ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 120–138

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

© 2022 г. П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань

Для многомерного уравнения Клейна–Гордона как с постоянными, так и с переменными коэффициентами рассматриваются и изучаются на стандартных шаблонах устойчивые компактные разностные схемы 4+2 и 4+4 порядков аппроксимации. Полученные результаты обобщаются на начально-краевые задачи для квазилинейных уравнений гиперболического типа второго порядка. Доказывается, что компактные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации приводятся к трёхслойным схемам с постоянными или переменными весами, что позволяет привлечь для их анализа разработанную ранее теорию устойчивости операторно-разностных схем с операторами, действующими в конечномерных евклидовых пространствах. Получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных аналогах пространств Соболева. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0374064122010125

Введение. Под *компактными* разностными схемами мы понимаем разностные схемы повышенных порядков аппроксимации и/или точности, записывающиеся на стандартных для данного уравнения шаблонах. Основополагающей работой в этом направлении для параболических уравнений с переменными коэффициентами является работа А.А. Самарского [1], в которой построены и изучены схемы с $4+2$ порядком аппроксимации, т.е. схемы с погрешностью аппроксимации $\Psi = O(|h|^4 + \tau^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$, а p – размерность задачи.

Экономичные компактные разностные схемы $4+2$ и $4+4$ порядков аппроксимации достаточно полно исследованы в работах В.Н. Валиулина и В.И. Паасонена [2, 3] ещё 50 лет назад. При этом только в этих работах правильно решена проблема аппроксимации с соответствующим порядком второго начального условия. Например, в работе [4], чтобы избежать возникающих осложнений, предполагалась однородность второго начального условия.

В настоящее время резко возрос интерес к построению компактных разностных схем для гиперболических уравнений второго порядка. Так, в работах [5, 6] получены первые результаты для квазилинейных уравнений, а в [7–10] построены компактные схемы для многомерного волнового уравнения с несамосопряжённым эллиптическим оператором как на равномерных, так и на неравномерных сетках. Отметим также работы [11–13], посвящённые построению точных разностных схем. Компактные разностные схемы на неравномерных сетках со странными условиями устойчивости рассматривались в работах [14–16] более 20 лет назад.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию компактных разностных схем $4+2$ и $4+4$ порядков точности для многомерного уравнения Клейна–Гордона. Работа организована следующим образом.

В п. 1 приводятся необходимые сведения из теории устойчивости трёхслойных операторно-разностных схем. Вводится важное понятие аддитивной трёхслойной схемы с весами, которое затем будет использовано при приведении к канонической форме компактных разностных схем. Даются достаточные условия её устойчивости.

В п. 2 показывается, что компактные разностные схемы многих типов могут быть записаны в виде обычных схем с постоянными и/или переменными весами, что позволяет использовать для их анализа разработанную ранее теорию устойчивости операторно-разностных схем [14, 17].

В пп. 3, 4 исследуются компактные разностные схемы $4+2$ и $4+4$ порядков аппроксимации. Получены априорные оценки устойчивости и точности рассматриваемых разностных схем. Отмечается, что при повышении аппроксимации до 4-го порядка по всем переменным устойчивость может быть доказана лишь при соотношениях типа Куранта на шаги сетки.

В пп. 5, 6 полученные результаты обобщаются на квазилинейные уравнения и приводятся результаты тестовых расчётов, подтверждающих повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах.

1. Достаточные условия устойчивости трёхслойных операторно-разностных схем. При исследовании устойчивости компактных разностных схем, аппроксимирующих многомерное уравнение Клейна–Гордона, естественно воспользоваться общей теорией Самарского [17, гл. VI, § 3] операторно-разностных схем.

Пусть заданы вещественное конечномерное евклидово пространство $H = H_h$, скалярное произведение и норму в котором обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно, а также сетка по времени

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N_0}, \quad \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \bigcup T. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, в пространстве H задан самосопряжённый положительно определённый оператор $A = A_h$. Через H_A обозначим евклидово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабжённое скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A = \sqrt{(y, y)_A}$. Далее используем следующие безындексные обозначения теории разностных схем [17, гл. VI, § 3]:

$$y = y^n = y(t_n), \quad \hat{y} = y^{n+1} = y(t_{n+1}), \quad \check{y} = y^{n-1} = y(t_{n-1}), \quad y(t_n) \in H,$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\overline{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = \frac{y_t + y_{\overline{t}}}{2}, \quad y_{\overline{t}t} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \frac{y_t - y_{\overline{t}}}{\tau}.$$

Будем рассматривать трёхслойные операторно-разностные схемы вида

$$Dy_{\overline{t}t} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \tag{2}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \overline{y}_0, \tag{3}$$

с постоянными операторами $A, B, D : H \to H$, где $\varphi = \varphi^n = \varphi(t_n) \in H$ – задано, $y(t_n)$ – искомая функция. Имеют место следующие результаты.

Лемма 1 [17, с. 358]. *Пусть постоянные операторы в уравнении (2) удовлетворяют условиям* $A^* = A > 0$, $D = D^* > 0$, $B \geqslant 0$ *и*

$$D \geqslant \frac{\tau^2}{4} A. \tag{4}$$

Тогда трёхслойная разностная схема (2), (3) устойчива по начальным данным и при любом $t_n \in \omega_\tau$ *справедливо энергетическое неравенство*

$$E(t_n) \leqslant E(0), \quad t_n \in \omega_\tau,$$

где

$$E(t_n) = E_{h\tau}(t_n) = (\|y_t(t_n)\|^2_{D-(\tau^2/4)A} + \|y^{(0.5)}\|^2_A)^{1/2}, \quad y^{(0.5)} = 0.5(y^{n+1} + y^n).$$

Лемма 2 [14, с. 261]. *Если выполнены условия*

$$A^* = A > 0, \quad D^* = D \geqslant \frac{(1+\varepsilon)\tau^2}{4} A, \quad B \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

то для решения разностной схемы (2), (3) имеет место априорная оценка

$$\|y^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (\|\varphi^k\|_{A^{-1}} + \|\varphi^k_t\|_{A^{-1}})). \tag{6}$$

Лемма 3 [14, с. 138]. *Пусть справедливо неравенство* $D \geqslant \delta_0 E$, $\delta_0 > 0$, *и выполнены условия (5). Тогда для решения разностной схемы (2), (3) имеет место априорная оценка*

$$\|y^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\Big(\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \frac{1}{\delta_0}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi^k\|\Big).$$

В классе трёхслойных операторно-разностных схем (2), (3) выделим важный для приложений класс *схем с весами*

$$y_{\overline{t}t} + Ay^{(\sigma,\sigma)} = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \overline{y}_0, \quad \sigma = \mathrm{const} \geqslant 0, \tag{7}$$

здесь и далее принято обозначение

$$y^{(\sigma,\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}.$$

Применяя лемму 1, получаем достаточное условие устойчивости по начальным данным

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2\|A\|}.$$

В работе будем рассматривать новый класс схем с весами, который вводит следующее

Определение. Если в схеме с весами (7) оператор A представи́м в виде

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha,$$

то такую операторно-разностную схему, т.е. схему

$$y_{\overline{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \overline{y}_0, \tag{8}$$

назовём *аддитивной схемой с весами.*

Теорема 1. *Пусть постоянные операторы* A_α *являются положительными и самосопряжёнными, т.е.* $A_\alpha = A_\alpha^* > 0$, $\alpha = \overline{1,p}$. *Тогда при выполнении условий*

$$\sigma_\alpha \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\tau^2\|A\|}, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{9}$$

для решения разностной схемы (8) справедлива априорная оценка (6).

