ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 139–141

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.954

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ p-ЛАПЛАСИАНА НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ С МОДЕЛЬНЫМ КОНЦОМ

© 2022 г. В. В. Бровкин

Получен критерий существования решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых гиперболических многообразиях с модельным концом.

DOI: 10.31857/S0374064122010137

Пусть M – связное n-мерное ориентированное полное риманово многообразие с краем (возможно пустым). Рассмотрим задачу

$$\Delta_p u = f \quad \text{на} \quad M, \tag{1}$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M} = h, \tag{2}$$

где $\Delta_p u = \nabla_i(g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u)$, $p > 1$, – оператор p-Лапласа, ν – вектор внешней нормали к ∂M, а f и h – обобщённые функции из $\mathcal{D}'(M)$ такие, что $\operatorname{supp} h \subset \partial M$.

Если $\partial M = \varnothing$, то условие Неймана (2) предполагается выполненным автоматически. В этом случае, очевидно, $h = 0$, так как только у нулевой функции носитель $\operatorname{supp} h$ является пустым множеством.

Через g_{ij} обозначаем метрический тензор, согласованный с римановой связностью, а через g^{ij} – тензор, дуальный к метрическому, т.е. $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. При этом $|\nabla u| = (g^{ij}\nabla_i u\nabla_j u)^{1/2}$. Через $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$, где ω – открытое подмножество в M, обозначается линейное пространство функций, принадлежащих классу $W^1_p(\omega'\bigcap\omega)$ для любого открытого множества $\omega' \subset M$ с компактным замыканием. Пространство $L_{p,\mathrm{loc}}(\omega)$ определяется аналогично.

Будем говорить, что функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ является *решением* задачи (1), (2), если равенство

$$-\int\limits_M g^{ij}|\nabla u|^{p-2}\nabla_j u\nabla_i\varphi\,dV = (f-h,\varphi)$$

выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(M)$, где dV – элемент объёма многообразия M.

В дальнейшем предполагаем, что решения задачи (1), (2) удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\int\limits_M |\nabla u|^p\,dV < \infty. \tag{3}$$

Краевые задачи в неограниченных областях и на гладких многообразиях исследовались в работах [1–10].

Определение 1. *Ёмкость* $\operatorname{cap}_p(B,\Omega)$ компакта $B \subset \Omega$ относительно открытого множества $\Omega \subset M$ определяется соотношением

$$\operatorname{cap}_p(B,\Omega) = \inf_\varphi \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dV,$$

где $\inf$ берётся по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, тождественно равным единице в окрестности этого компакта.

Если $\Omega = M$, то вместо $\operatorname{cap}_p(B, M)$ пишем $\operatorname{cap}_p(B)$. Для произвольного замкнутого множества $H \subset M$ полагаем

$$\operatorname{cap}_p(H) = \sup_B \operatorname{cap}_p(B),$$

где $\sup$ берётся по всем компактам $B \subset H$. Ёмкость пустого множества считается равной нулю.

Определение 2. Многообразие M называется *p-гиперболическим*, если его ёмкость положительна, т.е. $\operatorname{cap}_p(M) > 0$. В противном случае многообразие M называется *p-параболическим.*

Через $L_p^1(\omega)$, где ω – открытое подмножество в M, обозначаем линейное пространство обобщённых функций $u \in \mathcal{D}'(\omega)$ таких, что $\nabla u \in L_p(\omega)$ [11, с. 12]. Полунорма в $L_p^1(\omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_p^1(\omega)} = \left(\int\limits_\omega |\nabla u|^p \, dV\right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)$ обозначим замыкание пространства $C_0^\infty(\omega)$ в $L_p^1(\omega)$, а через $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)^*$ – пространство, дуальное к $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)$ или, другими словами, пространство линейных непрерывных функционалов на $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)$. Норма функционала $l \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)^*$ определяется равенством

$$\|l\|_{\overset{\circ}{L}{}_p^1(\omega)^*} = \sup_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\omega) \\ \|\varphi\|_{L_p^1(\omega)} = 1}} |(l, \varphi)|.$$

