ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1316–1323

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

© 2022 г. Л. П. Петрова, И. Н. Прядко

С расширенным понятием нормального конуса для некоторого класса не обязательно выпуклых множеств n-мерного евклидова пространства обобщено понятие системы с диодными нелинейностями, для которой доказана теорема существования решения начальной задачи. Приведён пример задачи, показывающий, что единственность её решения не выполняется.

DOI: 10.31857/S0374064122100028, EDN: KPYXIC

Введение. Системы с диодными нелинейностями (СДН) являются моделью процессов, ограниченных рамками заданного множества n-мерного пространства, поведение которых внутри ограничивающего множества описывается системой дифференциальных уравнений. Поскольку ограничивающие множества могут быть, вообще говоря, невыпуклыми (например, при движении под действием течения в речном или морском бассейне), представляют интерес обобщения модели СДН на более широкий, по сравнению с выпуклыми, класс множеств. Данная статья посвящена расширению на некоторый класс не обязательно выпуклых множеств понятия СДН, которое подробно рассмотрено в работах [1, 2] для выпуклых множеств. Накладываемые на невыпуклые множества ограничения носят вполне естественный характер. Для расширенного понятия нормального конуса точек невыпуклого множества установлены некоторые свойства, а также исследованы свойства оператора проектирования в окрестности множества. Изучена связь нормального конуса и оператора проектирования. Далее, так же как в [1, с. 32], даны два вида определения СДН и определение их решений, доказана эквивалентность двух представлений СДН. Доказана локальная теорема существования решения начальной задачи для расширенного понятия СДН. Приведён пример отсутствия единственности решения задачи для невыпуклого множества.

1. Расширение понятия СДН на множества, удовлетворяющие специальному ограничению. Будем полагать, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ – непустое замкнутое множество. Кроме того, ограничимся рассмотрением множеств Q, имеющих некоторую ε-окрестность $Q^\varepsilon = \{y : \min\limits_{x\in Q}\|y-x\| \leqslant \varepsilon\}$ (число $\varepsilon > 0$), обладающую следующими свойствами:

1) для любой точки $y \in Q^\varepsilon$ можно единственным образом указать ближайшую к ней точку из множества Q, которую будем называть *проекцией* y на Q и обозначать $P_Q(y)$;

2) если $x = P_Q(y)$ (P_Q – оператор проектирования) для внутренней точки $y \in Q^\varepsilon \setminus Q$, то для любого числа δ такого, что $1 < \delta \leqslant \varepsilon/\|y-x\|$, справедливо равенство $x = P_Q(x+\delta(y-x))$ (выполнение равенства при $0 < \delta \leqslant 1$ очевидно).

Замечание 1. Под обозначением $\|\cdot\|$ нужно понимать евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 1. *Оператор проектирования P_Q непрерывен на множестве Q^ε.*

Доказательство. Предположим противное: оператор P_Q имеет разрыв в некоторой точке $\bar y \in Q^\varepsilon$. Это означает, что найдётся последовательность $\{y_k\} \in Q^\varepsilon$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \bar y$, для которой последовательность значений $\{x_k\} \equiv \{P_Q(y_k)\}$ либо не имеет предела, либо $x \equiv \lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq \bar x \equiv P_Q(\bar y)$. Без ограничения общности можно считать, что имеет место второй случай, так как, очевидно, начиная с некоторого номера $\bar k$, все элементы x_k содержатся в замкнутом шаре $B[\bar y, 2\varepsilon]$ с центром в точке $\bar y$ радиуса 2ε. Номер $\bar k$ нужно выбрать так, чтобы, начиная с него, выполнялось неравенство $\|y_k - \bar{y}\| \leqslant \varepsilon$, а неравенство $\|x_k - y_k\| \leqslant \varepsilon$ следует из определений Q^ε и $\{x_k\}$. В силу компактности $B[\bar{y}, 2\varepsilon]$ из последовательности x_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Заметим, что точка x вместе с элементами x_k принадлежит множеству Q в силу его замкнутости, поэтому $\|x - \bar{y}\| > \|\bar{x} - \bar{y}\|$. Но тогда найдётся такой номер $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\|x_{k_0} - y_{k_0}\| > \|\bar{x} - y_{k_0}\|$, что противоречит тому, что $x_{k_0} = P_Q(y_{k_0})$.