Доказательство. Записывая разностную схему (8) в каноническом виде (2), находим, что для неё

$$D = I + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\sigma_\alpha A_\alpha, \quad B = 0.$$

В частности, $D = D^*$. Так как для положительного самосопряжённого и ограниченного оператора имеет место соотношение

$$I \geqslant \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{\|A\|}\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha,$$

то второе неравенство в (5)

$$D - \frac{(1+\varepsilon)\tau^2}{4}A = I + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\sigma_\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4}\Big)A_\alpha \geqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\Big[\frac{1}{\|A\|} + \tau^2\Big(\sigma_\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4}\Big)\Big]A_\alpha \geqslant 0$$

выполнено в силу предположения (9). Теорема доказана.

2. Компактные схемы с весами для одномерного волнового уравнения. В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ для однородного одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{10}$$

рассмотрим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x), \quad 0 < x < l, \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{12}$$

На равномерной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \overline{Q}_T\}$, где

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \ \ i = \overline{0, N}, \ \ h = l/N\} = \omega_h \bigcup \gamma_h,$$

а сетка $\overline{\omega}_\tau$ определена соотношением (1), дифференциальную задачу заменим разностной:

$$y_{\bar{t}t} + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = 0, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{13}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{14}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \tag{15}$$

здесь и далее принято обозначение

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}.$$

В равенстве (13) сеточный оператор A определяется в соответствии с формулами

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_0 = y_N = 0.$$

Свойства оператора A хорошо изучены [11]. В частности, он постоянный, положительный и самосопряжённый, $A = A^* > 0$, и

$$\|A\| = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}.$$

Говоря об аппроксимации начально-краевой задачи, необходимо помнить об аппроксимации с соответствующим порядком второго начального условия в (11). Определим основные классы используемых в вычислительной практике разностных схем и укажем некоторые их свойства.

2.1. Схема $2+2$. Наиболее часто используется схема второго порядка точности по обеим переменным

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}, \quad u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2} u_0''(x), \quad \Psi = O(h^2 + \tau^2), \tag{16}$$

которая является абсолютно устойчивой при любом $\sigma \geqslant 1/4$. Приведённая схема легко обобщается на многомерные уравнения с переменными коэффициентами.

2.2. Схема $4+2$. При заданных параметрах (16) необходимо положить

$$\sigma = \overline{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}, \quad \overline{\sigma} \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{6\tau^2}, \quad \Psi = O(h^4 + \tau^2).$$

Эта разностная схема также абсолютно устойчива при произвольном $\overline{\sigma} \geqslant 1/4$.

2.3. Схема $4+4$. Для её задания необходимо положить

$$\sigma = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{h^2}{\tau^2}\right), \quad u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2} u_0''(x) + \frac{\tau^2}{6}\nu_0''(x) + \frac{\tau^3}{24} u_0^{(4)}(x), \quad \Psi = O(h^4 + \tau^4).$$

Как правило, при повышении порядка аппроксимации редко удаётся сохранить свойство безусловной устойчивости. Для выполнения достаточного условия (4) устойчивости по начальным данным необходимо потребовать выполнения критерия Куранта $\tau \leqslant h$.

Схемы четвёртого порядка, по-видимому, впервые рассматривались в работах [2–4].

2.4. Точная разностная схема. Описание этой схемы для неоднородного волнового уравнения с неоднородными краевыми условиями второго и третьего рода можно найти в монографии [12, с. 67]. Схема с весами (13)–(15) является точной $(\Psi = 0)$ и устойчивой, если

$$\sigma = 0, \quad \tau = h, \quad u_1(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} \nu_0(\xi)\, d\xi + \frac{\tau}{2} u_{0\overline{x}x}, \quad x \in \omega_h.$$

К сожалению, она не обобщается на многомерные задачи. В [12, с. 80; 13] приводится её обобщение на случай квазилинейного волнового уравнения.

Отметим ещё несколько интересных примеров компактных разностных схем, относящихся уже к классу схем с переменными весовыми множителями [14].

2.5. Трёхточечная схема $2+2$ на произвольной неравномерной сетке по пространству. Пусть задана произвольная неравномерная сетка по пространству

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \ \ i = \overline{1,N}, \ \ x_0 = 0, \ \ x_N = l\} = \hat{\omega}_h \bigcup \{x_0 = 0, \ \ x_N = l\}.$$

Сеточный оператор A в этом случае определяется следующим образом:

$$(Ay)_i = -y_{\overline{x}\hat{x},i} = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_0 = y_N = 0,$$

где $\hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$. Оператор A является [18, с. 39] положительным и самосопряжённым, $A = A^* > 0$, и

$$\|A\| < 4\underline{h}^{-2}, \quad \underline{h} = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i.$$

Хорошо известно, что при переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной аппроксимации обычно понижается. Тем не менее существует такая нерасчётная точка $\overline{x}_i = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3$, относительной которой сохраняется второй порядок локальной аппроксимации второй производной.

Соответствующая разностная схема имеет вид

$$y_{\overline{t}t} = (y_{\overline{x}}^{(\sigma_1,\sigma_1)})_{\hat{x}},$$

$$\sigma_1 = \sigma_{1i} = \sigma - \frac{h_i^2}{6\tau^2}, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{4} + \frac{h_i^2}{6\tau^2}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2} u_0''(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad \Psi(\overline{x}_i, t_n) = O(\hbar_i^2 + \tau^2).$$

Так как вес σ обычно выбирается в пределах от 0 до 1, то при $\sigma = 1$ мы получаем странное условие устойчивости схемы по начальным данным

$$\tau \geqslant \frac{\sqrt{2} h_i}{3},$$

полученное в работе [14] более 20 лет назад.

2.6. Трёхслойная и трёхточечная схема $2+2$ на произвольной неравномерной сетке по времени. На сетке $\hat{\overline{\omega}} = \overline{\omega}_h \times \hat{\overline{\omega}}_\tau$, $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \ i = \overline{0,N}, \ h = l/N\} = \omega_h \bigcup \gamma_h$, $\hat{\overline{\omega}}_\tau = \{t_n = t_{n-1} + \tau_n, \ t_0 = 0, \ t_{N_0} = T\} = \hat{\omega}_\tau \bigcup \{T\}$ для численного решения задачи (10)–(12) будем использовать следующую трёхслойную разностную схему с переменными по времени весами:

$$y_{\overline{t}\hat{t}} = y_{\overline{x}x}^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \quad (x,t) \in \omega_h \times \hat{\omega}_\tau,$$

с начальными и граничными условиями (14), (15), где

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau_+}, \quad y_{\overline{t}\hat{t}} = \frac{y_t - y_{\overline{t}}}{\tau^*}, \quad \tau^* = \frac{\tau_+ + \tau}{2},$$

$$\tau = \tau_n, \quad \tau_+ = \tau_{n+1}, \quad u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau_1}{2} u_0''(x), \quad x \in \omega_h.$$

В работах [15, 16] приводятся условия

$$\sigma_1\tau_{n+1} - \sigma_2\tau_n = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{3}$$

для второго порядка $\Psi = O(h^2 + \tau^{*2})$ локальной аппроксимации этой схемы.

