ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1333–1343

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ПОТЕНЦИАЛ ПУАССОНА В ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров

Рассмотрена первая начально-краевая задача для параболической системы в полуограниченной области на плоскости с негладкой боковой границей, допускающей “клювы”. Исследован характер непрерывности следа потенциала Пуассона на такой границе, и доказана теорема о существовании классического решения рассматриваемой задачи в случае неоднородной параболической системы и ненулевого начального условия.

DOI: 10.31857/S0374064122100041, EDN: KQCLFN

Введение. Теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем с гёльдеровскими коэффициентами общего вида в пространствах $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, в областях Ω с гладкими боковыми границами построена в статье [1] (см. также [2, с. 706]).

В настоящей работе рассматривается первая начально-краевая задача для одномерной по пространственной переменной x параболической по Петровскому (см. [3]) системы второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области с негладкой, вообще говоря, боковой границей из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. Здесь ω обозначает некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. п. 1).

В случае одного параболического уравнения в статьях [4–6] установлена однозначная разрешимость такой задачи в пространстве $H^{1,\hat{\omega}}(\overline{\Omega})$, где $\hat{\omega}$ – некоторый модуль непрерывности, при более сильных, по сравнению с настоящей работой, требованиях на характер непрерывности коэффициентов этого уравнения и боковой границы области. При этом предполагалось, что начальная функция ограничена вместе со своей первой производной и эта производная Дини-непрерывна.

В работах [7–9] доказаны теоремы об однозначной классической разрешимости в пространстве $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для однородной параболической системы с нулевым начальным условием при выполнении рассматриваемых в настоящей работе условий на коэффициенты этой системы и на негладкую боковую границу области.

Естественно возникает вопрос об исследовании разрешимости в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ такой задачи для неоднородной параболической системы при минимальных условиях на характер непрерывности начальной функции h. В настоящей работе изучается поведение следа потенциала Пуассона на негладкой кривой, а затем методом граничных интегральных уравнений строится классическое решение рассматриваемой задачи, при этом предполагается, что h является лишь непрерывной и ограниченной, вместе со своей первой производной, функцией. В п. 1 приводятся необходимые определения и формулируется основная теорема, в п. 2 исследуется характер непрерывности следа потенциала Пуассона на негладкой кривой, в п. 3 доказывается теорема существования для первой начально-краевой задачи.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Функция $\nu(z)$, $z \geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$, $z_1 \geqslant z_2 \geqslant 0$. Следуя [10, с. 150], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ такую, что

$\omega(0)=0$. Если (вектор)-функция h непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$, то её модуль непрерывности на этом отрезке

$$\omega_h(z)=\sup_{\substack{x,x+\Delta x\in[x_1,x_2]\\ 0\leqslant|\Delta x|\leqslant z}}|\Delta_x h(x)|,\quad z\geqslant 0,$$

обладает перечисленными выше свойствами.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Из известных свойств модуля непрерывности отметим неравенства

$$\omega(\lambda z)\leqslant(\lambda+1)\omega(z),\quad \lambda\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,$$

и

$$\frac{\omega(z_1)}{z_1}\leqslant 2\frac{\omega(z_2)}{z_2},\quad z_1\geqslant z_2>0$$

(т.е. функция $z^{-1}\omega(z)$ почти убывает). Кроме того (см. [11]), справедливо неравенство

$$\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\}\leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,$$

для некоторых постоянных $C,c>0$.

Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z)=\int\limits_0^z\omega(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0. \tag{1}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1). Если $\omega\in\mathcal{D}$, то и $\widetilde{\omega}$ является модулем непрерывности, причём $\omega(z)\leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z\geqslant 0$. Кроме того, функция $\omega^*(z)=\omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом если $\omega\in\mathcal{D}$, то $\omega^*\in\mathcal{D}$ и имеет место равенство

$$\widetilde{\omega}^*(z)=2\widetilde{\omega}(z^{1/2}),\quad z\geqslant 0.$$

Обозначим через $C^1(\mathbb{R})$ пространство (вектор)-функций $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой производной h', с нормой

$$\|h;\mathbb{R}\|^1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|h'(x)|.$$

Пусть фиксировано число $T>0$. Через $C[0,T]$ обозначим пространство непрерывных (вектор)-функций $\psi:[0,T]\to\mathbb{R}^m$, $m\in\mathbb{N}$, с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0=\max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$. Положим $\underset{0}{C}[0,T]=\{\psi\in C[0,T]:\psi(0)=0\}$. Через $C^1(0,T]$ обозначим пространство (вектор)-функций, имеющих непрерывную на промежутке $(0,T]$ первую производную.

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Положим

$$H^{1+\omega}(\mathbb{R})=\left\{h\in C^1(\mathbb{R}):\|h;\mathbb{R}\|^{1+\omega}=\|h;\mathbb{R}\|^1+\sup_{\substack{x,x+\Delta x\in\mathbb{R}\\ \Delta x\neq 0}}\left\{\frac{|\Delta_x h'(x)|}{\omega(|\Delta x|)}\right\}<\infty\right\},$$

$$H^{q+\omega}[0,T]=\left\{\psi\in C[0,T]:\|\psi;[0,T]\|^{q+\omega}=\|\psi;[0,T]\|^0+\right.$$
$$\left.+\sup_{\substack{t,t+\Delta t\in(0,T)\\ \Delta t\neq 0}}\left\{\frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^q\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty\right\},\quad q=0,1/2,$$

$$\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T] = \{\psi \in H^{1/2+\omega}[0,T] : \psi(0) = 0\}.$$

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя работам [12, 13], введём пространство

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T] : \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T], \quad \|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < \infty\}.$$

Замечание 1. Для произвольной функции $\psi \in C^{1/2}[0,T]$ имеет место равенство $\psi(0) = 0$, которое следует из представления

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\partial^{1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Замечание 2. Если $\psi \in \underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, то $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ (см. [11]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [13]).