Утверждение 2. *Для точки $y \in Q^\varepsilon$ равенство $x = P_Q(y)$ справедливо тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) $x \in Q$, $\|y - x\| \leqslant \varepsilon$;

(ii) для любого $\delta > 0$ найдётся число $\sigma > 0$ такое, что если для $z \in Q\backslash\{x\}$ верно $\|z - x\| < \sigma$, то справедливо неравенство

$$\left\langle \frac{z - x}{\|z - x\|}, y - x \right\rangle \leqslant \delta. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $x = P_Q(y)$ и предположим противное: найдутся такая последовательность $\{z_k\} \subset Q\backslash\{x\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$, и число $\delta > 0$, для которых при всех k выполнено неравенство $\langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y - x\rangle > \delta$. Это означает, что угол между отрезками, соединяющими x с y и с z_k, остаётся не превосходящим некоторого острого угла γ, а поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$, то, начиная с некоторого номера, сумма угла γ с углом φ_k между отрезками, соединяющими y с x и с z_k, будет меньше $\pi/2$, а, следовательно, угол при вершине z_k в треугольнике с вершинами y, x и z_k будет тупым. Это противоречит тому, что $x = P_Q(y)$, так как отрезки $[y, z_k]$ короче отрезка $[y, x]$.

Теперь предположим, что для $y \in Q^\varepsilon$ и x выполнены условия (i) и (ii). И если предположить, что $x \neq P_Q(y)$, то x не может быть проекцией для элементов полуотрезка $[y, x)$ в силу свойства 2). Отметим также, что в некоторой окрестности x часть $[y, x)$ расположена в области $Q^\varepsilon\backslash Q$, иначе условия (i) и (ii) не выполнены. Выберем последовательность $\{y_k\}$ из точек этой части полуотрезка $[y, x)$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x$. Тогда для $z_k \equiv P_Q(y_k)$ имеем $z_k \in Q\backslash\{x\}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$ в силу свойства непрерывности проекции (см. утверждение 1), причём имеет место неравенство $\langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y_k - x\rangle > 0$, а вместе с ним и $\langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y - x\rangle > 0$, так как $y_k = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 < \alpha < 1$. С учётом неравенства (1) получаем, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y - x\rangle = 0.$$

Другими словами, значения углов при вершине x треугольников с вершинами x, z_k и y_k стремятся к $\pi/2$ при $k \to \infty$, а в силу того, что углы при вершинах $z_k = P_Q(y_k)$ больше угла при x, они тоже стремятся к $\pi/2$ при $k \to \infty$. Поэтому углы при вершинах y_k стремятся к нулю. Обозначим через v_k точку множества $Q^\varepsilon\backslash Q$, расположенную на расстоянии ε от z_k и находящуюся на продолжении отрезка $[z_k, y_k]$ со стороны y_k. Последовательность $\{v_k\}$, очевидно, находится в замкнутом шаре с центром в точке x и радиусом 2ε, в силу компактности которого из $\{v_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\{v_k\}$ сходится к некоторому элементу $v \in Q^\varepsilon\backslash Q$, для которого имеем равенство $x = P_Q(v)$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$ и $z_k = P_Q(v_k)$ по свойству 2). Причём, как уже показано, острый угол пересечения отрезков $[z_k, v_k]$ и $[x, y]$ стремится к нулю с увеличением k. Отсюда получаем, что

$$v = x + \frac{\varepsilon}{\|y - x\|}(y - x),$$

что противоречит нашему предположению, что $x \neq P_Q(y)$.

Определение 1. *Нормальным конусом* к множеству Q, построенному в точке $x \in Q$, назовём множество $N_Q(x)$, состоящее из точек $y \in \mathbb{R}^n$, для которых $x + y$ удовлетворяет условию (ii).

Замечание 2. Определение 1 в случае выпуклого множества Q эквивалентно определению

$$N_Q(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, z - x\rangle \leqslant 0 \text{ для любой точки } z \in Q\}$$

из работы [1, с. 16], а определение для множеств, удовлетворяющих свойствам 1), 2), фактически совпадает с определением из статьи [3, с. 4].