Достаточные условия устойчивости по начальным данным $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, $\sigma_1+\sigma_2 = 0.5$ и условия второго порядка локальной аппроксимации будут выполнены, если положить

$$\sigma_1 = \frac{2\tau_{n+1} + \tau_n}{6(\tau_{n+1} + \tau_n)}, \quad \sigma_2 = \frac{\tau_{n+1} + 2\tau_n}{6(\tau_{n+1} + \tau_n)}, \quad \tau_{n+1} \geqslant \tau_n.$$

В работе [16] строится и исследуется компактная консервативная трёхслойная схема второго порядка $\Psi = O(\hbar_i^2 + \tau^{*2})$ локальной аппроксимации на произвольных неравномерных сетках по пространству и времени.

2.7. Компактная схема $4 + 2$ для волнового уравнения с переменными коэффициентами. В прямоугольнике $\overline{Q}_T$ рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < k_1 \leqslant k(x,t) \leqslant k_2. \tag{17}$$

Для аппроксимации дифференциального уравнения (17) будем использовать схему с весами (8), в которой

$$Ay = -(a(x,t_n)y_{\overline{x}})_x, \quad a = 6[p(x-h,t) + 4p(x-h/2,t) + p(x,t)]^{-1},$$

$$p(x,t) = \frac{1}{k(x,t)}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau^2}p.$$

Данная схема с переменными весами имеет $4+2$ порядок аппроксимации, т.е. $\Psi = O(h^4+\tau^2)$, и устойчива при $\tau \geqslant \max\{1, \sqrt{2/(3k_1)}h\}$ [6, 19].

3. Разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами. Пусть $\overline{G} = \{x = (x_1,\ldots,x_p),\ 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = \overline{1,p}\}$ является p-мерным прямоугольным параллелепипедом, Γ – его граница, так что $\overline{G} = G\bigcup\Gamma$. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G}\times[0 \leqslant t \leqslant T]$ для многомерного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u - mu + f(x,t), \quad m > 0, \quad (x,t) \in Q_T = G\times[0 < t \leqslant T], \tag{18}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x), \quad x \in G, \tag{19}$$

$$u(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{20}$$

где $L_\alpha u = \partial^2 u/\partial x_\alpha^2$, $\alpha = \overline{1,p}$.

Здесь и далее относительно решения дифференциальной задачи будем предполагать, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в $\overline{Q}_T$ производными, необходимыми для справедливости проводимых рассуждений.

В параллелепипеде $\overline{G}$ построим разностную сетку $\overline{\omega}_h = \{x_i = (i_1h_1,\ldots,i_ph_p),\ i_\alpha = \overline{0,N_\alpha}$, $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}\} = \omega_h\bigcup\gamma_h$ и равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau$, определённую соотношением (1). Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна по каждой из пространственных переменных. Здесь $\gamma_h = \{x_i \in \Gamma\}$ –

множество узлов сетки $\overline{\omega}_h$, которые принадлежат границе Γ. На построенной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ напишем для исходной задачи (18)–(20) следующую разностную схему:

$$y_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - my^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} - m\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha y^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} + \varphi,$$

$$(x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{21}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{22}$$

$$y(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{23}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \sigma_\alpha = \sigma - \frac{h_\alpha^2}{12\tau^2}, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad \varphi = f^*,$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u(x,0) - mu(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h;$$

здесь и в дальнейшем для функции v через v^* обозначаем функцию, определяемую равенством

$$v^* := v + \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha v.$$

3.1. Погрешность аппроксимации. Покажем, что разностная схема (21)–(23) аппроксимирует исходную задачу (18)–(20) с четвёртым порядком относительно пространственной переменной и со вторым относительно временно́й. Так как

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mu - f - \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{p} L_\beta u\right) + O(|h|^4),$$

то разностное уравнение (21) доставляет невязку

$$\Psi = -u_{\bar{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - mu^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} - m\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha u^{(\sigma_{p+1},\sigma_{p+1})} + \varphi,$$

которую запишем в виде

$$\Psi = -\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u + O(|h|^4 + \tau^2).$$

Очевидны равенства (см. [1, с. 817])

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2+h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha>\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2+h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u.$$

Отсюда получаем, что

$$2\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}L_\alpha L_\beta u + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}L_\alpha L_\beta u,$$

и, следовательно,

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4 + \tau^2), \quad M_1 = \text{const} > 0. \tag{24}$$

Для погрешности аппроксимации $\overset{\circ}{\Psi} = u_1 - u_t^0$ второго начального условия (22) имеет место оценка

$$\|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2\tau^2, \quad M_2 = \text{const} > 0. \tag{25}$$

3.2. Устойчивость. Для упрощения дальнейших исследований ограничимся рассмотрением двумерного случая $p = 2$. При получении априорных оценок устойчивости по начальным данным и правой части предполагают, как правило, однородность краевых условий [14, с. 237; 17, с. 310]. Однако, как мы подчёркивали в наших работах [5, 6], в этом нет необходимости. Действительно, возмущая в разностной схеме начальные условия и правую часть и вычитая из возмущённой задачи соответствующие уравнения (21)–(23), получаем для возмущения $\overline{y} = \tilde{y} - y$ задачу уже с однородными граничными условиями:

$$\overline{y}_{\overline{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha\overline{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\overline{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - m\overline{y}^{(\sigma_3,\sigma_3)} - m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha\overline{y}^{(\sigma_3,\sigma_3)} + \overline{\varphi},$$

$$(x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{26}$$

$$\overline{y}(x,0) = \overline{u}_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad \overline{y}_t(x,0) = \overline{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{27}$$

$$\overline{y}(x,t) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau. \tag{28}$$

Покажем, что разностная схема (26)–(28) может быть записана как аддитивная схема с весами. Пусть на равномерной сетке ω_h с постоянным шагом задана сеточная функция $v(x)$, $x \in \omega_h$. Введём для неё весовые множители:

$$v_{(\beta_1,\beta_2)} = \beta_1 v(x+h) + (1-\beta_1-\beta_2)v(x) + \beta_2 v(x-h), \tag{29}$$

что соответствует интерполяции этой функции по трём узлам $x-h$, x, $x+h$. Заметим, что при $\beta_1 = \beta_2 = 1/12$ из определения (29) следуют равенства

$$v_{(1/12,1/12)} = v + \frac{h^2}{12}v_{\overline{x}x} = \frac{1}{12}v(x-h) + \frac{5}{6}v(x) + \frac{1}{12}v(x-h),$$

где, как обычно, $v_{\overline{x}x} = (v(x+h) - 2v(x) + v(x-h))/h^2$.

