ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1299–1315

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ШУМАМИ

© 2022 г. Е. С. Паламарчук

Анализируется поведение решений линейных стохастических дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, содержащих коррелированные аддитивные и мультипликативные возмущения, а также внешние воздействия в форме случайного процесса. Находится вид функций с вероятностью, равной единице, и в среднем квадратичном, мажорирующих решения при возрастании параметра времени. Полученные результаты применяются при изучении проблемы моделирования субдиффузий, если решение линейного стохастического дифференциального уравнения задаёт процесс скорости.

DOI: 10.31857/S0374064122100016, EDN: KPUCXV

Введение. Проведём анализ поведения решений линейных неоднородных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) при коррелированных шумах в уравнении динамики и стремлении параметра времени к бесконечности.

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ задан скалярный процесс X_t, $t \geqslant 0$, являющийся решением линейного СДУ вида

$$dX_t = a_t X_t\, dt + f_t\, dt + G_t\, dW_t + \sigma_t X_t\, dw_t \tag{1}$$

с неслучайным начальным условием $X_0 = x$; a_t, G_t, σ_t – кусочно-непрерывные детерминированные функции времени; f_t, $t \geqslant 0$, – измеримый $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс со свойством $E\int_0^t f_s^2\, ds < \infty$, $t \geqslant 0$; W_t, w_t, $t \geqslant 0$, – коррелированные одномерные $\mathcal{F}_t$-согласованные винеровские процессы, т.е. $dW_t\, dw_t = \rho\, dt$, где ρ – константа, такая что $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$. При этом под решением уравнения (1) понимается $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t \geqslant 0$, имеющий почти наверное (п.н.) непрерывные траектории, для которого при любом $t \geqslant 0$ с вероятностью, равной единице, выполняются соотношения $\int_0^t (|a_s X_s| + |f_s| + \sigma_s^2 X_s^2)\, ds < \infty$ и $X_t = x + \int_0^t a_s X_s\, ds + \int_0^t f_s\, ds + \int_0^t G_s\, dW_s + \int_0^t \sigma_s X_s\, dw_s$ (см. [1, определение 6.15, с. 48]), $|\cdot|$ – знак модуля. Очевидно, что здесь идет речь о так называемом сильном решении СДУ, существование и единственность которого в потраекторном смысле обсуждаются далее.

Уравнение (1) является уравнением с переменными коэффициентами, предположения о которых формулируются ниже. Здесь отметим, что допускаются ситуации как неограниченности, так и сингулярности параметров при $t \to \infty$. Уравнения такого вида широко применяются при моделировании в различных областях приложений (см. [2–4] и ссылки в работе [5]). В частности, X_t может выступать в качестве процесса скорости, и тогда на его основе возникают модели аномальных диффузий (см. [4, 6, 7]) для частных случаев уравнения (1), что также будет обсуждаться в рамках данной статьи. Кроме того, важно отметить, что (1) может получаться из ряда нелинейных уравнений при замене переменной, например, в области популяционной динамики [8] или экономических моделях [9]. Введённое предположение о наличии корреляции между винеровскими процессами, задающими аддитивные и мультипликативные возмущения, также мотивировано учётом различных факторов, влияющих на эволюцию реальных процессов (в инженерии см. работу [10], в экономике – [11]). Внешние воздействия f_t, имеющие случайный характер, тоже могут играть существенную роль при описании динамики, например, в теории стохастического управления (см. [12, раздел 1.2, с. 8]) с отдельным выделением систем среднего поля [12, раздел 3.6, с. 106], а также в конкретных моделях (см.

[3] и [13]). Ниже формулируются основные предположения относительно коэффициентов уравнения (1).

Предположение А. Существует монотонная детерминированная функция $\delta_t > 0$, $t \geqslant 0$, такая, что

$$\int\limits_0^t \delta_v\, dv \to \infty, \quad t \to \infty, \quad \limsup_{t\to\infty}\{(G_t^2 + \sigma_t^2)/\delta_t\} < \infty, \tag{2}$$

и при этом для функции $\bar{\Phi}(t,s) = \exp\left(\int_s^t a_v\, dv\right)$ выполняются неравенства

$$\kappa_2 \exp\left(-2\bar{\kappa}\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right) \leqslant \bar{\Phi}^2(t,s) \leqslant \kappa_1 \exp\left(-2\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right), \quad s \leqslant t, \tag{3}$$

$$\bar{\Phi}^2(t,s) \exp\left(\int\limits_s^t \sigma_v^2\, dv\right) \leqslant \kappa_3 \exp\left(-2\kappa\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right), \quad s \leqslant t, \tag{4}$$

при некоторых константах κ_i, $\kappa_i > 0$ $(i = 1,2,3)$, $\bar{\kappa}$ и κ таких, что $\bar{\kappa} \geqslant 1$, $0 < \kappa \leqslant 1$.

Условие (2) и правое неравенство в (3) дают асимптотическую сходимость к нулю с темпом δ_t для решения детерминированной версии уравнения (1) $(G_t = f_t = \sigma_t \equiv 0)$. Если $f_t \equiv 0$, то в стохастическом случае наличие условий (4) и (2) обеспечивает ограниченность EX_t^2, $t \geqslant 0$. Также отметим, что левое неравенство в (3) является аналогом оценки Ляпунова (см. [14, с. 132]).

Очевидно, что одним из важных вопросов при изучении уравнения (1) становится исследование его решений при возрастании параметра времени, в частности, интересует возможность стремления X_t к нулю. В данной работе такой анализ проводится при помощи построения верхних оценок в том или ином вероятностном смысле как функций от параметров в (1). Точнее, ставится задача поиска неотрицательных функций h_t и $\bar{h}_t$, $t \geqslant 0$, таких, что с вероятностью, равной единице

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{EX_t^2}{\bar{h}_t} < \infty \quad \text{и} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t^2}{h_t} < \infty.$$

Тогда, если известен вид h_t и $\bar{h}_t$, можно выявить условия на коэффициенты, при которых $EX_t^2 \to 0$, т.е. возникает сходимость в среднем квадратичном, или же с вероятностью, равной единице, справедливо соотношение $X_t^2 \to 0$, означающее стремление процесса к нулевому состоянию п.н. при $t \to \infty$. Ранее задача поиска функций h_t и $\bar{h}_t$ исследовалась для частных случаев уравнения (1). Так, в работе [15] рассматривались постоянные a_t, σ_t, коэффициент $G_t \equiv 0$ и неотрицательная детерминированная функция f_t с ограничением на рост. В [16] при $a_t \equiv a$, $\sigma_t \equiv \sigma$, $W_t = w_t$ и неслучайной f_t было найдено условие сходимости $X_t \to 0$ п.н. при $t \to \infty$. При суперэкспоненциальном затухании коэффициента G_t, $f_t \equiv 0$ и $W_t = w_t$ в [5] были получены суперэкспоненциально убывающие функции h_t и $\bar{h}_t$. Случаи наличия только одного из типов возмущений и без внешних воздействий в (1), т.е. если $f_t \equiv 0$ и при этом G_t или σ_t – тождественный нуль, изучались в статье [17] для аддитивного шума, в [18, раздел 4.2, с. 117] – для мультипликативного шума.

Далее статья организована следующим образом: в п. 1 приводятся основные результаты о виде функций h_t и $\bar{h}_t$ в рамках предположения А, а также ряд вспомогательных результатов и примеры; п. 2 посвящён вопросу моделирования при помощи уравнения (1) процессов субдиффузий, являющихся одним из классов аномальных диффузий.

1. Основные результаты. Сначала приведём ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет единственное сильное решение, при этом*

$$X_t = \Phi(t,0)x + \Phi(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0) f_s\, ds +$$

$$+\Phi(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)G_s\,dW_s-\rho\Phi(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)\sigma_s G_s\,ds, \tag{5}$$

где

$$\Phi(t,s)=\exp\biggl(\int\limits_s^t a_v\,dv-\frac{1}{2}\int\limits_s^t \sigma_v^2\,dv+\int\limits_s^t \sigma_v\,dw_v\biggr) \tag{6}$$

и

$$\Phi^{-1}(s,0)=\exp\biggl(-\int\limits_0^s a_v\,dv+\frac{1}{2}\int\limits_0^s \sigma_v^2\,dv-\int\limits_0^s \sigma_v\,dw_v\biggr).$$

Доказательство. При сделанных предположениях существование единственного сильного решения линейного СДУ вида (1) следует из известных результатов (см., например, [19, лемма 7.1]), при этом интегралы Лебега в формуле (5) и стохастические интегралы Ито определены в силу введённых условий на коэффициенты уравнения (1), в частности, при $E\int_0^t f_s^2\,ds<$ $<\infty$, $t\geqslant 0$. Также (см. [20]) почти все траектории X_t являются непрерывными функциями времени и $EX_t^2<\infty$, $t\geqslant 0$. Далее находится стохастический дифференциал для функции (5). Здесь применяется формула $d(\xi_t\eta_t)=\eta_t\,d\xi_t+\xi_t\,d\eta_t+\,d\xi_t\,d\eta_t$ (см. [21, с. 168]) и учитываются соотношения $d\Phi(t,0)=a_t\Phi(t,0)\,dt+\sigma_t\Phi(t,0)\,dw_t$, $d\Phi(t,0)\,dW_t=\rho\sigma_t\Phi(t,0)\,dt$. Таким образом, можно заметить, что $dX_t=a_tX_t\,dt+f_t\,dt+G_t\,dW_t+\sigma_tX_t\,dw_t+\rho\sigma_tG_t\,dt-\rho\sigma_tG_t\,dt$ при $X_0=x$, что совпадает с (1). Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение A. Тогда справедлива оценка*

$$\limsup_{t\to\infty}\{EX_t^2/\bar h_t\}<\infty, \tag{7}$$

где функция $\bar h_t$ задаётся в виде

$$\bar h_t=\exp\biggl\{-2\kappa(1-\lambda)\int\limits_0^t \delta_v\,dv\biggr\}x^2+\int\limits_0^t \exp\biggl\{-2\kappa(1-\lambda)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\biggr\}\biggl(G_s^2+\frac{Ef_s^2}{\delta_s}\biggr)\,ds \tag{8}$$

для любой константы λ, $0<\lambda<1$, при этом постоянная κ, $0<\kappa\leqslant 1$, берётся из условия (4).

