ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 142–144

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.42

БАЗИС ГРЁБНЕРА ИДЕАЛА ФОКУСНЫХ ВЕЛИЧИН КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И.С. КУКЛЕСА

© 2022 г. А. П. Садовский

Для кубической системы И.С. Куклеса впервые найдены первые одиннадцать фокусных величин. Для них выполнен тест принадлежности идеалу: каждая из них делится без остатка на произвольный многочлен базиса Грёбнера идеала этих фокусных величин.

DOI: 10.31857/S0374064122010149

Из результатов работы [1] следует, что для классической аналитической системы

$$\dot{x} = y + X(x,y), \quad \dot{y} = -x + Y(x,y) \tag{1}$$

справедлива следующая

Теорема 1. *Существует единственное формальное преобразование*

$$x = u + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} f_{j,i-j}u^j v^{i-j}, \quad y = v + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} g_{j,i-j}u^j v^{i-j},$$

приводящее систему (1) к системе

$$\dot{u} = \left(v + \sum_{k=2}^{\infty} c_k u^k\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right), \quad \dot{v} = -u\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right),$$

при этом точка $O(0,0)$ является для системы (1) центром тогда и только тогда, когда

$$c_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Будем рассматривать множество $\mathfrak{R}$ пар формальных степенных рядов над полем $\mathbb{R}$ вида

$$u = u(x,y) = x + xf(x,y), \quad v = v(x,y) = y + xg(x,y), \tag{2}$$

где f и g – формальные степенные ряды без свободных членов. На множестве $\mathfrak{R}$ рассматривается операция “ $\circ$ ” композиции: для $(u,v),(u_1,v_1) \in \mathfrak{R}$ по определению

$$(u,v)\circ(u_1,v_1) = (u(u_1(x,y),v_1(x,y)), v(u_1(x,y),v_1(x,y))).$$

Несложно показывается, что множество $\mathfrak{R}$ формальных степенных рядов с образует относительно операции композиции $\circ$ группу.

Очевидно, что для аналитической системы

$$\dot{x} = y + \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i}x^{2i}, \quad \dot{y} = -x$$

начало координат $O(0,0)$ является центром. Если

$$\frac{\partial x}{\partial u}(v + X(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) + \frac{\partial x}{\partial v}(-u + Y(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) = y + \sum_{i=1}^{\infty} e_{2i}x^{2i},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(v + X(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) + \frac{\partial y}{\partial v}(-u + Y(u,v))\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u^k\right) = -x, \tag{3}$$

где X, Y – аналитические функции из системы (1), а u, v – новые переменные при замене (2), то точка $O(0,0)$ является для системы (1) центром. В случае произвольных X, Y из тождеств (3) получаем необходимые и достаточные условия центра для системы (1).

В дальнейшем будем рассматривать кубическую систему нелинейных колебаний И.С. Куклеса, т.е. будем предполагать, что

$$X(u,v)=0, \quad Y(u,v)=Au^2+3Buv+Cv^2+Ku^3+3Lu^2v+Muv^2+Nv^3.$$

Для системы И.С. Куклеса, применяя ранее разработанный автором статьи метод, удалось получить первые 11 фокусных величин f_k, $k=\overline{1,11}$, где f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10} и f_{11} содержат соответственно 4, 19, 60, 149, 321, 623, 1122, 1903, 3079, 4789 и 7209 слагаемых.

Таким образом, имеем идеал

$$J=\langle f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}\rangle.$$

Введём идеал

$$I=\langle i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8,i_9,i_{10},i_{11},i_{12}\rangle,$$

где

$$\begin{gathered}
i_1=-B^2(41A^3+78A^2C+51AC^2+11C^3+6B^2(5A+4C))(C(A+C)-K)+\\
+B(-41A^4-148A^3C-22C^4+AC(88B^2-113C^2-22K)+\\
+4A^2(10B^2-49C^2-3K)+11C^2K+23K^2+4B^2(13C^2+9K))N-\\
-(29A^3+67A^2C+11C(-12B^2+C^2-K)+A(-120B^2+51C^2+11K))N^2+56BN^3,\\
i_2=-12A^5(BC+N)+A^4(B(-14C^2+12K+M)-14CN)+\\
+A^3(2BC(4B^2-C^2-12K+M)-(14B^2+2C^2+37K)N)+A^2(8B^3(2C^2-K)+\\
+27BK(-C^2+K)+22B^2CN-27CKN+6BN^2)+2A(-4B^3C(C^2+K)+12B^4N-\\
-9K^2N-B^2(9C^2+35K)N-12BCN^2-7N^3)+4(4B^3C^2(-C^2+K)+\\
+B^2C(12B^2-9C^2+4K)N+3B(4B^2-2C^2+K)N^2-CN^3),\\
i_3=4B^3(C^3-CK)+6B^2(C^2-K)N-2A^4(BC+N)+A^3(B(-10C^2+2K+M)-10CN)+\\
+A^2(4BC(B^2-3C^2+2K+M)-(6B^2+12C^2+K)N)-2N(K^2+N^2)+\\
+A(B(-4C^4+B^2(8C^2-4K)+K^2+C^2(5K+4M))-C(6B^2+4C^2+3K)N-6BN^2),\\
i_4=6B^3C(-C^2+K)+12B^2(-2C^2+K)N+3A^4(BC+N)+A^3(B(10C^2-3K-M)+\\
+10CN)+A^2(-BC(6B^2-3C^2+4K+3M)+(6B^2+3C^2+5K)N)+\\
+4N(-C^4+K^2+N^2)-2BC(2C^4+K^2-2C^2(2K+M)+3N^2)+\\
+A(6B^3(-2C^2+K)-6B^2CN-8C^3N+9CKN+B(-8C^4+9C^2K-4K^2+6N^2)),\\
i_5=-133A^4B(BC+N)+A^3(B^2(-211C^2+133K+23M)-263BCN-52N^2)-\\
-A^2(B^2C(30B^2+60C^2-101K-46M)+B(98B^2+104C^2+35K)N+\\
+44CN^2)-12(B^2C(2B^2-C^2)(C^2-K)+B(-2C^4+B^2(11C^2-3K)+C^2K)N+\\
+C(12B^2-C^2+K)N^2+3BN^3)-6A(B^4(9C^2-5K)+16B^3CN-\\
-4BC(2C^2+K)N-(3C^2+2K)N^2+B^2(-5C^4+3C^2K+3N^2)),\\
i_6=-(A+C)(B^2(5A^2C+3C^3+A(8C^2-5K-M)-2C(2K+M))+\\
+B(5A^2+10AC+4(B^2+C^2)+K)N+(2A+C)N^2),
\end{gathered}$$