Введём весовые множители по пространству:

$$\overline{A}_1\overline{y} = A_1\overline{y}_{(\beta_2,\beta_2)}, \quad \overline{A}_2\overline{y} = A_2\overline{y}_{(\beta_1,\beta_1)}, \quad \overline{A}_3\overline{y} = \frac{m}{2}(\overline{y}_{(\varkappa_1,\varkappa_1)} + \overline{y}_{(\varkappa_2,\varkappa_2)}). \tag{30}$$

Здесь $A_\alpha\overline{y} = -\overline{y}_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}$, $A_\alpha\overline{y}_{(\varkappa_\alpha,\varkappa_\alpha)} = \overline{y} + \varkappa_\alpha h_\alpha^2\overline{y}_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$,

$$\overline{y}_{(\beta_1,\beta_1)} = \beta_1\overline{y}(x_1+h,x_2) + (1-2\beta_1)\overline{y}(x_1,x_2) + \beta_1\overline{y}(x_1-h,x_2) = \overline{y} + \beta_1 h_1^2\overline{y}_{\overline{x}_1x_1},$$

$$\overline{y}_{(\beta_2,\beta_2)} = \beta_2\overline{y}(x_1,x_2-h) + (1-2\beta_2)\overline{y}(x_1,x_2) + \beta_2\overline{y}(x_1,x_2+h) = \overline{y} + \beta_2 h_2^2\overline{y}_{\overline{x}_2x_2}.$$

При $\beta_1 = \beta_2 = 1/12$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1/6$ из (30) вытекает, что

$$\overline{A}_1\overline{y} = -\overline{y}_{\overline{x}_1x_1} - \frac{h_2^2}{12}\overline{y}_{\overline{x}_1x_1\overline{x}_2x_2}, \quad \overline{A}_2\overline{y} = -\overline{y}_{\overline{x}_2x_2} - \frac{h_1^2}{12}\overline{y}_{\overline{x}_1x_1\overline{x}_2x_2}, \quad \overline{A}_3\overline{y} = m\left(\overline{y} + \frac{h_1^2}{12}\overline{y}_{\overline{x}_1x_1} + \frac{h_2^2}{12}\overline{y}_{\overline{x}_2x_2}\right)$$

и, следовательно, схему (26) можно записать в канонической форме (8):

$$\overline{y}_{\overline{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{3}\overline{A}_\alpha\overline{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} = \overline{\varphi}, \quad \overline{y}(0) = \overline{u}_0, \quad \overline{y}_t(0) = \overline{u}_1, \tag{31}$$

в которой $\sigma_\alpha = \sigma - h_\alpha^2/(12\tau^2)$, $\alpha = 1, 2$, $0 \leqslant \sigma_3 \leqslant 1$.

Так как имеют место неравенства

$$\|\overline{y}_{\overline{x}_1\overline{x}_2}]|^2 < \frac{4}{h_\alpha^2}\|\overline{y}_{\overline{x}_{3-\alpha}}]|^2, \quad \alpha = 1,2,$$

$$(\overline{A}_\alpha \overline{y}, \overline{y}) = \|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}]|^2 - \frac{h_{3-\alpha}^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_1\overline{x}_2}]|^2 > \frac{2}{3}\|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}]|^2, \quad \alpha = 1,2,$$

$$(\overline{A}_3 \overline{y}, \overline{y}) = m\|\overline{y}\|^2 - \frac{mh_1^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 - \frac{mh_2^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2 > \frac{m}{3}\|\overline{y}\|^2,$$

то самосопряжённые операторы $\overline{A}_\alpha$ положительны, т.е. $\overline{A}_\alpha = \overline{A}_\alpha^* > 0$, $\alpha = \overline{1,3}$.

Обозначим

$$\delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} + m, \quad D = I + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha \overline{A}_\alpha, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{3} \overline{A}_\alpha. \tag{32}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\sigma \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} + \frac{\delta|h|^2 - 12}{12\delta\tau^2}, \quad \sigma_3 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}. \tag{33}$$

Тогда разностная схема (31) устойчива и для её решения имеет место априорная оценка

$$\|\overline{y}^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}(\|\overline{y}(0)\|_A + \|\overline{y}_t(0)\|_D + \max_{0\leqslant k\leqslant n}(\|\overline{\varphi}^k\|_{A^{-1}} + \|\overline{\varphi}_t^k\|_{A^{-1}})),$$

справедливая для любого $n = \overline{0, N_0 - 1}$.

Доказательство. Для исследования устойчивости схемы (31) применим теорему 1. Заметим, что

$$(A\overline{y}, \overline{y}) = \left(1 - \frac{mh_1^2}{12}\right)\|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 + \left(1 - \frac{mh_2^2}{12}\right)\|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\|\overline{y}_{\overline{x}_1\overline{x}_2}]|^2 + m\|\overline{y}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 + \|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2 + m\|\overline{y}\|^2 < \left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} + m\right)\|\overline{y}\|^2.$$

Следовательно,

$$\|A\| \leqslant \delta = 4(h_1^{-2} + h_2^{-2}) + m.$$

Тогда условия (9) выполнены, если

$$\sigma_\alpha \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}, \quad \alpha = \overline{1,3},$$

т.е. если

$$\sigma \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2} + \frac{\max\{h_1^2, h_2^2\}}{12\tau^2}, \quad \sigma_3 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\delta\tau^2}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (33) имеет место требуемая оценка. Теорема доказана.

Замечание 1. Имеют место неравенства

$$\frac{2}{3}\|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}]|^2 < (\overline{A}_\alpha \overline{y}, \overline{y}) \leqslant \|\overline{y}_{\overline{x}_\alpha}\|^2 < \frac{4}{h_\alpha^2}\|y\|^2, \quad \alpha = 1,2, \quad \text{и} \quad \frac{m}{3}\|\overline{y}\|^2 < (\overline{A}_3 \overline{y}, \overline{y}).$$

Тогда

$$(D\overline{y},\overline{y}) = \|\overline{y}\|^2 + \sigma\tau^2(\overline{A}_1\overline{y},\overline{y}) + \sigma\tau^2(\overline{A}_2\overline{y},\overline{y}) + \sigma_3\tau^2(\overline{A}_3\overline{y},\overline{y}) - \frac{h_1^2}{12}(\overline{A}_1\overline{y},\overline{y}) - \frac{h_2^2}{12}(\overline{A}_2\overline{y},\overline{y}) >$$

$$> \left(\frac{1}{3} + \frac{m\sigma_3\tau^2}{3}\right)\|\overline{y}\|^2 + \frac{2\sigma\tau^2}{3}(\|\overline{y}_{\overline{x}_1}]|^2 + \|\overline{y}_{\overline{x}_2}]|^2) > \frac{1}{3}\|\overline{y}\|^2,$$

т.е. $D > \delta_0 I$, $\delta_0 = 1/3$. Поэтому в силу леммы 3 для решения разностной схемы (31) имеет место априорная оценка

$$\|\overline{y}^{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\|\overline{y}(0)\|_A + \|\overline{y}_t(0)\|_D + \frac{1}{\delta_0}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\overline{\varphi}^k\|\right), \tag{34}$$

справедливая для любого $n = \overline{0, N_0 - 1}$.