Утверждение 3. *Множество $N_Q(x)$ является выпуклым замкнутым конусом.*

Доказательство. Действительно, коническая комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ принадлежит $N_Q(x)$ вместе с точками y_1, y_2 при $\alpha, \beta \geqslant 0$, так как

$$\left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, \alpha y_1 + \beta y_2 \right\rangle = \alpha \left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_1 \right\rangle + \beta \left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_2 \right\rangle \leqslant \delta$$

для всех $z \in Q \backslash \{x\}$, $\|z - x\| \leqslant \sigma$, если $\sigma > 0$ выбрать таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_1 \right\rangle \leqslant \frac{\delta}{2\alpha} \text{ и } \left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_2 \right\rangle \leqslant \frac{\delta}{2\beta}.$$

Замкнутость $N_Q(x)$ следует из сохранения нестрогого неравенства в пределе. Заметим, что $N_Q(x) \neq \varnothing$, поскольку нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$, очевидно, в нём содержится.

Утверждение 4. Нормальный выпуклый замкнутый конус есть множество

$$N_Q(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : x = P_Q\left(x + \frac{\varepsilon}{\|y\| + 1} y\right)\right\}.$$

Доказательство очевидным образом следует из определения 1 и утверждений 2, 3.

Определение 2. *Касательным конусом* к множеству Q, построенным в точке $x \in Q$, назовём сопряжённый к $N_Q(x)$ конус

$$T_Q(x) \equiv (N_Q(x))^* = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle y, z\rangle \leqslant 0 \text{ для любых } (y \in N_Q(x))\}.$$

Утверждение 5. *a) Если существует правосторонняя производная $x'_+(\bar t)$ и $x(\bar t + s) \in Q$ при $0 \leqslant s < \delta$, то $x'_+(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.*

b) Если существует левосторонняя производная $x'_-(\bar t)$ и $x(\bar t + s) \in Q$ при $-\delta < s \leqslant 0$, то $-x'_-(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

Доказательство. Пусть существует правосторонняя производная $x'_+(\bar t)$, равная нулю, тогда утверждение a) выполнено, так как нуль содержится в любом конусе. Если $x'_+(\bar t) \neq 0$, то в некоторой правой окрестности $\bar t$ выполнено $x(\bar t + s) \neq x(\bar t)$. Отметим, что функция $x(t)$ непрерывна справа в $\bar t$, и для произвольного вектора $u \in N_Q(x(\bar t))$ справедливо неравенство

$$\left\langle \frac{x(\bar t + s) - x(\bar t)}{\|x(\bar t + s) - x(\bar t)\|}, u \right\rangle \leqslant \delta$$

для сколь угодно малого δ и соответствующих ему достаточно малых значений s. Поскольку в скалярном произведении $\langle x(\bar t + s) - x(\bar t)/\|x(\bar t + s) - x(\bar t)\|, u\rangle$ длины векторов не зависят от изменения величины s, из последнего неравенства следует, что нижнее ограничение на угол между вектором приращения $x(\bar t + s) - x(\bar t)$ и вектором u с уменьшением s приближается к $\pi/2$. Деление вектора приращения функции на положительное значение s не меняет его направления. Из этого следует, что $x'_+(\bar t)$ принадлежит полупространству, для которого u служит внешней нормалью. Известен факт о том, что сопряжённый конус равен пересечению множества полупространств с внешними нормалями, пробегающими исходный конус (см. [1, с. 19] и [4, гл. 2, § 5]). Поскольку u пробегает конус $N_Q(x(\bar t))$, то $x'_+(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

В доказательстве утверждения b), чтобы не изменить направление вектора отрицательным значением s, поделим приращение функции на $-s$. Поэтому получим в результате включение $-x'_-(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

Определение 3. Для вектора $y \in \mathbb{R}^n$ введём обозначения его проекций $v_x y \equiv P_{N_Q(x)}(y)$, $\tau_x y \equiv P_{T_Q(x)}(y)$ на взаимно сопряжённые конусы $N_Q(x)$ и $T_Q(x)$ соответственно.

Замечание 3. Поскольку $N_Q(x)$ и $T_Q(x)$ – выпуклые замкнутые множества, то в них единственным образом определяются ближайшие элементы к любому $y \in \mathbb{R}^n$.

Для функции $f(t,x) : J \times Q \to \mathbb{R}^n$ (где $J \subset \mathbb{R}$ – некоторый невырожденный промежуток) уравнение

$$\dot{x} = \tau_x f(t,x) \tag{2}$$

и включение

$$\dot{x} \in f(t,x) - N_Q(x), \tag{3}$$

как и в случае выпуклого множества (см. [1, с. 16]), будем называть *системой с диодными нелинейностями* (СДН).

Определение 4. *Решением* дифференциального уравнения (2) (с разрывной по x правой частью) называется определённая на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (2) почти всюду.