Доказательство. Для процесса X_t, $t\geqslant 0$, справедливо представление

$$X_t=\bar\Phi(t,0)x+\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)f_s\,ds+\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)G_s\,dW_s+\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)\sigma_sX_s\,dw_s, \tag{9}$$

где $\bar\Phi(t,s)=\exp\bigl(\int_s^t a_v\,dv\bigr)$, а соответствующие интегралы в (9) определены в силу того, что $E\int_0^t f_s^2\,ds<\infty$ и $EX_t^2<\infty$, $t\geqslant 0$. После возведения равенства (9) в квадрат, нахождения математического ожидания от обеих частей по правилам стохастического исчисления, в частности, с учётом формулы $E(\int_0^t \bar\Phi(t,s)G_s\,dW_s\int_0^t \bar\Phi(t,s)\sigma_sX_s\,dw_s)=\int_0^t \bar\Phi^2(t,s)\rho\sigma_sG_sEX_s\,ds$, получим соотношение

$$EX_t^2=\bar\Phi^2(t,0)x^2+E\biggl(\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)f_s\,ds\biggr)^2+\int\limits_0^t \bar\Phi^2(t,s)G_s^2\,ds+\int\limits_0^t \bar\Phi^2(t,s)\sigma_s^2EX_s^2\,ds+I_0(t),$$

где

$$I_0(t)=2\bar\Phi(t,0)xE\biggl(\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)f_s\,ds\biggr)+2E\biggl(\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)f_s\,ds\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)G_s\,dW_s\biggr)+$$

$$+2\int\limits_0^t \bar{\Phi}^2(t,s)\rho\sigma_s G_s EX_s\,ds + 2E\biggl(\int\limits_0^t \bar{\Phi}(t,s)f_s\,ds\int\limits_0^t \bar{\Phi}(t,s)\sigma_s X_s\,dw_s\biggr).$$

Далее, применив элементарное неравенство вида $AB \leqslant A^2/c + cB^2$, справедливое для любых действительных чисел A, B и $c>0$, к слагаемым в формуле для $I_0(t)$, а также неравенство Коши–Буняковского для выражения $(\int_0^t \bar{\Phi}(t,s)f_s\,ds)^2$, после приведения подобных членов будем иметь оценку

$$EX_t^2 \leqslant c_x\bar{\Phi}^2(t,0)x^2 + c_f\int\limits_0^t \delta_s\bar{\Phi}^{2\tilde{\varepsilon}}(t,s)\,ds\int\limits_0^t \bar{\Phi}^{2-2\tilde{\varepsilon}}(t,s)\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds +$$

$$+c_G\int\limits_0^t \bar{\Phi}^2(t,s)G_s^2\,ds + c_\sigma\int\limits_0^t \bar{\Phi}^2(t,s)\sigma_s^2 EX_s^2\,ds,$$

где $c_x = 1+\varepsilon_{xf}^{-1}$, $c_f = 1+\varepsilon_{xf}+\varepsilon_{fG}^{-1}+\varepsilon_{f\sigma}^{-1}$ $c_G = 1+\varepsilon_{fG}+\varepsilon_{f\sigma}^{-1}$, $c_\sigma = 1+\varepsilon_{f\sigma}+\varepsilon_{G\sigma}$ при некоторых сколь угодно малых положительных константах ε_{xf}, ε_{fG}, $\varepsilon_{f\sigma}$, $\varepsilon_{G\sigma}$ и $0<\tilde{\varepsilon}<1$. Заметим, что $I_0(t)\equiv 0$ при $f_t\equiv 0$ и $\rho=0$, и тогда можно положить $c_\sigma = 1$. Введём переменную $y_t = \bar{\Phi}^2(0,t)EX_t^2$ и перейдём к неравенству

$$y_t \leqslant c_x x^2 + c_f l_t^{(1)} + c_G l_t^{(2)} + \int\limits_0^t c_\sigma\sigma_s^2 y_s\,ds,$$

где функции $l_t^{(1)} = \int_0^t \delta_s\bar{\Phi}^{2\tilde{\varepsilon}}(0,s)\,ds\int_0^t \bar{\Phi}^{2-2\tilde{\varepsilon}}(0,s)\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds$, $l_t^{(2)} = \int_0^t \bar{\Phi}^2(0,s)G_s^2\,ds$, откуда при помощи неравенства Гронуолла–Беллмана в интегральной форме (см. [22, лемма 2.7, с. 42]) получим оценку

$$y_t \leqslant c_x\exp\biggl(\int\limits_0^t c_\sigma\sigma_v^2\,dv\biggr)x^2 + c_f\int\limits_0^t \exp\biggl(c_\sigma\int\limits_s^t \sigma_v^2\,dv\biggr)dl_s^{(1)} + c_G\int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^t c_\sigma\sigma_v^2\,dv\biggr)dl_s^{(2)}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, можно записать

$$EX_t^2 \leqslant c_x\tilde{\Phi}^2(t,0)x^2\exp\biggl(\int\limits_0^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr) + c_G\int\limits_0^t \tilde{\Phi}^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr)G_s^2\,ds + I_1(t) + I_2(t),$$

где $\varepsilon_0>0$ – сколь угодно малое число,

$$\tilde{\Phi}^2(t,s) = \bar{\Phi}^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \sigma_v^2\,dv\biggr),$$

$$I_1(t) = c_f\int\limits_0^t \tilde{\Phi}^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr)\bar{\Phi}^{2\tilde{\varepsilon}}(s,0)\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds\int\limits_0^s \delta_\tau\bar{\Phi}^{2\tilde{\varepsilon}}(0,\tau)\,d\tau\,ds,$$

$$I_2(t) = c_f\int\limits_0^t \tilde{\Phi}^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr)\delta_s\bar{\Phi}^{2-2\tilde{\varepsilon}}(s,0)\int\limits_0^s \bar{\Phi}^{2-2\tilde{\varepsilon}}(0,\tau)\delta_\tau^{-1}Ef_\tau^2\,d\tau\,ds.$$

Заметим, что следствием условия $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} < \infty$ является неравенство вида

$$\exp\left(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\right) \leqslant \hat\kappa \exp\left(\int\limits_s^t \tilde\varepsilon_0\delta_v^2\,dv\right),$$

справедливое при сколь угодно малом числе $\tilde\varepsilon_0 > 0$ и некоторой константе $\hat\kappa > 0$. Тогда с учётом свойств (3) и (4) предположения А для слагаемых $I_1(t)$ и $I_2(t)$ при некоторой константе $\tilde c_f > 0$ справедливы неравенства

$$I_1(t) \leqslant \tilde c_f \int\limits_0^t \exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\int\limits_0^s \delta_\tau \exp\left\{-2\tilde\varepsilon\int\limits_\tau^s \delta_v\,dv\right\}d\tau\,\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds,$$

$$I_2(t) \leqslant \tilde c_f \int\limits_0^t \exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\delta_s\int\limits_0^s \exp\left\{-(2-2\tilde\varepsilon)\int\limits_\tau^s \delta_v\,dv\right\}\delta_\tau^{-1}Ef_\tau^2\,d\tau\,ds,$$

где $0<\lambda<1$. Далее, выбрав величину $\tilde\varepsilon$ такой, что $2-2\tilde\varepsilon > 2(1-\lambda)\kappa$, после интегрирования по частям можно перейти к оценке

$$I_1(t)+I_2(t) \leqslant \hat c_f \int\limits_0^t \exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds$$

с некоторой константой $\hat c_f > 0$. Объединяя полученные результаты, приходим к окончательному соотношению вида

$$EX_t^2 \leqslant \hat c_x \exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\textstyle\int_0^t \delta_v\,dv\right\}x^2 + \hat c_G\int\limits_0^t \exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}G_s^2\,ds +$$

$$+\,\hat c_f\int\limits_0^t \exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds,$$

где $\hat c_x$, $\hat c_G$ – некоторые положительные константы, что и влечёт за собой справедливость оценки (2). Лемма доказана.

Возникновение константы λ, уменьшающей показатель экспоненциальной функции в (8), вызвано наличием ненулевой корреляции $\rho \neq 0$ между винеровскими процессами, задающими аддитивные и мультипликативные возмущения в (1), а также включением внешних воздействий f_t в динамику (1). Нетрудно заметить (см. доказательство леммы 2), что при $\rho = 0$ и $f_t \equiv 0$ оценка (2) остаётся справедливой и при $\lambda = 0$.

