1(p,\lambda)$ при p^{r_1}, если $m_1 = s$, и $f(\lambda) = 0$, если $m_1 < s$.

Напомним, что $\widetilde{\lambda}(p) = \lambda(e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$, полином $\lambda = \lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ задан выше равенством (13).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (4). Для финитной стабилизации системы (1) регулятором (27) достаточно:*

a) обеспечить замкнутой системе (1), (27) конечный спектр с некоторым характеристическим полиномом $d(p)$ степени $N \geqslant 2n + r - 1$;

b) выбрать полиномы $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ такими, чтобы функции

$$a_1(\widetilde{\lambda}(p))/d(p) \quad \text{и} \quad (a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p)/d(p)$$

были целыми.

Доказательство. Так как характеристическая матрица замкнутой системы (1), (27) (обозначим её $\hat{A}(p, \widetilde{\lambda}(p))$) получена из матрицы (18) элементарными преобразованиями строк и столбцов, то её определитель также равен $d(p)$. Замкнутая система (1), (27) – линейная автономная система запаздывающего типа, поэтому к ней применимо преобразование Лапласа. Согласно теореме Винера–Пэли для выполнения тождеств (3) достаточно [11], чтобы элементы первых n строк матрицы $(\hat{A}(p, \widetilde{\lambda}(p)))^{-1}$ были целыми функциями экспоненциального типа, т.е., другими словами, достаточно, чтобы дополнительные миноры к элементам первых n столбцов характеристической матрицы $\hat{A}(p, \widetilde{\lambda}(p))$ были целыми функциями. Для того чтобы убедиться в справедливости последнего свойства достаточно разложить указанные миноры по последнему столбцу матрицы $\hat{A}(p, \widetilde{\lambda}(p))$ и воспользоваться условием b) доказываемой теоремы. Таким образом, регулятор (27) обеспечивает финитную стабилизацию системы (1). Теорема доказана.

4. Вычисление коэффициентов регулятора (17). Построение регулятора (27) равносильно построению регулятора (17), поскольку регулятор (27) получен элементарными преобразованиями характеристической матрицы (18). Приведём схему вычисления коэффициентов регулятора (17), гарантирующих выполнение условий теорем 1 и 2.

Далее считаем, что выполняются следующие предположения: i) система (1) спектрально управляема; ii) система (1) спектрально приводима, т.е. при некотором полиноме $d_0(p)$ и при некоторых полиномах $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,n-1}$, и $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,r}$, имеет место равенство (8); iii) существует векторный полином $\Psi'(\Lambda) = (\psi_1(\Lambda), \ldots, \psi_n(\Lambda))$ такой, что полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$ (см. (13)) удовлетворяет условиям (14)–(16).

1) Полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$ находится с помощью вычисления базиса Грёбнера для системы полиномов (6) (см. лемму 2) с возможной заменой набора переменных $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ набором $\hat{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ и полинома $\lambda = \lambda(\Lambda)$ полиномом $\hat{\lambda}(\hat{\Lambda}) = \chi(\lambda_0)\lambda(\Lambda)$ согласно лемме 3.

Чтобы не усложнять обозначения, далее считаем, что $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ и что полином $\lambda = \lambda(\Lambda)$ удовлетворяет условиям (14)–(16). Полиномы $\psi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, можно найти (см. (13)) методом неопределённых коэффициентов.

2) Полином $d_0(p) = d_1(p)\widetilde{d}_0(p)$ (см. п. 1), где $\widetilde{d}_0(p)$ также находится с помощью вычисления базиса Грёбнера для системы полиномов (6). Полином $d_1(p)$, если $\deg d_1(p) \geqslant 1$, выбираем таким, чтобы $\widetilde{\lambda}(p) \neq 0$ на его корнях p. Таким образом, неравенства (14)–(16) считаем выполненными для всех $p \in P_0$. Полиномы $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n}$; $\bar{\varphi}_j(\Lambda)$, $j = \overline{0, r-1}$, связанные с полиномом $d_0(p)$ равенством (8), можно найти или как указано в [13, следствие 1], или методом неопределённых коэффициентов. Шаги 1 и 2 подробно описаны в п. 2.

Согласно 2) система уравнений

$$\widetilde{\lambda}(p) = 0, \quad d_0(p) = 0$$

несовместна. Другими словами, полиномы λ и $d_0(a_2(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – взаимно просты, что существенно для построения регулятора (17), а именно, – для построения векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$, $f'(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda),\ f_2(p, \lambda))$.