Определение 5. *Решением* дифференциального включения (3) называется определённая на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (3) почти всюду.

Утверждение 6. *Дифференциальное уравнение (2) эквивалентно дифференциальному включению (3) в том смысле, что они имеют одно и то же множество решений.*

Доказательство.

1. Покажем, что любое решение уравнения (2) является решением включения (3). Предположим, что абсолютно непрерывная на некотором промежутке J функция x является решением дифференциального уравнения (2), т.е. для п.в. $t \in J$ выполнено равенство $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t, x(t))$. Известно, что любой вектор пространства $\mathbb{R}^n$ единственным образом раскладывается на сумму ортогональных слагаемых, одно из которых принадлежит одному из взаимно сопряжённых конусов, а второе – другому, причём эти слагаемые совпадают с проекциями вектора на эти конусы (см. [1, с. 19–20]). Отсюда $\tau_{x(t)} f(t, x(t)) = f(t, x(t)) - v_{x(t)} f(t, x(t)) \in f(t, x(t)) - N_Q(x(t))$, поэтому выполнено дифференциальное включение (3).

2. Теперь покажем, что любое решение (3) является решением (2). Пусть функция x есть решение дифференциального включения (3), т.е. для п.в. $t \in J$ выполнено включение $\dot{x}(t) \in f(t, x(t)) - N_Q(x(t))$. Для таких t найдётся вектор $u \in N_Q(x(t))$ такой, что $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) - u$ и имеет место равенство $\dot{x}(t) = x'_-(t) = x'_+(t)$. Из утверждения 5 имеем, что $\dot{x}(t) \in T_Q(x(t))$ и $\langle \dot{x}(t), u \rangle \leqslant 0$, кроме того, $-\dot{x}(t) \in T_Q(x(t))$ и $\langle \dot{x}(t), u \rangle \geqslant 0$. Следовательно, $\langle \dot{x}(t), u \rangle = 0$, что означает ортогональность векторов $\dot{x}(t)$ и u. С учётом фактов $f(t, x(t)) = \dot{x}(t) + u$, $u \in N_Q(x(t))$, $\dot{x}(t) \in T_Q(x(t))$, $\dot{x}(t) \perp u$ и упомянутого выше утверждения о единственности разложения на ортогональные слагаемые из сопряжённых конусов имеем равенство $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t, x(t))$, что и требовалось доказать.

2. Теорема о существовании решения начальной задачи для расширенного представления СДН. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = \tau_x f(t,x), \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \in Q, \tag{5}$$

где функция $f : [t_0, t_0 + H] \times Q \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по первому аргументу и удовлетворяет локальному условию Липшица по второму: $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|$ (константа L для некоторой окрестности любой точки своя).

Здесь множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям 1), 2) и условию Липшица для оператора проектирования: для любых $x, \widetilde{x} \in Q^\varepsilon$ справедливо неравенство $\|P_Q(x) - P_Q(\widetilde{x})\| \leqslant \widetilde{L}\|x - \widetilde{x}\|$.

Теорема. *Задача (4), (5) имеет решение на некотором отрезке* $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$.

Основная идея и план доказательства почти совпадают с изложенным доказательством в работе [1, с. 32–41] для аналогичной теоремы с выпуклым множеством. Однако само доказательство усложняется новым определением нормального конуса.

Итак, план доказательства теоремы будет состоять из следующих пунктов:

a) доопределение функции $f(t,x)$ на множестве Q^ε;

b) построение "цилиндра" – множества, в котором будут лежать графики приближённых решений рассматриваемой задачи;

c) переход к дифференциальному включению;

d) построение приближённых решений – "ломаных Эйлера" – и доказательство их относительной компактности;

e) предельный переход – доказательство того, что предел ломаных Эйлера есть решение данной задачи (в множестве Q^ε);

f) доказательство того, что построенное решение не выходит из Q.