3.3. Теорема о сходимости. Пусть $z = y - u$ – погрешность метода, где u – решение задачи (18)–(20) при $p = 2$. Подставляя $z + u$ вместо y в разностные уравнения (26)–(28), получаем для z следующую задачу:

$$z_{\overline{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha z^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta z^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} - mz^{(\sigma_3,\sigma_3)} - m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha z^{(\sigma_3,\sigma_3)} + \Psi,$$

$$(x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{35}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \quad z_t(x,0) = \overset{\circ}{\Psi}, \quad x\in\omega_h, \tag{36}$$

$$z(x,t) = 0, \quad x\in\gamma_h, \quad t\in\omega_\tau. \tag{37}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решение разностной задачи (26)–(28) сходится к точному решению дифференциальной задачи (18)–(20) и имеют место оценки*

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n - u^n\|_A \leqslant M(|h|^4 + \tau^2), \quad M = \mathrm{const} > 0,$$

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n - u^n\|_C \leqslant M_0|\ln|h|^{-1}|^{1/2}(|h|^4 + \tau^2), \quad M_0 = \mathrm{const} > 0,$$

где $n = \overline{0, N_0}$.

Доказательство. Задачи (26)–(28) и (35)–(37) идентичны, поэтому для оценки погрешности метода применим теорему 2. Из априорных оценок (24) для невязки, второго начального условия (25) и решения разностной схемы (34) вытекает оценка

$$\|y^n - u^n\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\|\overset{\circ}{\Psi}\|_D + \frac{1}{\delta_0}\sum_{k=1}^{n}\tau\|\Psi(t_k)\|\right) \leqslant M(|h|^4 + \tau^2).$$

В силу теоремы вложения [20, гл. II, § 2; 21, гл. II, § 2] имеем

$$\|z\|_C \leqslant c_0|\ln|h|^{-1}|^{1/2}\|z\|_A, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{38}$$

что приводит к требуемой оценке в сеточной норме $C(\overline{\omega}_h)$. Теорема доказана.

3.4. Компактные разностные схемы 4-го порядка точности. Рассмотрим теперь разностную схему (21)–(23) при

$$\sigma = \sigma_3 = \frac{1}{12}, \quad \varphi = f^{(\sigma,\sigma)} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2\Lambda_\alpha f^{(\sigma,\sigma)},$$

$$u_1(x)=\nu_0(x)+\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau^3}{24}\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha-m\frac{\tau^3}{24}\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u_0(x)-mu_0(x)+f(x,0)\right]+$$

$$+\frac{\tau^2}{6}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha\nu_0(x)-m\nu_0(x)+\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\right]+\frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,0).$$

Данная схема аппроксимирует исходную задачу (18)–(20) с четвёртым порядком. Действительно, в этом случае невязку разностного уравнения (31)

$$\Psi=-u_{\bar{t}t}+\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)}+\frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}h_\beta^2\Lambda_\alpha\Lambda_\beta u^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)}-mu^{(\sigma,\sigma)}-$$

$$-m\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha u^{(\sigma,\sigma)}+f^{(\sigma,\sigma)}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2\Lambda_\alpha f^{(\sigma,\sigma)}$$

можно записать в виде

$$\Psi=\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u-mu+f\right]+O(|h|^4+\tau^4).$$

Следовательно,

$$\|\Psi\|\leqslant M_1(|h|^4+\tau^4),\quad M_1=\mathrm{const}>0.$$

Для погрешности аппроксимации $\mathring{\Psi}=u_1-u_t^0$ второго начального условия имеет место соотношение

$$\mathring{\Psi}=\nu_0(x)+\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau^3}{24}\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha-m\frac{\tau^3}{24}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x,0)+\frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,0)-u_t^0,$$

т.е.

$$\mathring{\Psi}=\frac{\tau^3}{24}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u(x,0)-mu(x,0)+f(x,0)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)\right]+O(\tau^4).$$

Другими словами, выполняется оценка

$$\|\mathring{\Psi}\|\leqslant M_2\tau^4,\quad M_2=\mathrm{const}>0.$$

Пусть $p=2,\ h_1=h_2=h\leqslant h_0,\ h_0\leqslant 1/\sqrt{m}$. Тогда для нормы определяемого последним равенством в (32) оператора $A=\sum_{\alpha=1}^{3}\overline{A}_\alpha\ \ (A=A^*>0)$ справедливо неравенство

$$\|A\|<\frac{8}{h^2}+m\leqslant\frac{9}{h^2}.$$

В этом случае условие

$$\frac{1}{12}\left(1-\frac{h^2}{\tau^2}\right)\geqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{\tau^2\|A\|}$$

устойчивости по начальным данным выполнено, если имеет место неравенство

$$\tau\leqslant\frac{h}{\sqrt{6}}. \tag{39}$$

4. Разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ для многомерного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u - mu + f(x,t), \quad m > 0, \quad (x,t) \in Q_T = G \times [0 < t \leqslant T], \tag{40}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x), \quad x \in G, \tag{41}$$

$$u(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{42}$$

где

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad 0 < k_{1\alpha} \leqslant k_\alpha(x_\alpha,t) \leqslant k_{2\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

На равномерной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ дифференциальную задачу (40)–(42) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$y_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^{(\sigma,\sigma)} - \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha y_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha \Lambda_\beta y^{(\sigma,\sigma)}) - my^{(\sigma,\sigma)} -$$

$$- m\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha y) + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{43}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{44}$$

$$y(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{45}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad q_\alpha(x_\alpha,t) = \frac{1}{k_\alpha(x_\alpha,t)}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha f),$$

$$a_\alpha = a_\alpha(x_\alpha,t) = 6\left[q_\alpha(x_\alpha - h_\alpha, t) + 4q_\alpha\left(x_\alpha - \frac{h_\alpha}{2}, t\right) + q_\alpha(x_\alpha,t)\right]^{-1}, \quad \alpha = \overline{1,p},$$

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u(x,0) - mu(x,0) + f(x,0)\right], \quad x \in \omega_h;$$

обозначение v^* для функции v определено в постановке задачи (21)–(23).

4.1. Погрешность аппроксимации. Несложно показать, что разностная схема (43)–(45) аппроксимирует исходную задачу (40)–(42) с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени. Действительно, используя разложения

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha\left[q_\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + mu - f - \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{p} L_\beta u\right)\right] + O(|h|^4),$$

$$u_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O(\tau^4),$$

запишем невязку разностного уравнения (43)

$$\Psi = -u_{\bar{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha u^{(\sigma,\sigma)} - \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha u_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha \Lambda_\beta u^{(\sigma,\sigma)}) - m u^{(\sigma,\sigma)} - m \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha u) + \varphi$$

в виде $\Psi = O(|h|^4 + \tau^2)$, т.е.