Как упоминалось ранее, при потраекторном анализе поведения X_t, $t\to\infty$, актуальной задачей становится получение условий на коэффициенты, гарантирующих сходимость X_t к нулю с вероятностью, равной единице. Результат леммы 2 также может быть использован для проблем такого рода. Заметим, что для процесса X_t, $t \geqslant 0$, являющегося решением уравнения (1), с вероятностью, равной единице, также справедливо представление

$$X_t = \exp\left(\int\limits_0^t a_v\,dv\right)x + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t a_v\,dv\right)G_s\,dW_s +$$

$$+\int\limits_0^t \exp\Big(\int\limits_s^t a_v\,dv\Big) f_s\,ds + \int\limits_0^t \exp\Big(\int\limits_s^t a_v\,dv\Big)\sigma_s X_s\,dw_s,$$

при этом интегралы Лебега и стохастические интегралы Ито определены в силу введённых условий на коэффициенты уравнения (1) и того, что $EX_t^2<\infty$, $t\geqslant 0$ (см. доказательство леммы 1). Тогда, определяя $Y_t^{(0)}=\int_0^t \exp(\int_s^t a_v\,dv)\sigma_s X_s\,dw_s$, $X_t^{(0)}=\int_0^t \exp(\int_s^t a_v\,dv)G_s\,dW_s$ и $\xi_t=\int_0^t \exp(\int_s^t a_v\,dv)f_s\,ds$, приходим к представлению

$$X_t = Y_t^{(0)} + X_t^{(0)} + \xi_t + \exp\Big(\int\limits_0^t a_v\,dv\Big)x, \tag{10}$$

где процессы $Y_t^{(0)}$, $X_t^{(0)}$ и ξ_t, $t\geqslant 0$, допускают стохастические дифференциалы

$$dY_t^{(0)} = a_t Y_t^{(0)}\,dt + \sigma_t X_t\,dw_t, \tag{11}$$

$$dX_t^{(0)} = a_t X_t^{(0)}\,dt + G_t\,dW_t, \tag{12}$$

$$d\xi_t = a_t\xi_t\,dt + f_t\,dt \tag{13}$$

при нулевых начальных условиях $Y_0^{(0)}=X_0^{(0)}=\xi_0=0$. В следующем утверждении приводится условие, позволяющее перейти от анализа сходимости процесса X_t при $t\to\infty$ к анализу поведения процессов $X_t^{(0)}$ и ξ_t, динамика которых не содержит мультипликативных возмущений.

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение A и $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|a_t|/\delta_t\}<\infty$. Если $\int_0^\infty \sigma_t^2\bar h_t\,dt<$ $<\infty$, где функция $\bar h_t$ определена в (8), то в (10) процесс $Y_t^{(0)}\to 0$ п.н. при $t\to\infty$. Тогда процесс $X_t\to 0$, $t\to\infty$, с вероятностью, равной единице, если процессы $X_t^{(0)}\to 0$ и $\xi_t\to 0$ п.н., $t\to\infty$. При этом процессы $Y_0^{(0)}$, $X_0^{(0)}$ и ξ_t, $t\geqslant 0$, заданы в формулах (11)–(13).*

Доказательство. Соответствующее равенству (11) интегральное представление имеет вид $Y_t^{(0)}=I_t+M_t$, где $I_t=\int_0^t a_s Y_s^{(0)}\,ds$, $M_t=\int_0^t \sigma_s X_s\,dw_s$. Слагаемое $M_t\to M_\infty$, $t\to\infty$, п.н. и в среднем квадратичном, здесь M_∞ – случайная величина (с.в.), так как выполнены условие $\limsup\limits_{t\to\infty}\{EM_t^2\}<\infty$, следующее из (2), оценки $EM_t^2=\int_0^t \sigma_s^2 EX_s^2\,ds\leqslant c\int_0^t \sigma_t^2\bar h_t$ и предположения в утверждении доказываемой леммы (здесь и далее $c>0$ – некоторая константа, конкретное значение которой не играет роли). Для слагаемого I_t известно, что $I_t\to$ $\to I_\infty$, $t\to\infty$, в среднем квадратичном и п.н. (I_∞ – с.в.), если $EI_\infty^2<\infty$ (см. [23, с. 97]), где $EI_t^2=\int_0^t\int_0^t a_s a_\tau E(Y_s^{(0)}Y_\tau^{(0)})\,ds\,d\tau$. Ковариация $E(Y_s^{(0)}Y_\tau^{(0)})$ находится как $E(Y_s^{(0)}Y_\tau^{(0)})=$ $=\exp(\int_\tau^s a_v\,dv)[E(Y_\tau^{(0)})^2]$, $\tau\leqslant s$, и $E(Y_s^{(0)}Y_\tau^{(0)})=\exp(\int_s^\tau a_v\,dv)[E(Y_s^{(0)})^2]$, $\tau>s$. Из уравнения

$$dE[Y_t^{(0)}]^2 = 2a_t E[Y_t^{(0)}]^2\,dt + \sigma_t^2 EX_t^2\,dt$$

с начальным условием $E[Y_0^{(0)}]^2=0$ определяется функция $E[Y_t^{(0)}]^2=\int_0^t \exp(\int_s^t a_v\,dv)\sigma_s^2 EX_s^2\,ds$. С учётом вида $E[Y_t^{(0)}]^2$, предположения $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|a_t|/\delta_t\}<\infty$ и неравенств (3) при оценивании приведённого выше выражения для EI_t^2 получаем, что

$$EI_t^2 \leqslant 2c\int\limits_0^t \delta_t \int\limits_0^s \delta_s \exp\Big(-\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big)E[Y_s^{(0)}]^2\,ds\,dt \leqslant 2c\int\limits_0^t \delta_s E[Y_s^{(0)}]^2\,ds \leqslant 2\tilde c\int\limits_0^t \sigma_s^2 EX_s^2\,ds$$

(здесь и далее $\tilde c>0$ – некоторая константа). Таким образом, $EI_\infty^2<\infty$ и $I_t\to I_\infty$, $t\to$ $\to\infty$, п.н. и в среднем квадратичном. Следовательно, $Y_t^{(0)}\to Y_\infty^{(0)}$, $t\to\infty$, $Y_\infty^{(0)}$ – некоторая

с.в., с вероятностью, равной единице, При этом условие $\int_0^\infty \sigma_s^2 EX_s^2\,ds < \infty$ влечёт за собой $E[Y_t^{(0)}]^2 \to 0$, $t \to \infty$, т.е. $Y_t^{(0)} \to 0$ в среднем квадратичном. Из работы [22, с. 49] известно, что тогда предельные случайные величины п.н. совпадают, т.е. $Y_\infty^{(0)} = 0$. Соответственно, из представления (10) следует, что для соотношения $X_t \to 0$ п.н. достаточно потребовать, чтобы с вероятностью, равной единице, выполнялось условие $X_t^{(0)} \to 0$, а также $\xi_t \to 0$, $t \to \infty$. Утверждение доказано.

Обращаясь к утверждению леммы 3, отметим, что (12) и (13) являются линейными уравнениями, поэтому при исследовании асимптотического поведения их решений можно воспользоваться известными результатами. В [17] приведён вид детерминированной функции $h_t^{(0)}$ такой, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{X_t^{(0)}/h_t^{(0)}\} < \infty$ и, очевидно, что ситуация $h_t^{(0)} \to 0$ также влечёт за собой и сходимость $X_t^{(0)} \to 0$ п.н., $t \to \infty$. Кроме того, если известна неслучайная функция $h_t^{(f)}$, для которой с единичной вероятностью справедливо неравенство $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|f_t|/h_t^{(f)}\} < \infty$, то для проверки сходимости п.н. $\xi_t \to 0$, $t \to \infty$, переходят к исследованию при $t \to \infty$ функции $d_t = \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \delta_v\,dv\right) h_s^{(f)}\,ds$.

Замечание 1. Из предположения A и оценки (2) следует, что условие в утверждении леммы 3 справедливо при неравенствах $\int_0^\infty \sigma_t^2\,dt < \infty$ и $\int_0^\infty (Ef_t^2/\delta_t^2)\,dt < \infty$, для выполнения которых достаточно условий $\int_0^\infty G_t^2\,dt < \infty$ и $\int_0^\infty (Ef_t^2/\delta_t)\,dt < \infty$. Более того, условие $\int_0^\infty G_t^2\,dt < \infty$ влечёт за собой соотношение $X_t^{(0)} \to 0$ п.н., $t \to \infty$. Если дополнительно известно, что $\int_0^\infty (Ef_t^2/\delta_t)\,dt < \infty$ или $\int_0^\infty \sqrt{Ef_t^2}\,dt < \infty$, то $\xi_t \to 0$ п.н., а значит, и $X_t \to 0$, $t \to \infty$, с вероятностью, равной единице.

Полученные в лемме 3 условия позволяют выяснить, имеет ли место асимптотическая потраекторная сходимость процесса X_t к нулю, однако это не даёт ответа на вопрос о скорости такой сходимости. Соответствующее утверждение является одним из основных результатов работы и формулируется ниже.

Пусть $\varepsilon > 0$ – действительное число. Положим

$$\mathcal{N}_t(\varepsilon) = \int\limits_0^t \exp\left\{2\bar{\kappa}\int\limits_0^s \delta_v\,dv + (1+\varepsilon)\int\limits_0^s \sigma_v^2\,dv\right\} G_s^2\,ds, \tag{14}$$

где $\bar{\kappa} \geqslant 1$ – константа из условия (3).