$$i_7 = B^3C(-17C^2 + 20K + 6M) - 12B^4N + 3B^2(-8C^2 + 3K)N - 3BCN^2 +$$
$$+ 2A^4(BC + N) + 2A^3(B(C^2 - K) + CN) + A^2(-19B^3C + 6BCK - 15B^2N + 8KN) +$$
$$+ 4N(K^2 + N^2) + A(6B(C^2 - K)K + B^3(-36C^2 + 19K + 3M) - 42B^2CN + 6CKN - 6BN^2),$$
$$i_8 = 3BC^3 + AB(8C^2 - 5K - M) - 2BC(2K + M) +$$
$$+ 6B^2N + 8ACN + (3(C^2 + K) + M)N + 5A^2(BC + N),$$
$$i_9 = 2A^4(BC + N) + A^3(B(2C^2 - 2K + M) + 2CN) + A^2(-12B^3C + 4BCK - 6B^2N + 7KN) +$$
$$+ A(12B^3(-2C^2 + K) + BK(5C^2 - 3K + 4M) - 30B^2CN + 5CKN - 6BN^2) +$$
$$+ 6(2B^3C(-C^2 + K) + 3B^2(-C^2 + K)N + N(K^2 + N^2)),$$
$$i_{10} = 6B^3(C^3 - CK) + 6B^2(C^2 - 3K)N - 4C^2KN - 3A^4(BC + N) +$$
$$+ A^3(-4BC^2 + 3BK - 4CN) + A(6B^3(2C^2 - K) + BK(-14C^2 + 9K) + 12B^2CN - 14CKN) +$$
$$+ A^2(BC(6B^2 - C^2 - 8K + M) - (C^2 + 12K)N) + BC(-4C^2K + 6K^2 + 4KM - 6N^2) - 6N(K^2 + N^2),$$
$$i_{11} = 118B^3(C^3 - CK) + 96B^4N + 12B^2(7C^2 + 12K)N + 113A^4(BC + N) +$$
$$+ A^3(B(218C^2 - 113K + 3M) + 218CN) +$$
$$+ A^2(182B^3C + 3BC(43C^2 + 20K + M) + 102B^2N + (129C^2 + 281K)N) +$$
$$+ 6BC(16C^2K - 17K^2 + 4M^2 + N^2) + A(2B^3(150C^2 - 91K) + 3B(8C^4 + 79C^2K - 54K^2 + 4M^2) +$$
$$+ 3C(46B^2 + 8C^2 + 123K)N - 114BN^2) + 40(K(3C^2 + K)N + N^3),$$
$$i_{12} = B(A + C) + L + N.$$

Знание базиса Грёбнера идеала I даёт решение проблемы центра и фокуса системы И.С. Куклеса, которое представлено в работе [2].

Теорема 2. *Для идеала I базис Грёбнера состоит из пятидесяти семи многочленов v_i, $i = \overline{1, 57}$; в частности, $I = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{57}\rangle$.*

Вопрос о базисе Грёбнера идеала J фокусных величин кубической системы И.С. Куклеса полностью решает

Теорема 3. *Каждая из одиннадцати порождающих идеал J фокусных величин f_k, $k = \overline{1, 11}$, при делении на произвольный многочлен базиса Грёбнера идеала I даёт в остатке нуль.*

Определения понятий, использующихся в формулировках теорем 2 и 3, и их свойства можно найти, например, в монографиях [3, 4].

Автор благодарит доцента Белорусского государственного университета Д.Н. Чергинца за подготовку статьи к печати и Кирилла Атрохова за компьютерную поддержку при работе над статьёй.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовский А.П.* Проблема центра и фокуса для аналитической системы с ненулевой линейной частью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1413–1417.
2. *Садовский А.П.* Семикратные фокусы кубических систем Куклеса // Весн. Гродзенск. дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2011. Т. 11. С. 42–56.
3. *Кокс Д., Литтл Дж., О' Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М., 2000.
4. *Садовский А.П.* Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2008.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
После доработки 17.08.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.