ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1324–1332

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ ВОЛН

© 2022 г. А. И. Аристов, А. А. Холомеева

Построены семейства точных решений нелинейного уравнения из теории спиновых волн, описывающего нестационарный процесс в магнитной среде с пространственной дисперсией. Исследованы групповые свойства этого уравнения и соответствующего ему стационарного уравнения. Доказана теорема о неединственности классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения.

DOI: 10.31857/S037406412210003X, EDN: KQAELG

Введение. Рассмотрим в области $\{(\overline{x},t)=(x,y,z,t)\colon\ \overline{x}\in\mathbb{R}^3,\ \ t>0\}$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + D[u] = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$D[u] = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Предполагается, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, причём $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$. Уравнение (1) получено в книге [1, гл. 3, § 7] для описания нестационарного процесса в магнитной среде с пространственной дисперсией. В данной работе будут найдены различные точные решения уравнения (1) с использованием методов из работы [2]. Похожий подход уже применялся для нахождения точных решений неклассических уравнений в статьях [3, 4].

1. Решения типа неполной бегущей волны. Под решениями типа *неполной бегущей волны* подразумеваем точные решения вида $u(x,y,z,t)=f(\xi,t)$, где $f(\cdot)$ – пока произвольная функция двух аргументов, $\xi=a_1x+a_2y+a_3z$, $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ – постоянный единичный вектор. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}a_2\frac{\partial f}{\partial \xi}a_3\right) = a_1a_2a_3\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2\right).$$

Аналогично вычислив другие слагаемые, убедимся, что для рассматриваемого класса решений $D[u]=0$. Значит, уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial \xi^2} = 0.$$

Последовательно интегрируя его, получаем

$$f(\xi,t) = p(t)\xi + q(t) + \theta(\xi),$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента. Таким образом, решения определяются по формуле

$$u(\overline{x},t) = p(t)(\overline{a},\overline{x}) + q(t) + \theta((\overline{a},\overline{x})).$$

2. Решения специального вида. Случай 1. Построим решения вида $u(x,y,z,t) = f(\rho,t)$, где $\rho = xyz$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что, во-первых, имеет место равенство

$$D[u] = 2(\alpha+\beta+\gamma)\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}\right) = 0,$$

во-вторых,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = \frac{\partial^3 f}{\partial t\partial\rho^2}((yz)^2 + (xz)^2 + (xy)^2).$$

Значит, для выполнения соотношения (1) достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial\rho^2} = 0,$$

откуда легко получить

$$f(\rho,t) = p(t)\rho + q(t) + \theta(\rho),$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ – произвольные функции. Таким образом, решения имеют вид

$$u(\overline{x},t) = p(t)xyz + q(t) + \theta(xyz).$$

Случай 2. Построим решения вида $u(x,y,z,t) = f(\rho,t)$, где $\rho = x^2+y^2+z^2$. Непосредственным вычислением получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 8xyz\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2\right),$$

а следовательно, $D[u] = 0$. Кроме того, справедливо равенство

$$\Delta u = 4\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + 6\frac{\partial f}{\partial\rho}.$$

Таким образом, уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(4\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + 6\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) = 0, \quad \text{или} \quad 2\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + 3\frac{\partial f}{\partial\rho} = k(\rho),$$

где $k(\cdot)$ – произвольная функция одного аргумента. Приведём последнее уравнение к виду

$$\rho^{3/2}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{3}{2}\rho^{1/2}\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{\rho^{1/2}k(\rho)}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{3/2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) = \frac{\rho^{1/2}k(\rho)}{2},$$

откуда несложно выразить функцию f:

$$f = \int\frac{\int\rho^{1/2}k(\rho)d\rho}{2\rho^{3/2}}d\rho + \frac{\rho^{-1/2}}{-1/2}p(t) + q(t),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ – произвольные функции. Обозначив первое слагаемое снова как $k(\rho)$, а $(-2p(t))$ как $p(t)$, получим

$$f(\rho,t) = k(\rho) + \frac{p(t)}{\sqrt{\rho}} + q(t).$$

3. Решения – обобщённые многочлены от x. Построим решения, представляющие собой многочлены от переменной x. Если решение является многочленом степени n, то линейная часть уравнения будет многочленом степени n, а $D[u]$ – многочленом степени $(2n-1)$. Эти степени будут равны при $n=1$. Значит, решение u следует искать в виде

$$u(\overline{x},t) = xf(y,z,t) + g(y,z,t),$$

где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции трёх переменных, подлежащие определению. Вычислив нужные производные, получим равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = x\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + x\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial z^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2},$$

$$D[u] = 2x\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \beta x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) +$$

$$+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right) + \gamma x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) + \gamma\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right).$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде $A(y,z,t)x + B(y,z,t) = 0,$ что должно выполняться тождественно, а следовательно, $A = B = 0.$ Значит,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial t\partial z^2} + 2\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) + \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2} + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right) + \gamma\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right) = 0.$$