3) Выбор полинома $d(p)$ и полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Согласно п. 1 получаем разложение (7) и полином $d_0(p)$, удовлетворяющий равенству (8). Характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы (18) возьмём в виде $d(p) = d_2(p)d_0(p)$, где $d_2(p)$ – полином с действительными коэффициентами. Для приведения замкнутой системы (18) к нормальной форме понадобится неравенство $N = \deg d(p) \geqslant 2n + r - 1$, которое всегда можно обеспечить за счёт степени полинома $d_2(p)$.

Замечание 4. При выборе полинома $d_2(p)$ также учитываем следующее требование: различным корням p_i полинома $d_2(p)$ должны соответствовать разные значения $\widetilde{\lambda}(p_i)$.

Пусть характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1} (p - p_i)^{r_i}, \quad p_i \in \widetilde{P}, \tag{28}$$

где $\widetilde{P} = \{p_i \in \mathbb{C}\colon\ i = \overline{1, s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно сопряжённые корни с алгебраическими кратностями r_i. Обозначим $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\lambda}(p_i) : p_i \in \widetilde{P},\ i = \overline{1, s_1}\}$.

Для обеспечения условия б) теоремы 1 необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (28)) являлись нулями функций $a_1(\widetilde{\lambda}(p))$, $a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p$ не меньшей кратности. Поэтому возьмём [4]

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda - \widetilde{\lambda}(p_i))^{r_i}, \quad \widetilde{\lambda}(p_i) \in \widetilde{\Lambda}. \tag{29}$$

Чтобы функция $(a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p)/d(p)$ была целой необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i \in \widetilde{P}$ числитель дроби и его производные по переменной p обращались в нуль, т.е. чтобы

$$\left(a_2(\widetilde{\lambda}(p)) - p\right)^{(k)}\Big|_{p=p_i} = 0, \quad i = \overline{1, s_1}, \quad k = \overline{0, r_i - 1}.$$

Из этих равенств находим значения для $a_2^{(k)}(\widetilde{\lambda}(p_i))$, $i = \overline{1, s_1}$, $k = \overline{0, r_i - 1}$:

$$a_2(\widetilde{\lambda}(p_i)) = p_i, \quad a_2^{(1)}(\widetilde{\lambda}(p_i)) = 1/\widetilde{\lambda}^{(1)}(p_i), \quad a_2^{(2)}(\widetilde{\lambda}(p_i)) = -\widetilde{\lambda}^{(2)}(p_i)/(\widetilde{\lambda}^{(1)}(p_i))^3, \quad \ldots,$$

$$p_i \in \widetilde{P}, \quad i = \overline{1, s_1}. \tag{30}$$

Система значений (30) полинома $a_2(\widetilde{\lambda}_i)$, $\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\lambda}(p_i)$, $p_i \in \widetilde{P}$, корректна, поскольку, согласно лемме 3, полином $\widetilde{\lambda}(p) = \lambda(e^{-ph_1}, \ldots, e^{-ph_\mu})$ имеет разные значения для различных корней p_i полинома $d_0(p)$ и $\widetilde{\lambda}^{(1)}(p_i) \neq 0$, $i = \overline{1, s_1}$.

Напомним, что $G(p,\lambda) = (\lambda, d_0(p))'$. Потребуем, чтобы одновременно с равенствами (30) выполнялось соотношение $G(a_2(\lambda),\lambda) \neq 0$, т.е. соотношение

$$|\lambda| + |d_0(a_2(\lambda))| \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{31}$$

которое очевидно равносильно тому, что $a_2(0) \notin P_0$. Это соотношение понадобится при построении векторного полинома $q'(\lambda)$.

Если для интерполяционного полинома $a_2(\lambda)$, построенного согласно (30), при $\lambda = 0$ неравенство (31) не выполняется, то к интерполяционным условиям (30) добавим равенство

$$a_2(0) = p_0 \quad (p_0 \in \mathbb{R} \text{ такое, что } p_0 \notin P_0). \tag{32}$$

Напомним, что P_0 – множество различных корней полинома $d_0(p)$. Полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (30), (32), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [17, с. 104].