Также определим величину $\alpha > 0$ следующим образом:

$$\alpha = \frac{2}{1 + (1 - \kappa/\bar{\kappa})^{-1}} + \beta, \tag{15}$$

где $\beta > 0$ – сколь угодно малое число, константы $\bar{\kappa}$ и κ взяты из (3) и (4) предположения A.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение A. Тогда* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{X_t^2/h_t\} < \infty$ *п.н. для функции* h_t, *задаваемой в виде*

$$h_t = h_t^{(0)} + \int\limits_0^t \exp\left\{-2(1-\lambda_2)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\left(G_s^2 + \frac{f_s^2}{\delta_s}\right) ds \left(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\right)^\alpha, \tag{16}$$

где функция $h_t^{(0)}$ *определяется по формуле*

$$h_t^{(0)} = \exp\left\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv - 2(1-\lambda_0)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\right\} x^2 +$$

$$+\int\limits_0^t \exp\Big\{-2(1-\lambda_1)\int\limits_0^t \delta_v\,dv\Big\}G_s^2\,ds\Big(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big)^{\alpha}\ln\Big(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\Big),$$

если при любом $\varepsilon>0$ *выполняется условие* $\mathcal{N}_t(\varepsilon)\to\infty,\ \ t\to\infty,$ *и*

$$h_t^{(0)}=\exp\Big\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv-2(1-\lambda_0)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big\}(1+x^2),$$

если для некоторого $\varepsilon>0$ *функция* $\mathcal{N}_\infty(\varepsilon)<\infty$.

При этом функция $\mathcal{N}_t(\varepsilon)$ *задаётся в (14),* λ_i *– произвольные константы,* $0<\lambda_i<1$, $i=0,1,2$. *Для случая* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}>0$ *величина* α *определена в (15), и* $\alpha>0$ *– сколь угодно малое число при* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}=0$. *Кроме того, в случае* $\int_0^\infty \sigma_t^2\,dt<\infty$ *можно положить* $\lambda_1=0$.

Доказательство. Рассмотрим представление (5) и запишем оценку

$$X_t^2\leqslant 2(I_t+J_t^{(1)}+J_t^{(2)})+2\Phi^2(t,0)x^2, \tag{17}$$

где

$$I_t=\Phi^2(t,0)M_t^2\quad\text{при}\quad M_t=\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)G_s\,dW_s, \tag{18}$$

$$J_t^{(1)}=\Phi^2(t,0)\Big(\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)f_s\,ds\Big)^2,\quad J_t^{(2)}=\rho^2\Phi^2(t,0)\Big(\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)\sigma_sG_s\,ds\Big)^2.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского и условия $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}<\infty$ слагаемые $J_t^{(1)}$ и $J_t^{(2)}$ оцениваются следующим образом:

$$J_t^{(1)}+J_t^{(2)}\leqslant c\Phi^2(t,0)(\bar\Phi(t,0))^{-2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi^{-2}(s,0)(\bar\Phi^{-1}(s,0))^{2\varepsilon}\Big(\frac{f_s^2}{\delta_s}+\rho^2G_s^2\Big)\,ds, \tag{19}$$

здесь $\bar\Phi(t,s)=\exp\big(\int_0^t a_v\,dv\big)$, $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число. Далее анализируются две ситуации в зависимости от поведения $\int_0^t \sigma_v^2\,dv,\ \ t\to\infty$.

I. Рассмотрим слагаемое $I_t=\Phi^2(t,0)M_t^2$ из (17). Так как M_t – мартингал (см. (18)), то при функции $\mathcal{N}_t(\varepsilon)$, определённой в (14), выполнения при некотором $\varepsilon>0$ условия $\mathcal{N}_\infty(\varepsilon)<\infty$ будет достаточно для существования M_∞ в силу соотношения $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\langle M_t\rangle/\mathcal{N}_t(\varepsilon)\}<\infty$, здесь $\langle M_t\rangle=\int_0^t \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds$ – квадратическая характеристика M_t. При этом из закона повторного логарифма и формулы (6) следует, что с единичной вероятностью справедлива оценка

$$\Phi^2(t,0)\leqslant c\exp\Big\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv-(1-\varepsilon)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big\},\quad t>t_0(\omega),\quad \omega\in\Omega,$$

$\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число, $t_0(\omega)$ – п.н. конечный момент.

Следовательно, $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|I_t|/h_t^{(0)}\}<\infty$ п.н. для функции $h_t^{(0)}=\exp\{-2\int_0^t \delta_v\,dv-(1-\varepsilon)\times\int_0^t \sigma_v^2\,dv\}$. Пусть теперь при любом $\varepsilon>0$ имеет место $\mathcal{N}_t(\varepsilon)\to\infty,\ \ t\to\infty$. Применим к процессу M_t в (18) закон повторного логарифма для мартингалов (см. [24]), получив оценку

$M_t^2 \leqslant c\langle M_t\rangle \ln\ln\langle M_t\rangle$ п.н. при $t > t_0(\omega)$. Вследствие предположения A и формулы (6) имеем, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\ln\ln\langle M_t\rangle/\ln(\int_0^t \delta_v\,dv)\} < \infty$. Тогда с вероятностью, равной единице, справедлива оценка

$$I_t^2 \leqslant c\tilde{J}_t \ln\biggl(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\biggr), \quad t > t_0(\omega), \tag{20}$$

где

$$\tilde{J}_t = \Phi^2(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds. \tag{21}$$

Далее, пусть $\int_0^t \sigma_v^2\,dv \to \infty$, $t\to\infty$, и при фиксированном $\omega\in\Omega$ для оценки $\Phi^2(t,s)$ используются законы повторного логарифма для приращений винеровского процесса [25, 26]. Сделаем замену переменной времени $\tilde{t} = \int_0^t \sigma_v^2\,dv$, получив процесс $\hat{w}_{\tilde{t}} = \int_0^t \sigma_v\,dw_v$, $\hat{w}$ – некоторый винеровский процесс. Тогда для малого $\varepsilon > 0$ с единичной вероятностью выполняются неравенства

$$|\hat{w}_{\tilde{t}} - \hat{w}_{\tilde{s}}| \leqslant \sqrt{2(1+\varepsilon)}\sqrt{\tilde{t}-\tilde{s}}\sqrt{\ln\frac{\tilde{t}}{\tilde{t}-\tilde{s}} + \ln\ln\{(\tilde{t}-\tilde{s})\vee e\}} \tag{22}$$

при $\tilde{t} > \tilde{t}_0(\omega)$, $0 \leqslant \tilde{s} \leqslant \tilde{t} - (1/e-\varepsilon)$,

$$|\hat{w}_{\tilde{t}} - \hat{w}_{\tilde{s}}| \leqslant \sqrt{2}N(\omega)\sqrt{\tilde{t}-\tilde{s}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{(\tilde{t}-\tilde{s})}}, \quad 0 \leqslant \tilde{t}-\tilde{s} \leqslant 1/e-\varepsilon, \tag{23}$$

где $\tilde{t}_0(\omega)$ – п.н. конечный момент времени, $N(\omega)$ – п.н. конечная с.в., запись $A\vee B$ означает $\max\{A,B\}$. В результате для функции (21) имеем оценку

$$\tilde{J}_t \leqslant \tilde{J}_t^{(1)} + \tilde{J}_t^{(2)} + \tilde{J}_t^{(3)}, \quad t > \hat{t}_0 = \max(t_0,t_1), \quad t_1 = \inf\biggl\{s : \int\limits_0^s \sigma_v^2\,dv > \tilde{t}_0\biggr\}.$$

При этом $\tilde{J}_t^{(1)} = c\exp\bigl(-2\int_0^t \delta_v\,dv - (1-\varepsilon)\int_0^t \sigma_v^2\,dv\bigr)\chi_{\hat{t}_0}$, где $\chi_{\hat{t}_0}$ – п.н. конечная с.в.; остальные интегралы

$$\tilde{J}_t^{(2)} = \Phi^2(t,0)\int\limits_{\hat{t}_0}^{t-\hat{t}_1} \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds, \quad \tilde{J}_t^{(3)} = \Phi^2(t,0)\int\limits_{t-\hat{t}_1}^{t} \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds,$$

где момент времени $\hat{t}_1 = t - \inf\{t : \int_0^t \sigma_v^2\,dv > \tilde{t} - (1/e-\varepsilon)\}$.

При оценивании $\tilde{J}_t^{(2)}$ сверху при помощи (22) замечаем, что максимальное значение функции $g(y) = -b_0 y + \sqrt{y}\sqrt{b - b_1 y + b_1\ln\ln(y\vee e)}$, где $1/e-\varepsilon \leqslant y \leqslant e^b$, $b \gg b_0, b_1$ ($\gg$ – знак много больше), не превышает величины $b/(4b_0)$. С использованием (3) и (4) предположения А записывается оценка

$$\exp\biggl\{2\lambda_1\int\limits_0^t a_v\,dv\biggr\} \leqslant \hat{\kappa}_0\exp\biggl\{-\lambda_1(1-\kappa/\bar{\kappa})^{-1}\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr\}$$

при произвольной постоянной λ_1, $0<\lambda_1<1$, где $\hat{\kappa}_0 > 0$ – некоторая константа. Полагая $b = 8(1+\varepsilon)\ln\tilde{t}$, $b_1 = 8(1+\varepsilon)$ и $b_0 = 1 + \lambda_1(1-\kappa/\bar{\kappa})^{-1}$, получаем неравенство

$$\Phi^2(t,s) \leqslant c\exp\biggl\{2(1-\lambda_1)\int\limits_s^t a_v\,dv\biggr\}\biggl(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr)^{\alpha}$$

для $\hat{t}_0 \leqslant s \leqslant t - \hat{t}_1$, показатель $\alpha > 0$ определён в (15). Отметим, что в случае $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} = 0$ отношение $\kappa/\bar{\kappa}$ можно заменить на число, близкое к единице, и тогда величина α окажется сколь угодно малой.

Для определения асимптотической верхней границы интеграла $\tilde{J}_t^{(3)}$ учитывается (23) и тот факт, что функция $g_1(y) = -y + \sqrt{2}N(\omega)\sqrt{y\ln\ln(1/y)}$ при $0 \leqslant y \leqslant 1/e - \varepsilon$ п.н. ограничена, точнее $g_1(y) \leqslant \tilde{c}N(\omega)$. Тогда $\Phi^2(t,s) \leqslant c\exp\{-2\int_s^t \delta_v\,dv + \tilde{c}N(\omega)\}$ и при интегрировании соответствующее выражение будет мажорироваться верхней оценкой для $\tilde{J}_t^{(2)}$ в силу предположения $\int_0^t \sigma_v^2\,dv \to \infty$, $t \to \infty$.