С учётом того, что $\alpha + \beta + \gamma = 0,$ получим

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial t\partial z^2} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2} - \gamma\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \beta\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \alpha f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} = 0.$$

Построим два семейства решений этой системы.

1. Рассмотрим решения типа бегущей волны: пусть $f(y,z,t) = F(\theta),$ $g(y,z,t) = G(\theta),$ $\theta = t + \lambda y + \mu z,$ $\lambda,$ μ – произвольные постоянные. Подставив эти выражения в систему, получим

$$F'''(\theta) + l(F'^2(\theta) - F(\theta)F''(\theta)) = 0, \quad G'''(\theta) + l(F'(\theta)G'(\theta) - F(\theta)G''(\theta)) = 0,$$

где $l = \alpha\lambda\mu/(\lambda^2 + \mu^2).$ Подберём решения первого уравнения вида $F = A\theta^p.$ Все члены уравнения будут пропорциональны одной степени функции F при $p = -1.$ Сократив уравнение и выразив $A,$ получим $A = -6/l.$ Значит, $F = -6\theta^{-1}/l.$ Подставив это выражение во второе уравнение, получим линейное уравнение для функции $G(\theta),$ у которого несложно найти общее решение

$$G = c_1\theta^{-2} + c_2\theta^{-1} + c_3.$$

Собирая полученные выражения, приходим к следующему семейству решений:

$$u = -6(\lambda^2 + \mu^2)\theta^{-1}x/(\alpha\lambda\mu) + c_1\theta^{-2} + c_2\theta^{-1} + c_3,$$

где $c_1,$ c_2 и c_3 – произвольные константы.

2. Рассмотрим решения с разделёнными переменными: $f(y,z,t) = At^{m_1}y^{n_1}z^{k_1},$ $g(y,z,t) = Bt^{m_2}y^{n_2}z^{k_2},$ $m_i,$ $n_i,$ $k_i,$ $i = 1, 2,$ – вещественные числа. Подставив эти выражения в систему, заметим, что в первом уравнении все члены пропорциональны или $t^{m_1-1},$ или $t^{2m_1}.$ Для его тождественного выполнения надо потребовать $m_1 - 1 = 2m_1$ или $m_1 = -1.$ Во втором уравнении все члены пропорциональны или $t^{m_2-1},$ или $t^{m_1+m_2},$ что не накладывает ограничений на m_2 при $m_1 = -1.$ Сократив систему, запишем её в виде

$$n_1(n_1 - 1)z^2 + k_1(k_1 - 1)y^2 = 0,$$

$$m_2n_2(n_2 - 1)y^{n_2-2}z^{k_2} + m_2k_2(k_2 - 1)y^{n_2}z^{k_2-2} - Ay^{n_1+n_2-1}z^{k_1+k_2-1}(\gamma n_1k_2 + \beta k_1n_2 + \alpha n_2k_2) = 0.$$

Система должна выполняться тождественно, следовательно, все коэффициенты равны нулю:

$$n_1(n_1-1)=0,\ \ k_1(k_1-1)=0,\ \ m_2n_2(n_2-1)=0,\ \ m_2k_2(k_2-1)=0,\ \ \gamma n_1k_2+\beta k_1n_2+\alpha n_2k_2=0.$$

Рассмотрим отдельно случаи $m_2=0$ и $m_2\neq 0$. В первом случае n_1 и k_1 – произвольные числа из множества $\{0,1\}$, а n_2 и k_2 – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\gamma n_1k_2+\beta k_1n_2+\alpha n_2k_2=0. \tag{2}$$

Во втором случае n_1, k_1, n_2, k_2 – произвольные числа из множества $\{0,1\}$, удовлетворяющие условию (2). Таким образом, решения имеют вид $u=At^{-1}xy^{n_1}z^{k_1}+Bt^{m_2}y^{n_2}z^{k_2}$, где A, B, m_2 – произвольные действительные постоянные, n_1 и k_1 – произвольные числа из множества $\{0,1\}$, а n_2 и k_2 – произвольные числа из множеств $\mathbb{R}$ или $\{0,1\}$ при $m_2=0$ или $m_2\neq 0$ соответственно.