Доказательство. a) Для $x \in Q^\varepsilon$ обозначим $\overline{x} = P_Q(x)$ и определим вектор

$$e_x \equiv \begin{cases} \dfrac{x-\overline{x}}{\|x-\overline{x}\|}, & \text{если } \ x \in Q^\varepsilon \backslash Q, \\ 0, & \text{если } \ x \in Q, \end{cases} \qquad \widetilde{f}(t,x) \equiv f(t,\overline{x}) - (\|x-\overline{x}\| + \langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+)e_x,$$

здесь $\langle a,b\rangle_+ = \max\{0, \langle a,b\rangle\}$. Для $x \in Q$ выполнено равенство $\widetilde{f}(t,x) = f(t,x)$, а для $x \in \in Q^\varepsilon \backslash Q$ вектор $\langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+ e_x$ является проекцией $f(t,\overline{x})$ на луч $\{\lambda(x-\overline{x}) : \lambda \geqslant 0\}$ с направляющим вектором e_x, который содержится в конусе $N_Q(\overline{x})$ (см. утверждение 4). Однозначная функция $\widetilde{f}$ непрерывна на $\operatorname{int} Q$ и $Q^\varepsilon \backslash Q$, а на границе Q, возможно, имеет разрывы.

b) Для $x_0 \in Q$ обозначим $M \equiv \max\{\|f(t,x)\| : t \in [t_0, t_0+H], \ \ x \in Q \bigcap B[x_0, \widetilde{L}a]\}$, где $a > 0$ – произвольное число. Заметим, что поскольку оператор проектирования на Q удовлетворяет условию Липшица в области Q^ε, расстояние между $\overline{x} = P_Q(x)$ и $x_0 = P_Q(x_0)$ не превышает $\widetilde{L}\|x-x_0\|$, поэтому $\overline{x} \in B[x_0, \widetilde{L}a]$, если $x \in B[x_0, a]$. С учётом этого факта для $t \in [t_0, t_0+H]$, $\ x \in Q^\varepsilon \bigcap B[x_0, a]$ получим оценку

$$\|\widetilde{f}(t,x)\| \leqslant M + b, \quad \text{где} \quad b \equiv \min\{\varepsilon, (1+\widetilde{L})a\}. \tag{6}$$

Действительно,

$$\|\widetilde{f}(t,x)\| = \|f(t,\overline{x}) - (\|x-\overline{x}\| + \langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+)e_x\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(t,\overline{x}) - \langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+ e_x\| + \|x-\overline{x}\|.$$

Как отмечено выше, $\langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+ e_x$ – есть проекция $f(t,\overline{x})$ на луч $\{\lambda(x-\overline{x}) : \lambda \geqslant 0\}$, тогда $f(t,\overline{x}) - \langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+ e_x$ – проекция $f(t,\overline{x})$ на ортогональное лучу подпространство, поэтому имеет место неравенство

$$\|f(t,\overline{x}) - \langle f(t,\overline{x}), e_x\rangle_+ e_x\| \leqslant \|f(t,\overline{x})\|,$$

а поскольку $\overline{x} \in B[x_0, \widetilde{L}a]$, то получаем $\|f(t,\overline{x})\| \leqslant M$. Осталось отметить, что расстояние от точки x до её проекции $\overline{x}$ на множество Q не может, с одной стороны, превосходить ε, а с другой – $\|x-\overline{x}\| \leqslant \|x-x_0\| + \|x_0-\overline{x}\| \leqslant (1+\widetilde{L})a$.

Построим цилиндр $Z = [t_0, t_0+h] \times (B[x_0,a] \bigcap Q^\varepsilon)$ с высотой $h = \min\{H, a/(M+b)\}$.

c) Для значения $r \geqslant M+b$ определим множество

$$\widetilde{N}_Q(x) = B[0,r] \bigcap N_Q(x)$$

и рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{7}$$

где

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x) - \widetilde{N}_Q(x), & \text{если } \ x \in Q, \\ \widetilde{f}(t,x), & \text{если } \ x \in Q^\varepsilon \backslash Q. \end{cases}$$

Утверждение 7. *Многозначная функция F имеет замкнутый график на Z.*

Доказательство. Пусть для последовательности $\{(t_k, x_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ из Z выполнены условия $t_k \to t$, $x_k \to x$ при $k \to \infty$, а последовательность $y_k \in F(t_k, x_k)$ сходится к y при $k \to \infty$. Требуется показать, что точка $((t,x), y)$ принадлежит графику F. Очевидно, что точка (t,x) содержится в компакте Z, а для доказательства $y \in F(t,x)$ достаточно рассмотреть следующие три случая:

1) $\{x_k\} \subset Q$, $x \in Q$;
2) $\{x_k\} \subset Q^\varepsilon \backslash Q$, $x \in Q$;
3) $\{x_k\} \subset Q^\varepsilon \backslash Q$, $x \in Q^\varepsilon \backslash Q$.