Теорема 1. *Пусть M – p-гиперболическое многообразие, $\Omega \subset M$ – липшицева область с компактным замыканием и $0 < \mathcal{E} \leqslant 1$ – гладкая функция такая, что*

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \quad \text{на} \quad M \setminus \overline{\Omega}, \quad \mathcal{E}|_{\partial\Omega} = 1, \quad |\nabla \mathcal{E}|^{p-2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M \setminus \overline{\Omega}} = 0.$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^\infty \|f - h\|^{p/(p-1)}_{\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega_k)^*} < \infty,$$

где $\Omega_1 = \Omega \bigcup \{x \in M \setminus \Omega : \mathcal{E}(x) > 1/4\}$ *и* $\Omega_k = \{x \in M \setminus \Omega : 2^{-1-k} < \mathcal{E}(x) < 2^{1-k}\}$, $k = 2, 3, \ldots$

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \bigcup D \times [r_0, \infty), \quad \omega \bigcap D \times [r_0, \infty) = \varnothing, \tag{4}$$

где ω – липшицева область с компактным замыканием, D – компактное риманово многообразие с краем, а $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число. Пусть также на множестве $D \times [r_0, \infty)$ задана метрика

$$ds^2 = a^2(r) \, dr^2 + b^2(r) \tilde{g}_{ij}(\theta) \, d\theta^i \, d\theta^j,$$

где a и b – положительные бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, $\tilde{g}_{ij}$ – метрический тензор на D, θ^i – локальные координаты на D. Назовём множество $D \times [r_0, \infty)$ *модельным концом* многообразия M по отношению к области ω [2].

Тривиальным примером многообразия с модельным концом является пространство $\mathbb{R}^n$. В качестве другого примера можно привести поверхность, полученную вращением графика функции $v(r)$ вокруг луча Or в $\mathbb{R}^n$. В этом случае, очевидно, $a(r) = \sqrt{1 + (v'(r))^2}$, $b(r) = v(r)$ и $\tilde{g}_{ij}$ – метрический тензор на единичной сфере.

Многообразие M с модельным концом является p-гиперболическим в том и только в том случае, когда

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(r)}{b^{(n-1)/(p-1)}(r)}\, dr < \infty.$$

Обозначим

$$M_{r_0} = \omega, \quad M_r = \omega \bigcup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Теорема 2. *Пусть M – p-гиперболическое многообразие с модельным концом (4). Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|f-h\|^{p/(p-1)}_{\overset{\circ}{L}{}^1_p(M_{r_1})^*} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \|f-h\|^{p/(p-1)}_{\overset{\circ}{L}{}^1_p(M_{r_{k+1}} \setminus \overline{M}_{r_{k-2}})^*} < \infty,$$

где числа $r_k > r_0$, $k \in \mathbb{N}$, определяются из соотношений

$$\int\limits_{r_{k+1}}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{r_k}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\, ds.$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А. Конькову за постановку задачи и внимание, проявленное к автору при её решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheng S.Y., Yau S.T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 333–354.
2. *Korolkov S.A., Losev A.G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Math. Zeitschr. 2012. Bd. 272. Hf. 1–2. S. 459–472.
3. *Losev A.G., Mazepa E.A.* On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds // Пробл. анал. Issues Anal. 2019. V. 8 (26). № 3. P. 73–82.
4. *Бровкин В.В., Коньков А.А.* О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 2. С. 180–195.
5. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
6. *Григорьян А.А.* О размерности пространств гармонических функций // Мат. заметки. 1990. Т. 48. Вып. 5. С. 55–61.
7. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* О параболических по времени решениях параболических уравнений второго порядка во внешних областях // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1985. Т. 39. № 4. С. 38–47.
8. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
9. *Коньков А.А.* О пространстве решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 805–813.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряжённых эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 1179–1199.
11. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л., 1985.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.07.2021 г.
После доработки 14.07.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.