4. Решения – обобщённые многочлены от t^{-1}. Если решение является многочленом степени n, то линейная часть уравнения будет многочленом степени $n+1$, а $D[u]$ – многочленом степени $2n$. Эти степени будут равны при $n=1$. Значит, решение u следует искать в виде

$$u(\overline{x},t)=t^{-1}f(\overline{x})+g(\overline{x}),$$

где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции пространственных переменных. Вычисляя нужные производные, приведём уравнение к виду

$$-t^{-2}\Delta f+\alpha t^{-2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\alpha t^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+$$

$$+\beta t^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\beta t^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+$$

$$+\gamma t^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\gamma t^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0.$$

Это равенство, имеющее вид $t^{-2}A+t^{-1}B+C=0$, должно выполняться тождественно, следовательно, $A=B=C=0$:

$$-\Delta f+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)=0,$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0. \tag{3}$$

Несложно убедиться в том, что третьему уравнению системы (3) удовлетворяет функция $g(x,y,z)=\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z)$, где $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, $\chi(\cdot)$ – произвольные функции. Тогда, учитывая, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, можем второе уравнение привести к виду

$$\gamma\chi'(z)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\beta\psi'(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+\alpha\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0, \tag{4}$$

а первое записать как

$$\Delta f=D[f]. \tag{5}$$

Пусть $f(x,y,z)=F(\theta)$, где $\theta=c_1x+c_2y+c_3z$, $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$ – произвольный постоянный вектор. Тогда левая часть соотношения (5) равна $F''(\theta)$, а правая – нулю. Что касается уравнения (4), то несложно привести его к виду

$$F''(\theta)(c_1c_2\gamma\chi'(z)+c_1c_3\beta\psi'(y)+c_2c_3\gamma\varphi'(x))=0,$$

что выполняется при $F''(\theta)=0$. Значит, $F(\cdot)$ – произвольная линейная функция.

Таким образом, имеем семейство решений

$$u=\frac{c_1x+c_2y+c_3z+c}{t}+\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z).$$

5. Метод разделения переменных. Случай 1. Построим решения $u=f(x)+g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции одной и трёх переменных соответственно. Вычислив нужные производные, приведём уравнение к виду

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}-\alpha f'(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0. \tag{6}$$

Разберём случаи, когда функция $f'(x)$ является или не является постоянной.

1. Пусть $f'(x)=c_1$. Тогда приходим к линейному уравнению, определяющему функцию $g(\cdot)$:

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}-\alpha c_1\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0.$$

Несложно убедиться в том, что, например, оно имеет решения вида

$$g=c_2e^{c_1\alpha\lambda\mu\theta/(\lambda^2+\mu^2)}+c_3\theta+c_4,$$

где $\theta=t+\lambda y+\mu z$, λ, μ – произвольные постоянные. Следовательно,

$$u=c_1x+c_2e^{c_1\alpha\lambda\mu\theta/(\lambda^2+\mu^2)}+c_3\theta+c_4.$$

2. Пусть $f'(x)$ не является постоянной. Тогда для тождественного выполнения равенства (6) потребуем, чтобы коэффициент при $f'(x)$ и член, не зависящий от x, были равны нулю:

$$\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}=0.$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Общее решение первого уравнения этой системы имеет вид $g=k(y,t)+l(z,t)$, где $k(\cdot)$ и $l(\cdot)$ – произвольные функции. С учётом этой формулы второе уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^3 k}{\partial t\partial y^2}=-\frac{\partial^3 l}{\partial t\partial z^2}.$$

Здесь правая часть не зависит от z, а левая – от y, следовательно, они равны произвольной функции только от переменной t, которую выберем в виде $2p'(t)$. Интегрируя выражения для производных $k(\cdot)$ и $l(\cdot)$ и складывая, получаем

$$g=p(t)(y^2-z^2)+q(y)+r(z)+p_1(t)y+p_2(t)z+p_3(t),$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $r(\cdot)$, $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$, $p_3(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента. Значит, решения определяются по формуле

$$u=f(x)+p(t)(y^2-z^2)+q(y)+r(z)+p_1(t)y+p_2(t)z+p_3(t)$$

с произвольной функцией $f(\cdot)$.