4) Вычисление полинома $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$. Чтобы функция $k(p,\lambda)$ была полиномом должно, согласно теореме Безу, выполняться тождество

$$a_1(\lambda)q'(\lambda)G(a_2(\lambda),\lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{33}$$

Укажем векторный полином $q'(\lambda)$, обеспечивающий выполнение этого тождества. Полином $d_0(a_2(\lambda))$ представим в виде $d_0(a_2(\lambda)) = \lambda\delta(\lambda) + \delta_0$, где $\delta(\lambda)$ – подходящий полином, δ_0 – число, отличное от нуля в силу условия (31). Векторный полином $\widetilde{q}'(\lambda) = (-\delta(\lambda)/\delta_0, 1/\delta_0)$ даёт тождество

$$\widetilde{q}'(\lambda)G(a_2(\lambda),\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно [16] полином $d(a_2(\lambda))$ делится на полином $a_1(\lambda)$, а значит, рациональная функция $d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)$ является полиномом. Таким образом, при векторном полиноме

$$q'(\lambda) = -\widetilde{q}'(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) \tag{34}$$

тождество (33) имеет место.

5) Нахождение векторного полинома $f'(p,\lambda)$. Полином $k(p,\lambda)$ запишем следующим образом:

$$k(p,\lambda) = ((d(p) - d(p)\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda)) + (d(p)\widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda) + a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda)))/(a_2(\lambda) - p).$$

Заменяя $d(p)$ в первой скобке на $d_2(p)d_0(p) = [0, d_2(p)]G(p,\lambda)$ и во второй скобке $q'(\lambda)$ согласно (34), получаем

$$k(p,\lambda) = \left(\frac{1 - \widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}[0, d_2(p)] + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\widetilde{q}'(\lambda)\right)G(p,\lambda). \tag{35}$$

Здесь в силу теоремы Безу $(1 - \widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda))/(a_2(\lambda) - p)$ и $(d(p) - d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda) - p)$ – полиномы.

Взяв полином

$$f'(p,\lambda) = \frac{1 - \widetilde{q}'(\lambda)G(p,\lambda)}{a_2(\lambda) - p}[0, d_2(p)] + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\widetilde{q}'(\lambda) + [0,1]p^s,$$

вследствие (35) приходим к равенству (20), т.е. выполнено условие б) теоремы 1.

Замечание 5. Полиномы $q'(\lambda)$ и $f'(p,\lambda)$, существование которых обосновано в шагах 4), 5), можно находить методом неопределённых коэффициентов как решение полиномиального уравнения

$$(a_1(\lambda)q'(\lambda)G(p,\lambda) + d(p)) - (a_2(\lambda) - p)(f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda) - p^s)G(p,\lambda) = 0. \tag{36}$$

Итак, все условия теорем 1 и 2 реализованы, следовательно, регулятор (17) построен. Регулятор (27) получается элементарными преобразованиями характеристической матрицы (18) замкнутой системы (1), (17).

Замечание 6. Если исходная система (1), где последняя строка матриц A_i $(i=\overline{0,m})$ не обязательно нулевая, имеет конечный спектр, т.е. $w(p)=|W(p)|$ – полином, то равенство (8) реализовано. В таком случае полагаем $r=1$, $d_0(p)=w(p)$ и регулятор финитной стабилизации строим в виде

$$u(t)=f_1(p,\lambda)x_{n+1}(t)+q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$
$$x_{n+1}^{(s)}(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i(\Lambda)x_i(t)+f_2(p,\lambda)x_{n+1}(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$
$$\dot{x}_{n+2}(t)=x_{n+1}(t)+a_2(\lambda)x_{n+2}(t),\quad t>0. \tag{37}$$

Здесь, как и раньше, $a_i(\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, $q'(\lambda)=(q_1(\lambda),q_2(\lambda))$; $\psi_i(\Lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, – некоторые полиномы; $f_1(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{r_1}\hat{f}_i(\lambda)p^{r_1-i}$, $\hat{f}_i(\lambda)$, $i=\overline{0,r_1}$, $f_2(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{s}\bar{f}_i(\lambda)p^{s-i}$, $\bar{f}_i(\lambda)$, $i=\overline{0,s}$, – некоторые полиномы, $r_1\geqslant 0$, $s\geqslant 1$.

При $N\geqslant 2n$ замкнутая система (1), (37) приводится к нормальному виду. Для этого при $s\geqslant 2$ в полученной характеристической матрице после $(n+1)$-й строки и $(n+1)$-го столбца аналогично (26) добавим $s-1$ строку и $s-1$ столбец, что равносильно введению $s-1$ вспомогательных переменных. Если $r_1>0$, то, используя строки с номерами с $n+1$ по $n+s$, посредством элементарных преобразований замкнутую систему (1), (37) приведём к нормальному виду.