В первом случае из условия $y_k \in F(t_k, x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ следует, что $u_k \equiv f(t_k, x_k) - y_k \in \widetilde{N}_Q(x_k) \subset N_Q(x_k)$, причём $u_k \to u \equiv f(t,x) - y$. Покажем, что $u \in \widetilde{N}_Q(x)$. Как было показано в утверждении 4, принадлежность u_k множеству $N_Q(x_k)$ эквивалентна равенству

$$x_k = P_Q\biggl(x_k + \frac{\varepsilon}{\|u_k\| + 1} u_k\biggr).$$

При этом очевидна сходимость

$$\biggl(x_k + \frac{\varepsilon}{\|u_k\| + 1} u_k\biggr) \to \biggl(x + \frac{\varepsilon}{\|u\| + 1} u\biggr)$$

при $k \to \infty$, из чего в силу непрерывности оператора проектирования (см. утверждение 1) следует, что $x = P_Q(x + \varepsilon u/(\|u\| + 1))$. Последнее, как уже было отмечено, эквивалентно принадлежности $u \in N_Q(x)$. Осталось вспомнить, что $u_k \in B[0,r]$, поэтому и $u \in B[0,r]$. Таким образом, показано, что $u \in \widetilde{N}_Q(x)$, а $y = f(t,x) - u \in F(t,x)$.

Во втором случае $y_k = f(t_k, \overline{x}_k) - (\|x_k - \overline{x}_k\| + \langle f(t_k, \overline{x}_k), e_{x_k}\rangle_+) e_{x_k} \to y$, причём $f(t_k, \overline{x}_k) \to f(t, \overline{x}) = f(t,x)$ и $\|x_k - \overline{x}_k\| \to 0$. Следовательно, $\langle f(t_k, \overline{x}_k), e_{x_k}\rangle_+ e_{x_k} \to f(t,x) - y$. Из ранее сделанного нами замечания о том, что $u_k \equiv \langle f(t_k, \overline{x}_k), e_{x_k}\rangle_+ e_{x_k}$ есть проекция $f(t_k, \overline{x}_k)$ на луч $\{\lambda(x_k - \overline{x_k}) : \lambda \geqslant 0\} \subset N_Q(\overline{x}_k)$, следует, что $u_k \in N_Q(\overline{x}_k)$. А так как $\|u_k\| \leqslant M$, то $u_k \in \widetilde{N}_Q(\overline{x}_k)$. Отсюда, как и в первом случае, получаем, что $f(t,x) - y \in \widetilde{N}_Q(x)$, т.е. $y \in F(t,x)$.

Наконец, в третьем случае доказываемое утверждение вытекает из непрерывности функции $\widetilde{f}$.

d) Разобьём промежуток $[t_0, t_0 + h]$ на k равных частей, $k \in \mathbb{N}$, точками $t_{k,i}$, $i = \overline{0,k}$: $h_k \equiv h/k$, $t_{k,0} = t_0$, $t_{k,i} = t_{k,i-1} + h_k$, $i = \overline{1,k}$. Построим ломаную Эйлера $x_k(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, положив $x_k(t_0) = x_0$. В предположении, что ломаная уже построена на промежутке $[t_{k,0}, t_{k,i-1}]$, продолжим её построение на очередном отрезке, определив для $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ значение

$$x_k(t) = x_k(t_{k,i-1}) + \widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))(t - t_{k,i-1}). \tag{8}$$

Построенная таким образом функция обладает следующими свойствами:

(I) $\dot{x}_k(t) = \widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))$ для $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$;
(II) $\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leqslant (M + b)|t' - t''|$ для $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_0 + h$;
(III) $x_k(t) \in B[x_0, a]$ при $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Первое свойство непосредственно следует из формулы (8), второе – из теоремы Лагранжа, свойства (I) и неравенства (6). Для $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_0 + h$ имеем

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leqslant \|\dot{x}_k(\xi)\| |t' - t''| = \|\widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))\| |t' - t''| \leqslant (M + b)|t' - t''|,$$

здесь $\xi \in [t', t'']$ и $\xi \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ при некотором i. Наконец, третье свойство следует из второго:

$$\|x_0 - x_k(t)\| = \|x_k(t_0) - x_k(t)\| \leqslant (M + b)|t - t_0| \leqslant (M + b)\frac{a}{M + b} = a.$$

Из этих свойств вытекает, что последовательность $\{x_k(t)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена, следовательно, из неё по теореме Арцела можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $x(t)$ (см. [5, с. 125; 6, с. 110]).

e) Перенумеровав, если требуется, члены сходящейся подпоследовательности, будем считать, что $x_k(t) \to x(t)$ при $k \to \infty$ равномерно на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Нетрудно видеть, что предельная функция $x(t)$, как и ломаные Эйлера, удовлетворяет условию Липшица с константой $M + b$ (и, следовательно, абсолютно непрерывна). Покажем, что эта функция удовлетворяет включению (7) почти всюду на отрезке $[t_0, t_0 + h]$.