Пока не рассмотрен случай $\alpha=0$. Здесь решения следует искать в виде $u=f(x)+g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ – произвольная функция одного аргумента, а $g(\cdot)$ – произвольное решение линейного уравнения

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}=0.$$

Случай 2. Построим решения $u = f(x,t) + g(y,z)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции двух переменных. Вычисляя нужные производные и учитывая, что $\beta + \gamma = -\alpha$, приведём уравнение к виду

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} = -\alpha \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}.$$

Потребуем, чтобы смешанная производная от функции g была равна постоянной:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = c_1 \quad \text{или} \quad g = c_1 yz + p(y) + q(z),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ – произвольные функции. Тогда для $f(\cdot)$ получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} + \alpha c_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

и в результате приходим к семейству решений

$$u = f(x,t) + c_1 yz + p(y) + q(z).$$

Случай 3. Построим решения следующего вида: $u = f(x)g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции одной и трёх переменных соответственно. Вычисляя нужные производные и учитывая, что $\beta + \gamma = -\alpha$, приведём уравнение к виду

$$f''(x)\frac{\partial g}{\partial t} + f\left(\frac{\partial^3 g}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial z^2}\right) + \alpha f(x) f'(x)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - g\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}\right) = 0. \qquad (7)$$

Потребуем выполнения условия

$$f''(x) = c_1 f(x) f'(x) + c_2 f(x).$$

Понизим порядок, положив $f'(x) = \omega(f)$, откуда $f''(x) = \omega d\omega/df$:

$$\omega d\omega/df = c_1 f\omega + c_2 f. \qquad (8)$$

Рассмотрим отдельно случаи $c_1 \neq 0$ и $c_1 = 0$.

1. Пусть $c_1 \neq 0$. Уравнение (8) приведём к виду

$$\frac{\omega d\omega}{\omega + c_2/c_1} = c_1 f df,$$

откуда, проинтегрировав, получим неявную формулу для функции $\omega \equiv f'(x)$:

$$f' - \frac{c_2}{c_1}\ln\left|f' + \frac{c_2}{c_1}\right| = \frac{c_1 f^2}{2} + c_3. \qquad (9)$$

Вернёмся к уравнению (7), которое можно записать как

$$c_1 f(x) f'(x)\frac{\partial g}{\partial t} + c_2 f(x)\frac{\partial g}{\partial t} + f\left(\frac{\partial^3 g}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial z^2}\right) + \alpha f(x) f'(x)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - g\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}\right) = 0.$$

Для тождественного выполнения этого равенства надо потребовать, чтобы суммы коэффициентов при $f(x)f'(x)$ и при $f(x)$ были равны нулю. Тогда получим систему

$$c_1\frac{\partial g}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - g\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}\right) = 0, \quad c_2\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial z^2} = 0.$$

Будем искать решения этой системы типа бегущей волны: $g = g(\theta)$, $\theta = \lambda y + \mu z + t$, λ и μ – произвольные постоянные:

$$c_1 g'(\theta) + \alpha\lambda\mu\bigg(g'^2(\theta) - g(\theta)g''(\theta)\bigg) = 0, \quad c_2 g'(\theta) + (\lambda^2 + \mu^2)g'''(\theta) = 0.$$

Запишем первое уравнение системы в виде

$$c_1 \frac{g'}{g^2} = \alpha\lambda\mu \frac{gg'' - g'^2}{g^2}, \quad \text{или} \quad -c_1 \frac{d}{d\theta}\frac{1}{g} = \alpha\lambda\mu \frac{d}{d\theta}\frac{g'}{g},$$

откуда, проинтегрировав, получим уравнение

$$\alpha\lambda\mu g' + c_1 + c_4 g = 0,$$

общее решение которого определяется по формуле

$$g = \begin{cases} c_5 e^{-c_4\theta/(\alpha\lambda\mu)} - \dfrac{c_1}{c_4}, & c_4 \neq 0, \\ -\dfrac{c_1\theta}{\alpha\lambda\mu} + c_5, & c_4 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В результате получим семейство решений $u = f(x)g(\lambda y + \mu z + t)$, где $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (9), а функция $g(\cdot)$ находится по формуле (10).

2. Пусть теперь $c_1 = 0$. Интегрирование уравнения (8) даёт равенство $f'^2 = c_2 f^2 + c_3$, откуда можно выразить $f(\cdot)$ через элементарные функции.