Учитывая полученные выше оценки, можно записать вид верхней функции для $\tilde{J}_t$ из (21):

$$\tilde{J}_t \leqslant c\int\limits_0^t \exp\Big\{-2(1-\lambda_1)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big\}G_s^2\,ds\Big(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big)^{\alpha},$$

где $0 < \alpha < 2$ и при этом α определяется в (15), если $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} > 0$, в противном случае α – произвольное положительное число.

Проведённые выше рассуждения также используются при построении оценки для $J_t^{(1)}+J_t^{(2)}$ из (19) с заменой λ_1 на λ_2. Возвращаясь к (17) и (20), будем иметь неравенство

$$X_t^2 \leqslant ch_t^{(0)} + c\int\limits_0^t \exp\Big\{-2(1-\lambda_2)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big\}\Big(\rho^2G_s^2 + \frac{f_s^2}{\delta_s}\Big)\,ds\Big(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big)^{\alpha}, \tag{24}$$

где $t > \max\{t_0(\omega), \hat{t}_0(\omega)\}$,

$$h_t^{(0)} = \int\limits_0^t \exp\Big\{-2(1-\lambda_1)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big\}G_s^2\,ds\Big(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big)^{\alpha}\ln\Big(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\Big) +$$

$$+\exp\Big\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv - 2(1-\lambda_0)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\Big\}x^2$$

при выбранных константах λ_0, λ_1 и λ_2 таких, что $0 < \lambda_0 < 1$, $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1$.

II. В случае $\int_0^\infty \sigma_v^2\,dv < \infty$ нетрудно заметить, что с вероятностью, равной единице, имеет место сходимость $\int_0^t \sigma_v\,dw_v \to \chi_\infty$, где $\chi_\infty = \int_0^\infty \sigma_v\,dw_v$ – п.н. конечная с.в. Следовательно, $|\int_s^\infty \sigma_v\,dw_v| < \varepsilon$ п.н. при $s \geqslant \hat{t}_0(\omega)$, $\hat{t}_0(\omega)$ – п.н. конечный момент. Тогда для функции $\Phi(t,s)$ при $t \geqslant s > \hat{t}_0(\omega)$ справедлива оценка

$$\Phi^2(t,s) \leqslant \kappa_1\exp\Big\{-2\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big\}\exp(2\varepsilon) \leqslant \hat{\kappa}_1\exp\Big\{-2\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big\} \quad \text{п.н.},$$

где $\hat{\kappa}_1 = \kappa_1\exp(2\varepsilon)$. Соответственно, переходя к оцениванию I_t в (20), получаем, что при $t > \max\{t_0(\omega), \hat{t}_0(\omega)\}$ с единичной вероятностью выполняется неравенство

$$I_t \leqslant c\int\limits_0^t \exp\Big\{-2\int\limits_s^t \delta_v\,dv\Big\}G_s^2\,ds\ln\Big(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\Big),$$

а при оценке сверху суммы $J_t^{(1)} + J_t^{(2)}$ из (19) приходим к соотношению

$$J_t^{(1)} + J_t^{(2)} \leqslant c \int\limits_0^t \exp\Big\{ -2(1-\lambda_2) \int\limits_s^t \delta_v \, dv \Big\} \Big(G_s^2 + \frac{f_s^2}{\delta_s} \Big) \, ds \quad \text{п.н.}$$

Объединяя все оценки, получаем аналог формулы (24) со значениями $\lambda_1 = 0$ и $\alpha = 0$. Далее положив $h_t^{(0)} = \exp\{-2\int_0^t \delta_v \, dv - 2(1-\lambda_0)\int_0^t \sigma_v^2 \, dv\}(x^2+1)$ для случая $\mathcal{N}_\infty(\varepsilon) < \infty$, имеем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Сравнивая полученный в теореме 1 результат с оценкой в работе [17] только для аддитивных возмущений, можно заметить, что новые факторы, включённые в динамику уравнения (1), нашли своё отражение в виде соответствующей оценки (16). Наличие мультипликативных шумов увеличивает верхнюю границу пропорционально значению $(\int_0^t \sigma_v^2 \, dv)^\alpha$, наряду с предположением о корреляции $\rho \neq 0$ и случайных внешних воздействиях f_t. При этом уменьшить показатель α можно путём привлечения свойства (4) предположения А, а также в случае $\sigma_t^2/\delta_t \to 0$, $t \to \infty$. Более того, стоит отметить (см. доказательство теоремы 1), что оценка вида (16) остаётся верной и при $\kappa < 0$ в (4), требуется лишь корректировка в выражении для α. В частности, при $a_t \equiv a < 0$, $\sigma_t \equiv \sigma \neq 0$, константа $\kappa = 1 + \sigma^2/(2a)$. Тогда $\alpha = 2(1 - 2a/\sigma^2)^{-1} + \beta$, т.е. $\alpha < 1$ при $2|a| > \sigma^2$, когда $\kappa > 0$ в (4), и $1 < \alpha < 2$ для $2|a| \leqslant \sigma^2$, $\kappa \leqslant 0$ в (4). Таким образом, из (16) следует результат, ранее полученный в статье [15], где предполагалось $G_t \equiv 0$, $f_t > 0$ – детерминированная функция, $\dot{f}_t/f_t \to 0$, $t \to \infty$ ($\dot{}$ – производная функции по времени). Вместе с тем неравенство (4) играло важную роль в работе [16], где также рассматривались постоянные функции $a_t \equiv a$ и $\sigma_t \equiv \sigma$ при $\rho = 1$ и неслучайной f_t. Приведённое в [16] интегральное условие для сходимости п.н. к нулю процесса X_t, имевшее вид

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \exp\{-\gamma(t-s)m\}[(\sup_{s \leqslant v \leqslant t} |G_v|)^m + (\sup_{s \leqslant v \leqslant t} |f_v - \sigma^2 G_v|)^m] \, ds \, dt < \infty,$$

при некоторых константах γ, m таких, что $0 < \gamma < \kappa$, $0 < m < 1 + 2|a|\sigma^{-2}$, можно отнести к аналогам требования $\int_0^\infty (G_t^2 + f_t^2) \, dt < \infty$ в замечании 1.

В следующих примерах рассматривается применение утверждения теоремы 1, а также лемм 2 и 3 при анализе сходимости к нулю решений конкретных линейных СДУ. Далее запись $g_t \sim \tilde{g}_t$ для двух скалярных функций $g_t, \tilde{g}_t \geqslant 0$ означает, что $0 < \lim\limits_{t \to \infty} (g_t/\tilde{g}_t) < \infty$.

Пример 1. Пусть в уравнении (1) отсутствуют внешние воздействия, т.е. $f_t \equiv 0$, и рассматривается степенное семейство коэффициентов в (1), т.е. $\delta_t \sim kt^p$, $G_t \sim t^\mu$, $\sigma_t \sim t^\gamma$, p, μ, γ – действительные числа, константа $k > 0$. По предположению А $2\mu \leqslant p$ и $2\gamma \leqslant p$, при этом $p \geqslant -1$. Из утверждения леммы 2 следует, что если $\bar{h}_t \to 0$, $t \to \infty$, то и $EX_t^2 \to 0$, функция $\bar{h}_t$ задаётся формулой (8). Замечаем, что при $p > -1$ функция $\bar{h}_t \sim t^{2\mu - p}$. Для случая $p = -1$ имеем $\bar{h}_t \sim t^{2\mu+1}$ при $2k(1-\lambda)\kappa + 2\mu > -1$, $\bar{h}_t \sim t^{-2k(1-\lambda)\kappa} \ln t$, если $2k(1-\lambda)\kappa + 2\mu = -1$ и $\bar{h}_t \sim t^{-2k(1-\lambda)\kappa}$ при $2k(1-\lambda)\kappa + 2\mu < -1$. Таким образом, условие $2\mu < p$ обеспечивает $\bar{h}_t \to 0$, а значит, и сходимость к нулю в среднем квадратичном для процесса X_t при $t \to \infty$. При исследовании сходимости с единичной вероятностью используются оценки из теоремы 1 и леммы 3. При $2\gamma < p$ получаем из (16), что $h_t \leqslant \bar{c} t^{2\mu - p} t^\alpha \ln t$, здесь $\alpha > 0$ – сколь угодно малое число, $\bar{c} > 0$ – некоторая константа. Следовательно, при $2\mu < p$ также гарантируется, что $X_t^2 \to 0$ п.н. при $t \to \infty$. Пусть далее $2\gamma = p$. В случае $p = -1$ множитель $(\int_0^t \sigma_v^2 \, dv)^\alpha \sim \ln^\alpha t$ и требование $2\mu < p$ сохраняется, если нужно обеспечить $X_t^2 \to 0$ п.н., $t \to \infty$. Если $p > -1$, то $h_t \sim t^{(2\mu - p)} t^{(p+1)\alpha} \ln t$, где показатель α определяется в (15). Соответственно, при $2\mu < p - (p+1)\alpha$ имеем сходимость $X_t^2 \to 0$ с вероятностью, равной единице, $t \to \infty$. Вместе с тем условие $\int_0^\infty \sigma_t^2 \bar{h}_t \, dt < \infty$ в лемме 3 выполнено при $2\mu < -1$ и тогда $X_t^2 \to 0$ п.н. Таким образом, при $p > -1$ формулируется общее условие вида $2\mu < \max\{-1, p - (p+1)\alpha\}$, дающее при $t \to \infty$ сходимость $X_t^2 \to 0$ п.н. Это требование также

совпадает с условием из примера в статье [16], где рассмотрен случай $p = \gamma = 0$ и проведён анализ сходимости $X_t \to 0$ с единичной вероятностью.