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4 + \tau^2), \quad M_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{46}$$

Для второго начального условия (44) имеет место априорная оценка

$$\|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2 \tau^2, \quad M_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{47}$$

Замечание 2. В частности, при $\sigma = 1/12$, $\varphi = f^{(\sigma,\sigma)} + 12^{-1} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha f$,

$$u_1(x) = \nu_0(x) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau^3}{24} \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha - m \frac{\tau^3}{24} \right) \left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u_0(x) - m u_0(x) + f(x,0) \right] +$$

$$+ \frac{\tau^2}{6} \left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha \nu_0(x) - m\nu_0(x) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) \right] + \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,0)$$

разностная схема (43)–(45) имеет четвёртый порядок аппроксимации на решении

$$\Psi = O(|h^4| + \tau^4), \quad \overset{\circ}{\Psi} = O(\tau^4).$$

4.2. Устойчивость. Чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся рассмотрением двумерного случая и зависимостью коэффициентов $k_\alpha = k_\alpha(x_\alpha)$ только от x_α, $\alpha = 1, 2$.

Предположим также, что $\sigma = 0.5$ и $\mu(x,t) = 0$, $x \in \Gamma$. Тогда разностная задача примет вид

$$y_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha y^{(\sigma,\sigma)} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha y_{\bar{t}t}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha \Lambda_\beta y^{(\sigma,\sigma)}) - m y^{(\sigma,\sigma)} -$$

$$- m \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha y) + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{48}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{49}$$

$$y(x,t) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{50}$$

где

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha(q_\alpha f).$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$(u,v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 u_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2}, \quad (u,v] = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1 h_2 u_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2},$$

$$(u,v]_\alpha = \sum_{x \in \omega_{h_\alpha}^+} h_1 h_2 u v, \quad \omega_{h_\alpha}^+ = \omega_h \bigcup \{x_{N_\alpha} = l_\alpha\},$$

$$\|y\|^2_{A_\alpha}=(A_\alpha y,y)=-((a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha},y)=(a_\alpha,y^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha,\quad \alpha=1,2,$$

$$\overline{A}_1=\sum_{\alpha=1}^{2}\overline{A}_{1\alpha},\quad \overline{A}_{1\alpha}y=\frac{h_\alpha^2}{12}(a_\alpha q_{\alpha(-)},y_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha,\quad v_{\alpha(-)}=v_\alpha(x_\alpha-h_\alpha),$$

$$b_1=a_1a_2\frac{q_{1(-)}h_1^2+q_{2(-)}h_2^2}{12},\quad \|y_{\overline{t}}\|^2_{\overline{A}_1}=\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}(a_\alpha q_{\alpha(-)},y^2_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}]_\alpha,\quad \alpha=1,2.$$

Для исследования устойчивости построенных разностных схем нам понадобится

Лемма 4. *При* $h_\alpha\leqslant h_0,$ $\alpha=1,2,$ h_0 *– достаточно малое число, выражение*

$$Q^n=\|y_{\overline{t}}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\|y\|^2_{A_\alpha}+\|\check{y}\|^2_{A_\alpha}}{2}+m\frac{\|y\|^2+\|\check{y}\|^2}{2}-\|y_{\overline{t}}\|^2_{\overline{A}_1}-\left(b_1,\frac{y^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2}+\check{y}^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2}}{2}\right]_{12}\tag{51}$$

неотрицательно.

Доказательство. Здесь и далее через $c>0$ обозначается константа, зависящая от $m,$ $\varepsilon,$ $k_{1\alpha},$ – в каждом конкретном случае своя.

Очевидно, что

$$a_\alpha q_{\alpha(-)}=\frac{6q_{\alpha(-)}}{6q_{\alpha(-)}+O(h_\alpha)}=1+O(h_\alpha),\quad \alpha=\overline{1,p}.$$

Тогда при достаточно малом $|h|\leqslant h_0,$ $h_0=1/c,$ для двух последних членов в формуле (51) имеют место неравенства

$$-\|y_{\overline{t}}\|^2_{\overline{A}_1}=-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}(a_\alpha q_{\alpha(-)},y^2_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}]_\alpha\geqslant-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\|y_{\overline{t}}\|^2}{3}(1+ch_\alpha)\geqslant-\frac{2}{3}\sum_{\alpha=1}^{2}\|y_{\overline{t}}\|^2,$$

$$-\left(b_1,\frac{y^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2}+\check{y}^2_{\overline{x}_1\overline{x}_2}}{2}\right]_{12}\geqslant-\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}(1+ch_\beta)\left\{\left(\frac{a_\alpha h_\beta^2}{24},y^2_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}\right]_{\alpha\beta}+\left(\frac{a_\alpha h_\beta^2}{24},\check{y}^2_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}\right]_{\alpha\beta}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{3}\sum_{\beta=1}^{2}\{(a_\alpha,y^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha+(a_\alpha,\check{y}^2_{\overline{x}_\alpha}]_\alpha\}=-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\|y\|^2_{A_\alpha}+\|\check{y}\|^2_{A_\alpha}}{3}.$$

Отсюда следует, что $Q^n\geqslant 0.$ Лемма доказана.

Умножая разностное уравнение (48) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}}$ и применяя первую разностную формулу Грина, получаем энергетическое соотношение

$$Q^{n+1}=Q^n+\sum_{\alpha=1}^{2}h_\alpha^2(d_\alpha(y_{t\overline{x}_\alpha}+y_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}),y_t-y_{\overline{t}}]_\alpha+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\beta^2}{2}(a_\alpha d_\beta(\hat{y}_{\overline{x}_\alpha}+\check{y}_{\overline{x}_\alpha}),\hat{y}_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}-\check{y}_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}]_{\alpha\beta}+$$

$$+m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}(a_\alpha(p_\alpha y)_{\overline{x}_\alpha},\hat{y}_{\overline{x}_\alpha}-\check{y}_{x_\alpha}]_\alpha+2\tau(y_{\overset{\circ}{t}},\varphi),\quad d_\alpha=\frac{a_\alpha p_{\alpha\overline{x}_\alpha}}{12}.$$

Нетрудно показать, что для слагаемых, отличных от Q^n и $Q^{n+1},$ справедливы оценки

$$\sum_{\alpha=1}^{2}h_\alpha^2(d_\alpha(y_{t\overline{x}_\alpha}+y_{\overline{t}\overline{x}_\alpha}),y_t-y_{\overline{t}}]_\alpha\leqslant c|h|(\|y_t\|^2+\|y_{\overline{t}}\|^2),$$

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2} \frac{h_\beta^2}{2}(a_\alpha d_\beta(\hat y_{\overline{x}_\alpha}+\check y_{\overline{x}_\alpha}), \hat y_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}-\check y_{\overline{x}_\alpha\overline{x}_\beta}]_{\alpha\beta} \leqslant c|h|\sum_{\alpha=1}^{2}(\|\hat y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+\|\check y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2),$$

$$m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}(a_\alpha(p_\alpha y)_{\overline{x}_\alpha}, \hat y_{\overline{x}_\alpha}-\check y_{x_\alpha}]_\alpha \leqslant c|h|^2\sum_{\alpha=1}^{2}[(\|\hat y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+\|y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2)+(\|\check y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+\|y_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2)],$$

$$2\tau(y_{\overset{\circ}{t}},\varphi)\leqslant \varepsilon\tau\|\varphi\|^2+\frac{\tau}{2\varepsilon}(\|y_t\|^2+\|y_{\overline{t}}\|^2).$$