Вернёмся к уравнению (7). Рассуждая по аналогии с предыдущим случаем, придём к системе

$$\alpha\lambda\mu(g'^2(\theta) - g(\theta)g''(\theta)) = 0, \quad c_2 g'(\theta) + (\lambda^2 + \mu^2)g'''(\theta) = 0.$$

Несложно убедиться в том, что первое уравнение системы имеет общее решение $g = c_4 e^{c_5\theta}$. Подставив это выражение во второе уравнение системы, получим условие непротиворечивости: $c_2 = -c_5^2(\lambda^2 + \mu^2)$.

В результате имеем семейство решений $u = c_4 f(x) e^{c_5(\lambda y + \mu z + t)}$, где $f(\cdot)$ определяется уравнением $f'^2 = c_2 f^2 + c_3$.

Случай 4. Построим решения вида $u = f(x,t) + g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции двух и трёх переменных соответственно. Вычисляя нужные производные и учитывая, что $\beta + \gamma = -\alpha$, приведём уравнение к виду

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2} - \alpha\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = p(t), \quad \text{или} \quad f = xp(t) + q(t),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента. Тогда (11) примет вид

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2} - \alpha p(t)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} = 0. \tag{12}$$

Таким образом, получаем семейство решений

$$u = xp(t) + q(t) + g(y,z,t),$$

где функция $g(\cdot)$ определяется линейным уравнением (12).

2. В противном случае продифференцируем (11) по x и поделим на $\partial^2 f/\partial x^2$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{-1}\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3}=\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}.$$

Здесь левая часть равенства зависит от x и t, а правая – от y, z и t. Значит, обе части равны произвольной функции только от t, которую выберем в виде $\alpha p(t)$. Таким образом,

$$\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=\alpha p(t)\quad\text{или}\quad g=p(t)yz+q(y,t)+r(z,t),\tag{13}$$

где $q(\cdot)$ и $r(\cdot)$ – произвольные функции двух аргументов. Подставим предварительную форму (13) в (11):

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2}-\alpha p(t)\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial^3 q}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 r}{\partial t\partial z^2}=0.$$

Здесь первое слагаемое (взятое в скобки) зависит только от переменных x и t, второе – от y и t, третье – только от z и t. Следовательно, три указанных выражения являются функциями только от t.

Пусть

$$\frac{\partial^3 q}{\partial t\partial y^2}=2\sigma'(t),\quad \frac{\partial^3 r}{\partial t\partial z^2}=2\rho'(t),\tag{14}$$

где $\sigma(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ – пока произвольные функции. Тогда для $f(\cdot)$ получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2}-\alpha p(t)\frac{\partial f}{\partial x}=-2(\sigma'(t)+\rho'(t)).\tag{15}$$

Интегрируя равенства (14) и возвращаясь к переменной u, получаем

$$u=f(x,t)+p(t)yz+\sigma(t)y^2+\rho(t)z^2+k_1(z)+k_2(t)z+k_3(t)+k_4(y)+k_5(t)y,$$

где $k_i(\cdot)$, $i=\overline{1,5}$, – произвольные функции одного аргумента, а $f(\cdot)$ определяется линейным уравнением (15).

6. О симметриях. Интересно отметить следующие групповые свойства уравнения (1) и соответствующего ему стационарного уравнения.

Во-первых, легко убедиться в том, что если $u=u_0(x,y,z,t)$ – решение (1), $k(\cdot)$ – произвольная функция одного аргумента, то $u=u_0(x,y,z,t)+k(t)$ – тоже решение (1). Следовательно, если дано решение уравнения

$$D[u]=0,\tag{16}$$

то, прибавив к нему произвольную функцию времени, получим решение (1). Поэтому представляет интерес исследование и стационарного уравнения (16). Кроме того, из этого следует

Теорема. *Классическое решение задачи Коши для уравнения (1) не единственно.*

Во-вторых, укажем способ добавления произвольной функции в решение уравнения (16). Пусть дано некоторое решение $u=\theta(x,y,z)$. Рассмотрим его решения вида $u=f(\theta(x,y,z))$, где $f(\cdot)$ – некоторая функция одного аргумента. Вычислив нужные производные, получим, что $D[u]=0$. Значит, $u=f(\theta(x,y,z))$ с произвольной $f(\cdot)$ – тоже решение (16).

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции вида

$$u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)\quad\text{и}\quad u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z),$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента, являются решениями (16).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00449).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
3. *Аристов А.И.* О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 11. С. 1870–1875.
4. *Аристов А.И.* Точные решения неклассического уравнения с нелинейностью под знаком лапласиана // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1360–1370.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.07.2022 г.
После доработки 22.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.