Сначала отметим, что если многозначная функция F, определённая на замкнутом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ с содержащимися в $\mathbb{R}^n$ значениями, ограничена в окрестности каждой точки $p \in D$, то для полунепрерывности сверху функции F необходимо и достаточно замкнутости её графика. Напомним, что функция F называется *полунепрерывной сверху* в точке p области определения, если для любого $\sigma > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что $F(\widetilde{p}) \subset F^\sigma(p)$ для всех $\widetilde{p} \in p^\delta$ из области определения F (см. [4, с. 53]). В нашем случае $F(t, x)$ ограничена на Z (по крайней мере числом $M + r$) и имеет замкнутый график, т.е. является полунепрерывной сверху на Z.

Пусть в точке $\widetilde{t} \in [t_0, t_0 + h]$ существует $\dot{x}(\widetilde{t})$. Докажем, что $\dot{x}(\widetilde{t}) \in F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t}))$ для любого $\sigma > 0$. Тогда предельный переход при $\sigma \to 0$ даёт включение (7). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы из неравенств $|t - \widetilde{t}| < \delta$, $\|x - x(\widetilde{t})\| < (M + b + 1)\delta$ в силу полунепрерывности сверху F вытекало включение $F(t, x) \subset F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t}))$. Пусть число K таково, что при $k \geqslant K$ выполняются условия $h_k < \delta/2$ и $\|x_k(t) - x(t)\| < \delta$ для любого $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Если $|t - \widetilde{t}| < \delta/2$ и $k \geqslant K$, то ближайший к t слева узел $t_{k,i-1}$ ломаной $x_k(t)$ лежит в открытой δ-окрестности точки $\widetilde{t}$. Поэтому

$$\|x_k(t_{k,i-1}) - x(\widetilde{t})\| \leqslant \|x_k(t_{k,i-1}) - x_k(\widetilde{t})\| + \|x_k(\widetilde{t}) - x(\widetilde{t})\| \leqslant (M + b + 1)\delta,$$

$$\dot{x}_k(t) = \widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1})) \in F(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1})) \subset F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})).$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{x_k(t) - x_k(\widetilde{t})}{t - \widetilde{t}} = \frac{1}{t - \widetilde{t}} \int\limits_{\widetilde{t}}^{t} \dot{x}_k(s)ds.$$

Стоящее в правой части интегральное среднее принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества значений подынтегральной функции (см. [4, с. 51]), откуда имеем

$$\frac{x_k(t) - x_k(\widetilde{t})}{t - \widetilde{t}} \in F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})).$$

Переходя к пределу сначала при $k \to \infty$, а затем при $t \to \widetilde{t}$, получаем требуемое включение

$$\dot{x}(\widetilde{t}) \in F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})).$$

f) Итак, функция $x(t)$, полученная как предел ломаных Эйлера, является решением задачи (7), (5) в Q^ε. Докажем, что её значения лежат в Q. Это будет означать, что найдено решение задачи (4), (5).

Пусть $x(t) \notin Q$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset [t_0, t_0 + h]$. Обозначим $r(t) \equiv \|x(t) - P_Q(x(t))\| = \|x(t) - \overline{x}(t)\|$ и покажем, что $r(t + \triangle t) < r(t)$, если $t \in (\alpha, \beta)$ и $\triangle t > 0$ достаточно мало. Действительно,

$$r^2(t+\triangle t) = \|x(t+\triangle t) - \overline{x}(t+\triangle t)\|^2 \leqslant \|x(t+\triangle t) - \overline{x}(t)\|^2 = \langle x(t+\triangle t) - \overline{x}(t), x(t+\triangle t) - \overline{x}(t)\rangle =$$