5. Примеры. Предложенную процедуру построения регулятора финитной стабилизации вида (27) проиллюстрируем примером.

Пример 4. Пусть объект управления описывается системой (1), (9). В примере 1, введя новые запаздывания $h_1=\ln 2$, $h_2=\ln 3-\ln 2$, мы привели данную систему к системе с конечным спектром:

$$\begin{vmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}=p(p+1),\quad \lambda_i=e^{-ph_i},\quad i=\overline{1,2}.$$

При любых запаздываниях h_1, h_2 данная система полностью управляема, так как, очевидно, выполняется условие (4): $\lambda_1=e^{-ph_1}\neq 0$ для всех $p\in\mathbb{C}$. Значит, регулятор финитной стабилизации существует.

Базис Грёбнера для системы полиномов $M(p,\Lambda)$, $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, имеет вид $\{p,\lambda_1\}$. Полином $\lambda=\lambda(\Lambda)=\lambda_1$ (см. (13)) удовлетворяет условиям (14)–(16) на множестве $p\in P_0=\{0,-1\}$. Поэтому, согласно (13), полагаем $(\psi_1(\lambda),\ \psi_2(\lambda))=(1,0)$. Итак,

$$\lambda=\lambda_1,\quad d_0(p)=p^2+p.$$

В данном случае $r=1$, поэтому порядок замкнутой системы равен $N=2n+r-1=4$, $s=N-(n+r)=1$. Следовательно, регулятор финитной стабилизации ищем в виде (см. (17))

$$u(t)=-(\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2)x_1(t)-(1+\lambda_1\lambda_2)x_2(t)+f_1(p,\lambda)x_3(t)+q_1(\lambda)a_1(\lambda)x_4(t),$$
$$\dot{x}_3=x_1(t)+f_2(p,\lambda)x_3(t)+q_2(\lambda)a_1(\lambda)x_4(t),$$
$$\dot{x}_4(t)=x_3(t)+a_2(\lambda)x_4(t),\quad t>t_0\geqslant 0. \tag{38}$$

Замкнутая система имеет следующую характеристическую матрицу:

$$pE_4-\bar{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 & -f_1(p,\lambda) & -q_1(\lambda)a_1(\lambda) \\ -1 & 0 & p-f_2(p,\lambda) & -q_2(\lambda)a_1(\lambda) \\ 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Полиномы $a_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, $f_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, получим, выполнив рекомендации п. 4 (шаги 3)–5)).

Полином $d(p)$, учитывая замечание 4, возьмём в виде $d(p) = p(p+1)(p+2)(p+3)$. Следовательно, $\widetilde{P} = \{-3,-2,-1,0\}$, $\widetilde{\Lambda} = \{8,4,2,1\}$.

Согласно (29), (30) строим полиномы

$$a_1(\lambda) = (\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1), \quad a_2(\lambda) = (1-\lambda)(248-46\lambda+3\lambda^2)/168$$

такие, чтобы функции $a_1(\widetilde{\lambda}(p))/d(p)$, $(a_2(\widetilde{\lambda}(p))-p)/d(p)$ $(\widetilde{\lambda}(p) = e^{-ph_1})$ были целыми. Проверяем условие (31), оно выполняется: $a_2(0) \notin P_0$.

Методом неопределённых коэффициентов, как решение уравнения (36), находим компоненты векторных полиномов $q'(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ и $f'(p,\lambda) = (f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda))$, существование которых обосновано в п. 4 (там же приведены и необходимые формулы):

$$q_1(\lambda) = \frac{(17\lambda-41)(248-46\lambda+3\lambda^2)(208-43\lambda+3\lambda^2)}{2370816}, \quad q_2(\lambda) = \frac{-6862+159\lambda-9\lambda^2}{28224},$$

$$f_1(p,\lambda) = \frac{(\lambda-8)(\lambda-4)(17\lambda-41)(416+168p-294\lambda+49\lambda^2-3\lambda^3)}{14112},$$

$$f_2(p,\lambda) = \frac{1}{168}(-1088+294\lambda-49\lambda^2+3\lambda^3).$$

Все параметры замкнутой системы (39) указаны, т.е. регулятор финитной стабилизации вида (38) построен. Приведём замкнутую систему (39) к нормальной форме.