Пример 2. В [13] рассматривалась фармакокинетическая модель концентрации химического вещества в виде случайного процесса с двумя компонентами $(\tilde{Y}_t, \hat{Y}_t)$, $t \geqslant 0$. При этом процессы $\tilde{Y}_t$, $\hat{Y}_t$, $t \geqslant 0$, представляли собой отклонения текущих концентраций от плановых значений и уравнения динамики имели вид

$$d\tilde{Y}_t = -k_0\tilde{Y}_t\,dt + \tilde{\sigma}d\tilde{Y}_t d\tilde{w}_t, \tag{25}$$

$$d\hat{Y}_t = k_0\tilde{Y}_t\,dt - k_1\hat{Y}_t\,dt + \hat{\sigma}\hat{Y}_t d\hat{w}_t \tag{26}$$

с неслучайными начальными условиями $\tilde{Y}_0 = \tilde{y}$, $\hat{Y}_0 = \hat{y}$; $k_0, k_1 > 0$ – темпы абсорбции (в (26) постоянная k_0 также задавала темп поступления вещества); $(\tilde{w}_t, \hat{w}_t)$, $t \geqslant 0$, – двумерный винеровский процесс; $\tilde{\sigma}, \hat{\sigma} > 0$ – константы, характеризующие степень влияния случайных факторов. Процесс $(\tilde{Y}_t, \hat{Y}_t)$, $t \geqslant 0$, получался после воздействия выбранной авторами работы [13] стратегии управлении, и возникал вопрос, насколько это способствует достижению системой нулевого состояния в долгосрочном периоде. Нетрудно заметить, что процесс в уравнении (25) – геометрическое броуновское движение, а (26) задаёт так называемое неоднородное геометрическое броуновское движение. Таким образом, $\tilde{Y}_t = \tilde{y}\exp\{-k_0t - (1/2)\tilde{\sigma}^2t + \tilde{\sigma}\tilde{w}_t\}$ и, очевидно, $\tilde{Y}_t \to 0$ п.н. $t \to \infty$. Для исследования сходимости $\hat{Y}_t$ используется утверждение теоремы 1. Полагая $X_t = \hat{Y}_t$, $x = \hat{y}$, $f_t = k_0\tilde{Y}_t$, $a_t \equiv -k_1$, $\sigma_t \equiv \hat{\sigma}$, получаем вид уравнения (1). При этом условия (2) и (3) из предположения A выполняются для $\delta_t = -k_1$. Так как в [13] не делается предположений о соотношении k_1 и $\tilde{\sigma}^2$, то в условии (4) $\kappa = 1 - \hat{\sigma}^2/(2k_1)$. Из (16) имеем

$$h_t \sim \exp\{-2k_1t - (1-\lambda_0)\hat{\sigma}^2t\}\hat{y}^2 + t^\alpha k_0^2\tilde{y}^2\int\limits_0^t \exp\{-2k_1(1-\lambda_1)(t-s)\}\exp\{-2k_0s - \tilde{\sigma}^2s + 2\tilde{\sigma}\tilde{w}_s\}\,ds,$$

где λ_0, λ_1 – константы, $0 < \lambda_0 < 1$, $0 < \lambda_1 < 1$; $\alpha = 2 + \beta$, $\beta > 0$ – сколь угодно малое число. При $2k_1 - 2k_0 - \tilde{\sigma}^2 < 0$ существует с.в.

$$\chi_\infty = \int\limits_0^\infty \exp\{2k_1(1-\lambda_1)s\}\exp\{-2k_0s - \tilde{\sigma}^2s + 2\tilde{\sigma}\tilde{w}_s\}\,ds$$

(см. [27]), и тогда выполняется оценка $\limsup\limits_{t\to\infty}\{h_t/\hat{h}_t\} < \infty$, где $\hat{h}_t = \exp\{-2k_1(1-\lambda)t\}$, при любой константе λ, $0 < \lambda < 1$. Если же $2k_1 - 2k_0 - \tilde{\sigma}^2 \geqslant 0$, то из закона повторного логарифма имеем, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{h_t/\hat{h}_t\} < \infty$ для $\hat{h}_t = \exp\{-2k_0t - (1-\lambda)\tilde{\sigma}^2t\}$ при любой константе λ, $0 < \lambda < 1$. Таким образом, $\hat{Y}_t \to 0$ с единичной вероятностью при $t \to \infty$, и при этом $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\hat{Y}_t^2/\exp(-\gamma t)\} < \infty$, величина $\gamma = \min\{2k_1(1-\lambda), 2k_0 + (1-\lambda)\tilde{\sigma}^2\}$ для любой константы $0 < \lambda < 1$.

2. Приложение к моделированию аномальных диффузий. Физические процессы, получившие название аномальных диффузий, часто наблюдаются в реальном мире. Термин “аномальная” принят вследствие того, что ряд известных свойств этих процессов существенно отличается от “нормальных” диффузий, моделируемых броуновским движением. Базовой характеристикой, приписываемой любой диффузии, является среднеквадратичное перемещение (MSD, mean-square displacement). Тогда аномальная диффузия определяется как процесс с нелинейным ростом во времени среднеквадратичного перемещения.

Определение 1. Пусть X_t, $t \geqslant 0$, задаёт процесс скорости и $T > 0$ – длина горизонта наблюдения. Тогда $Y_T = \int_0^T X_t\,dt$ – соответствующий процесс перемещения при начальном условии $Y_0 = 0$. Среднеквадратичное перемещение определяется по формуле

$$D_T = EY_T^2 = E\Big(\int\limits_0^T X_t\,dt\Big)^2 = \int\limits_0^T\int\limits_0^T E(X_tX_s)\,ds\,dt.$$

Отметим, что если X_t – процесс “белого шума”, то $Y_T = B_T$, где B_t, $t \geqslant 0$, – броуновское движение, $D_T = T$.

Определение 2 [6]. Пусть $\hat{d}_1 = \liminf\limits_{T\to\infty}(D_T/T)$ и $\hat{d}_2 = \limsup\limits_{T\to\infty}(D_T/T)$. Тогда при $0 < d_1 \leqslant d_2 < \infty$ диффузия называется нормальной, в противном случае – аномальной (для $d_2 = 0$ – субдиффузией), при $d_1 = \infty$ – супердиффузией.

Среднеквадратичное перемещение относится к важным статистическим характеристикам, однако не даёт ответа на вопрос о возможных колебаниях отдельной траектории случайного процесса Y_T при $T \to \infty$. Как известно, этой цели служит понятие верхней функции процесса, когда соотношение $\limsup\limits_{T\to\infty}\{Z_T/\tilde{h}_T\} < \infty$ выполняется п.н. для случайного процесса $Z_T \geqslant 0$, $T \geqslant 0$, и функции $\tilde{h}_T \geqslant 0$, которая обычно выбирается детерминированной. В частности, из закона повторного логарифма следует, что $\tilde{h}_T = \sqrt{T\ln\ln T}$ для $Z_T = |B_T|$. Следующее ниже определение основано на идее сравнения процессов Y_T с функцией $\sqrt{T\ln\ln T}$ при $T \to \infty$.

Определение 3. Если $\limsup\limits_{T\to\infty}\{|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T}\} = 0$, то процесс называется субдиффузией по отношению к верхней функции.

Отметим, что если $Y_T \to Y_\infty$ п.н., $T \to \infty$, где Y_∞ – с.в., то имеет место “вырожденный” случай субдиффузии, который также является следствием ограниченности D_T, $T \geqslant 0$.

Уравнение вида (1) обобщает ранее известные описания диффузий, допуская зависящие от времени коэффициенты, коррелированные шумы разных типов, а также случайные внешние воздействия. В данной части работы результаты п. 1 используются для выявления субдиффузий. На основе результатов леммы 2 и теоремы 1 формулируется следующее

Утверждение. *Пусть выполнено предположение A. Тогда:*

а) если для функции $\bar{h}_t$ из (8) выполняется $\bar{h}_t t \to 0$, $t \to \infty$, то процесс X_t задаёт субдиффузию в среднем квадратичном;

б) если для функции h_t из (16) выполняется $\{\bar{h}_t(t/\ln\ln t)\} \to 0$, $t \to \infty$, то процесс X_t описывает субдиффузию по отношению к верхней функции.

Доказательство. Из оценки $D_T = \int_0^T\int_0^T E(X_tX_s)\,ds\,dt \leqslant (\int_0^T \sqrt{EX_t^2}\,dt)^2$ и результата леммы 2 следует, что выполнение условия $\bar{h}_t t \to 0$, $t \to \infty$, гарантирует и соотношение $D_T/T \to 0$, $T \to \infty$, т.е. утверждение а). В б) используется вид h_t, полученный в теореме 1, оценка $|X_t| \leqslant c\sqrt{h_t}$ п.н. при $t > t_0(\omega)$, $t_0(\omega)$ – п.н. конечный момент, и также нетрудно установить, что наличие условия $\{h_t(t/\ln\ln t)\} \to 0$, $t \to \infty$, влечёт за собой при $T \to \infty$ сходимость $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ с единичной вероятностью. Утверждение доказано.

В следующем ниже примере показывается, что условия в утверждении можно ослабить.