Отсюда с учётом условия $|h|\leqslant\tau$ получаем неравенство

$$(1-c\tau)Q^{n+1}\leqslant(1+c\tau)Q^n+c\tau\|\varphi^n\|^2. \tag{52}$$

Итак, имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$|h|\leqslant h_0,\quad \tau\geqslant|h|,\quad h_0=\frac{1}{c}. \tag{53}$$

Тогда разностная схема (48)–(50) ρ-устойчива по начальным данным и правой части и имеет место оценка

$$\|y^{n+1}\|_A^2\leqslant M_3\bigg(R_0+c\sum_{s=1}^{n}\tau\|\varphi^s\|^2\bigg),\quad n=\overline{0,N_0-1},$$

в которой

$$R_0=\frac{3}{2}m\|y^0\|^2+(1+m\tau^2)\|y_t^0\|^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}k_{2\alpha}(3\|y^0_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2+2\tau^2\|y^0_{t\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2),$$

$$Ay=-y_{\overline{x}_1x_1}-y_{\overline{x}_2x_2},\quad M_3=\frac{6}{\min\{k_{11},k_{12}\}}e^{cT}.$$

Доказательство. Так как $Q^n\geqslant0$ при выполнении условий (53), то из неравенства (52) легко приходим к рекуррентному соотношению

$$Q^{n+1}\leqslant(1+c\tau)Q^n+c\tau\|\varphi^n\|^2\leqslant e^{c\tau}Q^n+c\tau\|\varphi^n\|^2.$$

В силу леммы Гронуолла [18, с. 159] имеет место неравенство

$$Q^{n+1}\leqslant e^{ct_n}\bigg(Q^1+c\sum_{s=1}^{n}\tau\|\varphi^s\|^2\bigg),\quad n=\overline{0,N_0-1}.$$

Отсюда следует требуемая оценка. Теорема доказана.

4.3. Сходимость разностной схемы. Пусть u – решение задачи (40)–(42) при $p=2$, $z=y-u$ – погрешность метода. Подставляя в разностную схему (48)–(50) $z+u$ вместо y, получаем для z следующую задачу:

$$z_{\overline{t}t}=\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha z^{(\sigma,\sigma)}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha z_{\overline{t}t})+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha\Lambda_\beta z^{(\sigma,\sigma)})-mz^{(\sigma,\sigma)}-$$

$$-m\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha(q_\alpha z)+\Psi,\quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{54}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad z_t(x,0)=\overset{\circ}{\Psi},\quad x\in\omega_h, \tag{55}$$

$$z(x,t)=0,\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau. \tag{56}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда решение разностной схемы (48)–(50) сходится к точному решению дифференциальной задачи (40)–(42) и имеют место оценки*

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n-u^n\|_A\leqslant M(|h|^4+\tau^2),$$

$$\max_{t_n\in\omega_\tau}\|y^n-u^n\|_C\leqslant M_0|\ln|h|^{-1}|^{1/2}(|h|^4+\tau^2),\quad n=\overline{0,N_0},$$

где $M,\ M_0$ *– положительные константы.*

Доказательство. При выполнении условий (53) теоремы 4 для решения $z=y-u$ задачи (54)–(56) справедлива оценка

$$\|y^n-u^n\|_A^2\leqslant M_3(R_0+cT\max_{t\in\omega_\tau}\|\Psi(t)\|^2),$$

где

$$R_0=\left(1+\frac{2}{3}m\tau^2\right)\|\mathring{\Psi}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{2}k_{2\alpha}\tau^2\|\mathring{\Psi}_{\overline{x}_\alpha}]|_\alpha^2.$$

Отсюда в силу априорных оценок (46), (47) приходим к следующему неравенству:

$$\|y^n-u^n\|_A\leqslant M(|h|^4+\tau^2).$$

Вторая требуемая оценка теоремы следует из вложения (38). Теорема доказана.

5. Квазилинейное уравнение Клейна–Гордона. В цилиндре $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$ для многомерного квазилинейного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha\phi_\alpha(u)-mf_1(u)+f(x,t),\quad m>0,\quad (x,t)\in Q_T=G\times[0<t\leqslant T],\tag{57}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\nu_0(x),\quad x\in G,\tag{58}$$

$$u(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\Gamma,\quad 0<t\leqslant T,\tag{59}$$

с условиями $(\phi_\alpha)'_u=k_\alpha(u)\geqslant k_\alpha>0,\quad \alpha=\overline{1,p}$. Здесь, как в случае с постоянными коэффициентами, оператор L_α определяется равенством $L_\alpha v=\partial^2v/\partial x_\alpha^2,\ \alpha=\overline{1,p}$.

На стандартном шаблоне сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$ исходную задачу (57)–(59) заменим разностной задачей:

$$y_{\overline{t}t}=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha[\phi(y)]^{(\sigma,\sigma)}+\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p}\frac{h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta[\phi(y)]^{(\sigma,\sigma)}-\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y_{\overline{t}t}-m[f_1^*(y)]^{(\sigma,\sigma)}+f^*,$$

$$(x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau,\tag{60}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h,\tag{61}$$

$$y(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau,\tag{62}$$

где

$$\Lambda_\alpha y=y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha},\quad u_1(x)=\nu_0(x)+\frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha\phi_\alpha(u_0(x))-mf_1(u_0(x))+f(x,0)\right],\quad x\in\omega_h.$$

Аналогично рассмотренным выше случаям легко показывается, что для погрешности аппроксимации разностной схемы (60)–(62) имеют место оценки

$$\|\Psi\| \leqslant M_1(|h|^4+\tau^2), \quad M_1=\mathrm{const}>0, \quad \|\overset{\circ}{\Psi}\| \leqslant M_2\tau^2, \quad M_2=\mathrm{const}>0.$$

Для реализации построенной схемы необходимо использовать итерационный метод Ньютона с выбором начальной итерации $\overset{\circ}{y}=2y^n-y^{n-1}$.

6. Тестовые расчёты. В этом пункте приводятся результаты численных расчётов при решении начально-краевой задачи (18)–(20) в двумерном случае $p=2$. Её параметры выбираются следующими: $m=1$, $T=1$, $0\leqslant l_1\leqslant 1$, $0\leqslant l_2\leqslant 1$. Начальные и краевые условия и свободный член (неоднородность) определяются из точного решения

$$u(x_1,x_2,t)=e^t(\cos x_1+\sin x_1)(\cos(2x_2)+\sin(2x_2)).$$

Сначала рассматриваются разностные схемы порядка $O(|h|^4+\tau^2)$, т.е. при $\sigma\neq 1/12$. Для нахождения порядка скорости сходимости по пространству $p^h_{L_\infty}$ в норме $L_\infty=C$ и $p^h_{L_2}$ в норме L_2 используются формулы

$$p^h_{L_\infty}=\log_2(\|\Delta_h\|_{L_\infty}/\|\Delta_{h/2}\|_{L_\infty}), \quad p^h_{L_2}=\log_2(\|\Delta_h\|_{L_2}/\|\Delta_{h/2}\|_{L_2}),$$

где $\Delta_{h/2}=y_{h_1/2,h_2/2,\tau/4}-y_{h_1,h_2,\tau}$.