$$= \langle x(t+\triangle t) - x(t) + x(t) - \overline{x}(t), x(t+\triangle t) - x(t) + x(t) - \overline{x}(t)\rangle = \|x(t+\triangle t) - x(t)\|^2 + \|x(t) - \overline{x}(t)\|^2 +$$

$$+ 2\langle x(t + \triangle t) - x(t), x(t) - \overline{x}(t)\rangle = o(\triangle t) + r^2(t) + 2\langle \widetilde{f}(t, x(t))\triangle t, x(t) - \overline{x}(t)\rangle =$$

$$= o(\triangle t) + r^2(t) + 2\langle f(t, \overline{x}(t)) - \langle f(t, \overline{x}(t)), e_x\rangle_+ e_x - r(t)e_x, r(t)e_x\rangle \triangle t.$$

Напомним, что векторы $(\langle f(t,\overline{x}(t)), e_x\rangle_+ e_x - r(t)e_x)$ и $x(t)-x(\overline{t})$ ортогональны. Следовательно,

$$r^2(t+\triangle t) \leqslant r^2(t)(1-2\triangle t) + o(\triangle t) < r^2(t).$$

Итак, всюду вне множества Q функция $r(t)$ является невозрастающей, а значит, значения $x(t)$ не могут выйти из Q. Тем самым доказано существование решения рассматриваемой задачи (4), (5) на отрезке $[t_0, t_0+h]$. Аналогично доказывается существование решения на некотором отрезке $[t_0-h, t_0]$ для функции $f:[t_0-H, t_0]\times Q \to \mathbb{R}^n$ при выполнении условий теоремы.

Замечание 4. Отметим, что условие Липшица, наложенное на множество Q в постановке задачи (4), (5), не следует из свойств 1) и 2), как это показывает следующий пример. Построим множество Q, взяв за основу любую полуплоскость в $\mathbb{R}^2$. С внешней стороны от полуплоскости изобразим последовательность непересекающихся равнобедренных трапеций с большим основанием, равным некоторому числу $a>0$ и лежащим на ограничивающей полуплоскость прямой, с боковыми сторонами, равными произвольному числу $\varepsilon > a/2$. Меньшее основание первой трапеции положим равным $a/2$, второй – $a/2^2$, n-й – $a/2^n$ и т.д. до бесконечности. Для каждой трапеции, считая точку пересечения её боковых сторон центром окружности, проведём дугу, соединяющую вершины большего основания трапеции. После этого удалим из полуплоскости сегменты, расположенные между дугами и большими основаниями трапеций. Для таким образом построенного множества Q ε-окрестность, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2), но оператор проектирования P_Q не удовлетворяет условию Липшица на Q^ε, так как вершины большего основания каждой трапеции являются проекциями соответствующих вершин меньшего основания. Длины больших оснований не меняются, а длины меньших оснований стремятся к нулю с ростом номера трапеции.

3. Пример отсутствия единственности решения. Для случая выпуклого множества Q в работе [1] доказана единственность решения начальной задачи. Если выпуклость Q отсутствует, то, как показывает следующий пример, единственность решения может нарушаться.

Рассмотрим СДН $\dot{x} = \tau_x f(t,x)$ на множестве $Q = \mathbb{R}^3\backslash B(0,1)$, представляющем собой трёхмерное пространство, из которого удалён открытый шар единичного радиуса с центром в нуле. В качестве функции правой части системы возьмём постоянную функцию $f(t,x) = (1,0,0)$. Для начальных значений x_0, расположенных в Q на оси Ox слева от шара, существует бесконечно много различных решений системы, которые на некотором начальном промежутке времени двигаются вправо по оси Ox до сферы шара. Затем одно из решений принимает постоянное значение – левую точку пересечения оси Ox со сферой (неустойчивое положение равновесия), остальные продолжают путь сначала по четверти любой центральной окружности, проходящей через эту точку равновесия, а затем по касательной к этой окружности параллельно оси Ox.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell J., Nguyen Thi Hien, Petrova L., Pryadko I.* Systems with Non-Smooth Inputs. Berlin; Boston, 2021.
2. *Лобанова О.А., Садовский Б.Н.* О двумерных динамических системах с ограничением // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 4. С. 449–456.
3. *Mehlitz P., Wachsmuth G.* The limiting normal cone to pointwise defintd sets in Lebesgue spaces // Set-Valued and Variat. Anal. 2018. V. 26. № 3. P. 449–467.
4. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.01.2022 г.
После доработки 22.01.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.