Пример 3. Пусть в уравнении (1) коэффициенты $a_t \equiv -1$, $f_t \equiv 0$, начальное условие $X_0 = 0$, и предположим также, что выполнено неравенство (4). Тогда (1) принимает вид

$$dX_t = -X_t\,dt + G_t\,dW_t + \sigma_t X_t\,dw_t,$$

откуда процесс перемещения определяется по формуле $Y_T = M_T^{(1)} + M_T^{(2)} - X_T$, где $M_T^{(1)} = \int_0^T G_t\,dW_t$, $M_T^{(2)} = \int_0^T \sigma_t X_t\,dw_t$. При этом $D_T \leqslant 2(E[M_T^{(1)}]^2 + E[M_T^{(2)}]^2 + EX_T^2)$, где $E[M_T^{(1)}]^2 = \int_0^T G_s^2\,ds$, $E[M_T^{(2)}]^2 = \int_0^T \sigma_s^2 EX_s^2\,ds$, оценка для EX_t^2 приведена в (2). Замечаем, что условие $\int_0^\infty G_t^2\,dt < \infty$ влечёт за собой при $T \to \infty$ сходимости $EX_T^2 \to 0$, $E[M_T^{(1)}]^2 + E[M_T^{(1)}]^2 \to E[M_\infty^{(1)}]^2 + E[M_\infty^{(1)}]^2$ и ограниченность D_T, т.е. субдиффузию. Если же $G_t \to 0$, $t \to \infty$, то также $EX_T^2 \to 0$, $\{E[M_T^{(1)}]^2 + E[M_T^{(1)}]^2\}/T \to 0$ при $T \to \infty$, и вновь имеем случай субдиффузии в среднем квадратичном. Переходя к потраекторному анализу процесса перемещения

Y_T, $T \to \infty$, рассмотрим две ситуации. При $\int_0^\infty G_t^2\,dt < \infty$ наблюдаются сходимости $M_T^{(1)} \to \to M_\infty^{(1)}$, $M_T^{(2)} \to M_\infty^{(2)}$, $T \to \infty$. Помимо этого, согласно лемме 3, $X_T \to 0$ п.н., и тогда $Y_T \to Y_\infty$ с вероятностью, равной единице, $T \to \infty$, и получается "вырожденный" случай субдиффузии. Пусть теперь $\int_0^T G_t^2\,dt \to \infty$, $T \to \infty$. По закону повторного логарифма для мартингалов с единичной вероятностью выполняются соотношения

$$\limsup_{T\to\infty}\left\{M_T^{(i)}/\sqrt{\langle M_T^{(i)}\rangle \ln\ln\langle M_T^{(i)}\rangle}\right\} < \infty, \quad i = 1, 2,$$

здесь квадратические характеристики $\langle M_T^{(1)}\rangle = \int_0^T G_t^2\,dt$, $\langle M_T^{(2)}\rangle = \int_0^T \sigma_t^2 X_t^2\,dt$. Предположим, что $X_t \to 0$ и $G_t \to 0$, $t \to \infty$, тогда для $i = 1, 2$ $\langle M_T^{(i)}\rangle/T \to 0$, $T \to \infty$, а значит, и $|Y_T|/\sqrt{T \ln\ln T} \to 0$ с вероятностью, равной единице, при $T \to \infty$. Воспользовавшись теоремой 1 и ограниченностью σ_t^2, находим, что выполнение условия $\hat{h}_t = G_t^2 \ln t(\int_0^t \sigma_v^2\,dv)^\alpha \to 0$, $t \to \infty$, влечёт за собой сходимость $X_t \to 0$ п.н., $t \to \infty$, при этом константа α задаётся в (15). Таким образом, требование $\hat{h}_t \to 0$ будет достаточным для выявления субдиффузии в случае $\int_0^T G_t^2\,dt \to \infty$, $T \to \infty$.

Предположение D. Темп устойчивости δ_t является монотонной дифференцируемой функцией, $t \geqslant 0$, и для функции $\phi_t = \dot{\delta}_t/\delta_t^2$ ($\dot{}$ – знак производной по времени) выполняется по меньшей мере одно из двух соотношений:

$$\lim_{t\to\infty}\phi_t = \hat{\kappa}_1, \quad \lim_{t\to\infty}(1/\phi_t) = \hat{\kappa}_2, \tag{27}$$

где $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ – неположительные константы.

Предположение D ранее вводилось в работе [28] при исследовании перемещения Y_T, задаваемого процессом Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами, т.е. при $\sigma_t \equiv 0$, $f_t \equiv 0$ в уравнении (1). Следует отметить, что случаи $\hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2 > 0$ соответствуют $\delta_t < 0$, что не удовлетворяет предположению A, поэтому они здесь не рассматриваются. Основным результатом данного пункта является следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения A и D со значением $\hat{\kappa}_1 > -2$. Тогда, если для функции $\bar{h}_t$, определённой в (8), и коэффициентов уравнения (1) выполняется:*

а) $\dfrac{G_t^2 + \sigma_t^2\bar{h}_t + tEf_t^2}{\delta_t^2} \to 0$, $t \to \infty$, то процесс X_t задаёт субдиффузию в среднем квадратичном;

б) функция $\dfrac{G_t^2 + \sigma_t^2\bar{h}_t}{\delta_t^2}\sqrt{\dfrac{t}{\ln\ln t}}$ ограничена при $t \to \infty$, а также имеет место одно из двух условий:

$$\frac{|f_t|}{\delta_t}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}} \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad t \to \infty,$$

или же ограничено выражение

$$t\frac{Ef_t^2}{\delta_t^2}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}}, \quad t \to \infty,$$

то процесс X_t задаёт субдиффузию по отношению к верхней функции.

Доказательство. Используется представление (10), при помощи которого находится оценка

$$D_T \leqslant 2E[I_T^{(1)}]^2 + 2E[I_T^{(2)}]^2 + 2E[I_T^{(3)}]^2 + 2c\int_0^T \exp\left\{-2\int_0^t \delta_v\,dv\right\}dt x^2,$$

где $E[I_T^{(1)}]^2 = \int_0^T \int_0^T E(Y_t^{(0)} Y_s^{(0)})\, ds\, dt$, и при этом

$$E[I_T^{(1)}]^2 \leqslant 2c \int\limits_0^T \int\limits_0^t \exp\Big\{ -\int\limits_s^t \delta_v\, dv \Big\} \sigma_s^2 E X_s^2\, ds\, dt,$$

см. доказательство леммы 3. Также (см. [6]) $E[I_T^{(2)}]^2 = \int_0^T \int_0^T E(X_t^{(0)} X_s^{(0)})\, ds\, dt$ и $E[I_T^{(2)}]^2 \leqslant 2c \int_0^T \int_0^t \exp\{-\int_s^t \delta_v\, dv\} G_s^2\, ds\, dt$. Для $I_T^{(3)} = \int_0^T \xi_t\, dt$ в силу неизвестности ковариационной функции $E(f_t f_s)$, входящей в $E(\xi_t \xi_s)$, используется неравенство

$$E[I_T^{(3)}]^2 \leqslant \Big(\int\limits_0^T \int\limits_0^t \exp\Big\{ -\int\limits_s^t \delta_v\, dv \Big\} \sqrt{E f_s^2}\, ds\, dt \Big)^2.$$

Далее, при $\hat{\kappa}_1 > -2$ выполняется неравенство $(\dot{\delta}_t/\delta_t^2) + 2 > \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon} > 0$ – сколь угодно малое число, $t > t_0(\tilde{\varepsilon})$, откуда при условии а), что $G_t^2 + \sigma_t^2 E X_t^2 < \varepsilon \delta_t^2 (\dot{\delta}_t/\delta_t^2 + 2)$, $\varepsilon > 0$ также сколь угодно малое число, $t > t_1(\varepsilon)$. Умножая это неравенство на $\exp\{-2\int_0^t \delta_v\, dv\}$, при интегрировании получаем, что

$$E[Y_t^{(0)}]^2 + E[X_t^{(0)}]^2 \leqslant c \exp\Big\{ -2\int_0^t \delta_v\, dv \Big\} \int\limits_0^t \exp\Big\{ 2\int\limits_0^s \delta_v\, dv \Big\} (G_s^2 + \sigma_s^2 E X_s^2)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \delta_t + c_0 \exp\Big\{ -2\int\limits_0^t \delta_v\, dv \Big\}\, ds$$

при некоторой константе $c_0 > 0$. Дальнейшие операции умножения и интегрирования приводят к соотношению

$$E[I_T^{(1)}]^2 + E[I_T^{(2)}]^2 \leqslant \varepsilon T + (c_0/2) \Big(\int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\, dv \Big\}\, dt \Big)^2 + c_1 \int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\, dv \Big\}\, dt + c_2,$$

где $c_1, c_2 > 0$ – некоторые константы, $T > T_0(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})$. Тогда, очевидно, $\{E[I_T^{(1)}]^2 + E[I_T^{(2)}]^2\}/T \to \to 0$, $T \to \infty$. Для приведённой выше оценки $E[I_T^{(3)}]^2$ аналогичным образом показывается, что ввиду наличия требования $\hat{\kappa}_1 > -2$ условие $\{(E f_t^2/\delta_t^2)t\} \to 0$, $t \to \infty$, влечёт за собой сходимость $E[I_T^{(3)}]^2/T \to 0$. Также при $\hat{\kappa}_1 > -2$ выражение $\{\int_0^T \exp\{-2\int_0^t \delta_v\, dv\}\, dt x^2/T\} \to 0$, $T \to \infty$. Таким образом, приходим к выводу, что $D_T/T \to 0$, $T \to \infty$, и получаем субдиффузию в среднем квадратичном.