В таблицах приведены значения скорости сходимости приближённого решения (к точному решению) при $\sigma=\sigma_3=1/2$.

Табл. 1 показывает, что при выполнении условий устойчивости построенная разностная схема имеет четвёртый порядок точности по пространственной переменной.

Таблица 1. Порядок сходимости по пространству

$h_1=0.1$	$h_2=0.1$	$\tau=0.5$	$\|\Delta_{h/2}\|_{L_\infty}$	$p^h_{L\infty}$	$\|\Delta_{h/2}\|_{L_2}$	p^h_{L2}
h_1	h_2	τ	–	–	–	–
$h_1/2$	$h_2/2$	$\tau/4$	1.39E-01	–	8.04E-02	–
$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	$\tau/4^2$	8.59E-03	4.02067	4.74E-03	4.08629
$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	$\tau/4^3$	4.50E-04	4.25287	2.57E-04	4.20524
$h_1/2^4$	$h_2/2^4$	$\tau/4^4$	2.75E-05	4.03137	1.56E-05	4.0379
$h_1/2^5$	$h_2/2^5$	$\tau/4^5$	1.71E-06	4.00895	9.72E-07	4.008

Аналогично для нахождения порядка скорости сходимости по временно́й переменной $p^\tau_{L_\infty}$ в норме $L_\infty=C$ и $p^\tau_{L_2}$ в норме L_2 используются формулы

$$p^\tau_{L_\infty}=\log_2(\|\Delta_\tau\|_{L_\infty}/\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_\infty}), \quad p^\tau_{L_2}=\log_2(\|\Delta_\tau\|_{L_2}/\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_2}),$$

где разность приближённых значений определяется равенством $\Delta_{\tau/2}=y_{h_1,h_2,\tau/2}-y_{h_1,h_2,\tau}$.

Из результатов, представленных в табл. 2, видно, что указанная разностная схема имеет второй порядок погрешности аппроксимации по времени.

Таблица 2. Порядок сходимости по времени ($h_1=0.005$, $h_2=0.005$)

$\tau=0.125$	$\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_\infty}$	$p^\tau_{L\infty}$	$\|\Delta_{\tau/2}\|_{L_2}$	p^τ_{L2}
τ	–	–	–	–
$\tau/2$	7.21E-03	–	3.87E-03	–
$\tau/2^2$	1.42E-03	2.33982	8.65E-04	2.16162
$\tau/2^3$	3.62E-04	1.97618	2.06E-04	2.06904
$\tau/2^4$	8.90E-05	2.02392	5.05E-05	2.02945
$\tau/2^5$	2.21E-05	2.01296	1.25E-05	2.01312

Далее с учётом условий устойчивости (39) рассматриваются разностные схемы (21)–(23) при $\sigma = 1/12$, т.е. схемы порядка $O(|h|^4 + \tau^4)$. Для определения порядка скорости сходимости приближённого решения к точному используются формулы

$$p_{L_\infty} = \log_2(\|\Delta\|_{L_\infty}/\|\Delta_{1/2}\|_{L_\infty}), \quad p_{L_2} = \log_2(\|\Delta\|_{L_2}/\|\Delta_{1/2}\|_{L_2}),$$

$$\Delta = y_{h_1,h_2,\tau} - y_{2h_1,2h_2,2\tau}, \quad \Delta_{1/2} = y_{h_1/2,h_2/2,\tau/2} - y_{h_1,h_2,\tau}.$$

Полученные результаты расчётов представлены в табл. 3.

Таблица 3. Порядок сходимости по пространству и времени

h_1	h_2	τ	$\|\Delta_{1/2}\|_{L_\infty}$	$p_{L\infty}$	$\|\Delta_{1/2}\|_{L_2}$	p_{L2}
h_1	h_2	1/10	–	–	–	–
$h_1/2$	$h_2/2$	1/20	2.71E-05	–	1.52E-05	–
$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	1/40	1.61E-06	4.06842	9.22E-07	4.04777
$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	1/80	9.87E-08	4.03029	5.65E-08	4.02725
$h_1/2^4$	$h_2/2^4$	1/160	6.12E-09	4.01209	3.50E-09	4.01363
h_1	h_2	1/100	–	–	–	–
$h_1/2$	$h_2/2$	1/200	2.56E-05	–	1.46E-05	–
$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	1/400	1.59E-06	4.00925	9.10E-07	3.9987
$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	1/800	9.92E-08	4.0046	5.68E-08	4.00178
$h_1/2^4$	$h_2/2^4$	1/1600	6.03E-09	4.04138	3.46E-09	4.03966

Таким образом, проведённые тестовые расчёты согласуются с нашими теоретическими выводами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.
2. *Валиулин В.Н., Паасонен В.И.* Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Числ. методы механики сплошной среды. 1970. Т. 1. № 1. С. 17–30.
3. *Валиулин В.Н.* Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск, 1973.
4. *Москальков М.Н.* Об одном свойстве схемы повышенного порядка точности для одномерного волнового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 254–260.
5. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона // Докл. НАН Беларуси. 2020. Т. 64. № 5. С. 526–533.
6. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 963–975.
7. *Zlotnik A., Kireeva O.* On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation // Math. Model. Anal. 2021. V. 26. № 3. P. 479–502.
8. *Zlotnik A., Ciegis R.* On higher-order compact ADI schemes for the variable coefficient wave equation // Appl. Math. and Comp. 2022. V. 412. Art. 126565. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126565.
9. *Britt S., Turkel E., Tsynkov S.* A high order compact time/space finite difference scheme for the wave qquation with variable apeed of sound // J. Sci. Comput. 2018. V. 76. P. 777–811.
10. *Hou B., Liang D., Zhu H.* The conservative time high-order AVF compact finite difference schemes for two-dimensional variable coefficient acoustic wave equations // J. Sci. Comput. 2019. V. 80. P. 1279–1309.
11. *Матус П.П., Ирхин В.А., Лапиньска-Хшонович М., Лемешевский С.В.* О точных разностных схемах для гиперболических и параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 978–986.
12. *Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D.* Exact Finite-Difference Schemes. De Gruyter, 2016.
13. *Matus P., Kolodynska A.* Exact difference schemes for hyperbolic equations // Comp. Meth. Appl. Math. 2007. V. 7. № 4. P. 341–364.
14. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.

15. *Matus P.P., Zyuzina E.L.* Three-level difference schemes on non-uniform in time grids // Comp. Meth. Appl. Math. 2001. V. 1. № 3. P. 265–284.
16. *Зюзина Е.Л., Матус П.П.* Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 5. С. 25–30.
17. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
18. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
19. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами // Докл. НАН Беларуси. 2021. Т. 65. № 1. С. 25–32.
20. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань, 1976.
21. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы для решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет им. Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша,
Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Университет природных ресурсов и окружающей среды,
г. Хошимин, Вьетнам

Поступила в редакцию 21.10.2021 г.
После доработки 21.10.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.