Умножая третью строку характеристической матрицы на $(\lambda-8)(\lambda-4)(17\lambda-41)/84$ и прибавляя ко второй строке, получаем

$$\left\{\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2-\frac{(\lambda-8)(\lambda-4)(17\lambda-41)}{84}, p+1+\lambda_1\lambda_2, \frac{(\lambda-8)(\lambda-4)(17\lambda-41)}{21},\right.$$

$$\left.\frac{(\lambda-8)(\lambda-4)(17\lambda-41)(\lambda-2)(\lambda-1)(500-200\lambda+17\lambda^2)}{7056}\right\}, \quad \lambda = \lambda_1.$$

Окончательно система (1), (9), замкнутая регулятором финитной стабилизации, имеет вид $(\lambda_i = e^{-ph_i},\ i = \overline{1,2},\ h_1 = \ln 2,\ h_2 = \ln 3 - \ln 2)$

$$pE_4 - \hat{A}(\Lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\varphi_1(\Lambda)-\psi_1(\Lambda)f(\lambda_1) & p-\bar{\varphi}_1(\Lambda) & -\hat{f}_1(\lambda_1)-\bar{f}_1(\lambda_1)\hat{f}_0(\lambda_1) & -(q_1(\lambda_1)+\hat{f}_0(\lambda_1)q_2(\lambda_1))a_1(\lambda_1) \\ -1 & 0 & p-f_2(p,\lambda_1) & -q_2(\lambda_1)a_1(\lambda_1) \\ 0 & 0 & -1 & p-a_2(\lambda_1) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

В подробной записи вторая строка приведена выше.

Так как функции $a_1(e^{-ph_1})/d(p)$ и $(a_2(e^{-ph_1})-p)/d(p)$ – целые, то первые три строки обратной матрицы $(pE_4-\hat{A}(e^{-ph_1},e^{-ph_2}))^{-1}$ образованы целыми функциями экспоненциального типа. Запишем старшие степени переменной e^{-p} в первых трёх строках матрицы, присоединённой к характеристической матрице $pE_4-\hat{A}(e^{-ph_1},e^{-ph_2})$ замкнутой системы (40):

$$(11\ln 2, 10\ln 2+\ln 3, 10\ln 2), \quad h_1 = \ln 2, \quad h_2 = \ln 3.$$

Отсюда заключаем, что первые две строки обратной матрицы $(pE_4-\hat{A}(e^{-ph_1},e^{-ph_2}))^{-1}$ образованы целыми функциями экспоненциального типа, который не выше $10\ln 2+\ln 3$. Согласно теореме Винера–Пэли в замкнутой системе (39) переменные $x_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, обратятся в нуль, по крайней мере, начиная с момента $t_0+10\ln 2+\ln 3$ $(u(t) = 0,\ t \leqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0$ – момент включения регулятора), независимо от начальных кусочно-непрерывных функций системы (1), (9)

и построенного регулятора. Переменная $x_3(t)$ также обратится в нуль, начиная с момента $t_0 + 10\ln 2$.

Таким образом, построенный регулятор обеспечивает конечный спектр (с характеристическим полиномом $d(p) = p(p+1)(p+2)(p+3)$) и точечную вырожденность замкнутой системы (40) в направлениях, выделяющих переменные $x_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, и тем самым – финитную стабилизацию (см. тождества (3), где $t_1 = t_0 + 10\ln 2 + \ln 3$) системы (1), (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
2. *Марченко В.М.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных систем с запаздывающим аргументом // Проблемы оптимального управления. Минск, 1981. С. 124–147.
3. *Фомичев В.В.* Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1516–1521.
4. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
5. *Метельский А.В.* Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. №9. С. 1240–1255.
6. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403.
7. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
8. *Булатов В.И.* Спектральная приводимость систем с запаздываниями // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80.
9. *Pekar L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results // IEEE Access. 2018. № 6. P. 35457–35491.
10. *Zaitsev V., Kim I.* Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. № 9. P. 2158.
11. *Kappel F.* On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
12. *Метельский А.В.* Проблема точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 2 (296). С. 103–141.
13. *Метельский А.В.* Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 396–408.
14. *Метельский А.В.* Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1119–1131.
15. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
16. *Метельский А.В.* Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.

Белорусский национальный технический университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.
После доработки 26.10.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.