Для доказательства утверждения б) требуется рассмотреть отношение $|Y_T|/\sqrt{T \ln\ln T}$. Используется оценка

$$|Y_T| \leqslant I_T^{(1)} + I_T^{(2)} + I_T^{(3)} + \int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\, dv \Big\}\, dt |x|,$$

где $I_T^{(1)} = \int_0^T Y_t^{(0)}\, dt$, $I_T^{(2)} = \int_0^T X_t^{(0)}\, dt$, $I_T^{(3)} = \int_0^T \xi_t\, dt$. Сначала отметим, что

$$\int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\, dv \Big\}\, dt |x|/\sqrt{T \ln\ln T} \to 0, \quad T \to \infty,$$

если $\hat{\kappa}_1 > -2$. Затем для каждого из интегралов $I_T^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, применяется достаточное условие сходимости при $T \to \infty$ с единичной вероятностью отношения $I_T^{(i)}/\Gamma_T \to 0$, где $\Gamma_T = \sqrt{T \ln\ln T}$. Это условие (см. [29]) имеет вид $E[I_T^{(i)}]^2 \leqslant \tilde{c}\Gamma_T$. Из приведённых выше оценок для $E[I_T^{(i)}]^2$ и условия б), проведя аналогичные а) рассуждения, получаем, что требование ограниченности $\{(G_t^2 + \sigma_t^2 \bar{h}_t)/\delta_t^2\}\sqrt{t/\ln\ln t} + (tEf_t^2/\delta_t^2)\sqrt{t/\ln\ln t}$ влечёт за собой также и ограниченность $D_T/\sqrt{T\ln\ln T}$, т.е. $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ п.н. при $T \to \infty$. Если вместо условия для Ef_t^2 из б) п.н. выполняется $(|f_t|/\delta_t)\sqrt{t/\ln\ln t} \to 0$, $t \to \infty$, то из оценки $I_T^{(3)} \leqslant F_T$ п.н., где

$$F_T = \int\limits_0^T \exp\left\{-\int\limits_0^t \delta_v\,dv\right\}\int\limits_0^t \exp\left\{\int\limits_0^s \delta_v\,dv\right\}|f_s|\,ds\,dt,$$

будет следовать, что $\{I_T^{(3)}/\sqrt{T\ln\ln T}\} \to 0$ п.н. при $T \to \infty$. Действительно, если $F_\infty < \infty$, то искомое соотношение очевидно. В противном случае, для нахождения $\lim\limits_{T\to\infty}\{F_T/\sqrt{T\ln\ln T}\}$ дважды применяется правило Лопиталя. Следовательно, $I_T^{(3)}/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ п.н., и тогда также $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ с единичной вероятностью при $T \to \infty$. Утверждение доказано.

Замечание 2. При $\hat{\kappa}_1/\bar{\kappa} \leqslant -2$, $\hat{\kappa}_1$ и $\bar{\kappa}$ – константы из (27) предположения D и неравенства (3) соответственно, даже в самой простой ситуации детерминированного уравнения (1) с нетривиальным начальным условием, не равным нулю, будет выполняется $D_T/T \geqslant \bar{c} > 0$, $T \to \infty$, $\bar{c} > 0$ – некоторая константа. Таким образом, в данном случае субдиффузия не наблюдается. Действительно, здесь $D_T \geqslant x^2\kappa_2^2(\int_0^T \exp\{\int_0^t -\bar{\kappa}\delta_v\,dv\}\,dt)^2$. При этом в силу условия $\hat{\kappa}_1/\bar{\kappa} \leqslant -2$ для некоторой константы $\hat{c} > 0$ выполняется оценка

$$\exp\left\{\int\limits_0^t -\bar{\kappa}\delta_v\,dv\right\}\sqrt{t} \geqslant \hat{c} > 0, \quad t \to \infty,$$

и, следовательно, D_T/T отделено от нуля при $T \to \infty$.

Заключение. В данной работе проведено исследование асимптотического поведения решений X_t, $t \geqslant 0$, линейных неоднородных СДУ (1) (вид процессов X_t определён в лемме 1). Соответствующее уравнение динамики (1) с переменными коэффициентами содержит коррелированные аддитивные и мультипликативные возмущения, а также внешние случайные воздействия f_t. Найдены верхние оценки $\bar{h}_t$ и h_t для X_t^2 при $t \to \infty$ как функции от параметров уравнения (1) (см. лемму 2 и теорему 1). Обращаясь к (8) и (16), можно выделить очевидную зависимость $\bar{h}_t$ и h_t от указанных выше факторов, влияющих на эволюцию X_t во времени. В частности, наличие мультипликативных возмущений увеличивает h_t пропорционально $(E\mathcal{Z}_t^2)^\alpha = (\int_0^t \sigma_s^2\,ds)^\alpha$, т.е. дисперсии процесса $\mathcal{Z}_t = \int_0^t \sigma_s\,dw_s$ при её возведении в степень α. Полученные результаты использованы для выявления условий на коэффициенты в (1), при которых X_t задаёт процесс субдиффузии (см. утверждение 1, пример 3 и теорему 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yong J., Zhou X.Y.* Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. New York, 1999.
2. *Merahi F., Bibi A.* Evolutionary transfer functions solution for continuous-time bilinear stochastic processes with time-varying coefficients // Commun. in Stat. Theory and Methods. 2020. V. 22. P. 5189–5214.
3. *Grimberg P., Schuss Z.* Stochastic model of a pension plan // arXiv preprint arXiv:1407.0517. 2014.
4. *Fa K.S.* Linear Langevin equation with time-dependent drift and multiplicative noise term: exact study // Chem. Phys. 2003. V. 287. № 1–2. P. 1–5.

5. *Паламарчук Е.С.* Об оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решений линейных стохастических дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2021. № 3. С. 98–111.
6. *Паламарчук Е.С.* Аналитическое исследование процесса Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами при моделировании аномальных диффузий // Автоматика и телемеханика. 2018. № 2. С. 109–121.
7. *Cherstvy A.G., Vinod D., Aghion E., Sokolov I.M., Metzler R.* Scaled geometric Brownian motion features sub-or superexponential ensemble-averaged, but linear time-averaged mean-squared displacements // Phys. Rev. E. 2021. V. 103. № 6. P. 062127.
8. *Petroni N.C., De Martino S., De Siena S.* Logistic and θ-logistic models in population dynamics: general analysis and exact results // J. of Phys. A. Math. and Theor. 2020. V. 53. № 44. P. 445005.
9. *Cui Z., Nguyen D.* First hitting time of integral diffusions and applications // Stoch. Models. 2017. V. 33. № 3. P. 376–391.
10. *Gora P.F.* Linear transmitter with correlated noises // Phys. A. Stat. Mech. and its Appl. 2005. V. 354. P. 153–170.
11. *Turnovsky S.J.* Optimal stabilization policies for stochastic linear systems: the case of correlated multiplicative and additive disturbances // The Rev. of Econ. Stud. 1976. V. 43. № 1. P. 191–194.
12. *Sun J., Yong J.* Stochastic Linear-Quadratic Optimal Control Theory: Differential Games and Mean-Field Problems. New York, 2020.
13. *Liu Q., Shan Q.* A stochastic analysis of the one compartment pharmacokinetic model considering optimal controls // IEEE Access. 2020. № 8. P. 181825–181834.
14. *Адрианова Л.Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб., 1992.
15. *Appleby J.A.D., Rodkina A.* Rates of decay and growth of solutions to linear stochastic differential equations with state-independent perturbations // Stoch. an Int. J. of Probab. and Stoch. Processes. 2005. V. 77. № 3. P. 271–295.
16. *Il'chenko O.* On the asymptotic degeneration of systems of linear inhomogeneous stochastic differential equations // Theory of Probab. and Math. Stat. 2008. V. 76. P. 41–48.
17. *Паламарчук Е.С.* Об обобщении логарифмической верхней функции для решения линейного стохастического дифференциального уравнения с неэкспоненциально устойчивой матрицей // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 195–201.
18. *Mao X.* Stochastic Differential Equations And Applications. Philadelphia, 2007.
19. *Tang S.* General linear quadratic optimal stochastic control problems with random coefficients: linear stochastic Hamilton systems and backward stochastic Riccati equations // SIAM J. on Control and Optimiz. 2003. V. 42. № 1. P. 53–75.
20. *Kohlmann M., Tang S.* Minimization of risk and linear quadratic optimal control theory // SIAM J. on Control and Optimiz. 2003. V. 42. № 3. P. 1118–1142.
21. *Shreve S.E.* Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Berlin, 2004.
22. *Teschi G.* Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Providence, 2012.
23. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., 1969.
24. *Wang J.* A law of the iterated logarithm for stochastic integrals // Stoch. Process. and Their Appl. 1993. V. 47. № 2. P. 215–228.
25. *Guijing C., Fanchao K., Zhengyan L.* Answers to some questions about increments of a Wiener process // The Annals of Probab. 1986. V. 14. № 4. P. 1252–1261.
26. *Chen B., Csorgo M.* A functional modulus of continuity for a Wiener process // Stat. & Prob. Lett. 2001. V. 51. № 3. P. 215–223.
27. *Dufresne D.* The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding // Scand. Actuar. J. 1990. V. 1990. № 1. P. 39–79.
28. *Паламарчук Е.С.* О верхних функциях для аномальных диффузий, моделируемых процессом Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами // Теория вероятностей и её применения. 2019. Т. 64. № 2. С. 258–282.
29. *Паламарчук Е.С.* Асимптотическое поведение решения линейного стохастического дифференциального уравнения и оптимальность “почти наверное” для управляемого случайного процесса // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 89–103.

Центральный экономико-математический
институт РАН, г. Москва,
Математический институт имени В.А. Стеклова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
После доработки 13.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.