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T)\}$ рассмотрим произвольную область Ω. Обозначим через $C^{2,1}(\Omega)$ пространство (вектор)-функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, непрерывных вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^l u$, $l = 1,2$, в Ω. Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных (вектор)-функций $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)|$. Положим

$$C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \Big\{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \|u;\Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^{1}\|\partial_x^l u;\Omega\|^0 < \infty\Big\},$$

$$\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x,0) = 0, \quad l = 0,1\},$$

$$H^{\omega}(\overline{\Omega}) = \Big\{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \|u;\Omega\|^{\omega} = \|u;\Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega \\ (\Delta x)^2+|\Delta t|\neq 0}}\Big\{\frac{|\Delta_{x,t}u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|)+\omega(|\Delta t|^{1/2})}\Big\} < \infty\Big\},$$

где ω – некоторый модуль непрерывности. Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u, \quad u = (u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$, $l = 0,1,2,$ – $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]\}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) собственные числа μ_r, $r = \overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для всех $(x,t) \in \overline{D}$ и некоторого $\delta > 0$;

(b) $a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\overline{D})$, где ω_0 – модуль непрерывности, такой что

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $z^{-\varepsilon_0}\omega_0(z)$, $z>0$, почти убывает.

Положим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D} : t>\tau\}$. Матрицу $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, называем *фундаментальной матрицей решений* (ф.м.р.) системы $Lu=0$, если её элементы Γ_{ij}, $i,j=\overline{1,m}$, являются непрерывными функциями в своей области определения, и для любой финитной и непрерывной (вектор)-функции $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, $h=(h_1,\ldots,h_m)^{\text{т}}$, и любого $\tau_0\in[0,T)$ (вектор)-функция (потенциал Пуассона)

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau_0)h(\xi)\,d\xi,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in[\tau_0,T],$$

является классическим ограниченным решением задачи Коши

$$Lu=0\quad\text{в}\quad \mathbb{R}\times(\tau_0,T], u(x,\tau_0)=h(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

удовлетворяющим (в случае $m\geqslant 2$) при любом $\varepsilon\in(0,T-\tau_0]$ условиям

$$|\partial_x^l u(x,t)|\leqslant C(\varepsilon),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[\tau_0+\varepsilon,T],\quad l=1,2, \tag{2}$$

для некоторой постоянной $C(\varepsilon)$.

Из результатов работы [14] о единственности решения задачи Коши для параболических систем следует единственность ф.м.р. системы $Lu=0$, если $m\geqslant 2$. В случае $m=1$ требование (2) можно опустить и воспользоваться теоремой о единственности решения задачи Коши для одного уравнения (см. [2, с. 29]).

Пусть

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sigma x}\exp(-\sigma^2A_2(\xi,\tau)t)\,d\sigma,\quad (x,t)\in D,\quad (\xi,\tau)\in\overline{D}.$$

Имеют место следующие оценки (см. [15, с. 298]):

$$|\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant C(k,l)t^{-(2k+l+1)/2}\exp(-cx^2/t), \tag{3}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant C(k,l)\{\omega_0(|\Delta\xi|)+\omega_0(|\Delta\tau|^{1/2})\}t^{-(2k+l+1)/2}\exp(-cx^2/t), \tag{4}$$

где $(x,t)\in D$, $(\xi,\tau),(\xi+\Delta\xi,\tau+\Delta\tau)\in\overline{D}$, $k,l\geqslant 0$.

Известно (см. [16], если $m=1$, и [17], если $m\geqslant 2$), что при выполнении условий (a) и (b) у системы $Lu=0$ существует ф.м.р. $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$. При этом столбцы матрицы $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ при любых фиксированных $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}\times[0,T)$ удовлетворяют по переменным (x,t) системе $Lu=0$ в полосе $\mathbb{R}\times(\tau,T]$ и справедливы оценки

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,\quad 2k+l\leqslant 2.$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m, коэффициентов оператора L и модуля непрерывности ω_1, введённого ниже (см. (12)). Кроме того, для разности

$$W(x,t;\xi,\tau)\equiv\Gamma(x,t;\xi,\tau)-Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau)),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,$$

имеют место неравенства

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right),\quad 2k+l\leqslant 2, \tag{5}$$

$$|\Delta_t \partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}(t-\tau)^{-3/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2}) \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad l=0,1, \tag{6}$$

где $x,\xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant T, \quad \Delta t \leqslant t-\tau$.

В частности, для оператора

$$L_1 u = \partial_t u - A_2(x,t)\partial_x^2 u - A_1(x,t)\partial_x u$$

ф.м.р. $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$ системы $L_1 u = 0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau)) + W_1(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{7}$$

где для слагаемого W_1 выполнены оценки (5), (6). Отметим равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,0)\,d\xi = E, \quad (x,t) \in \overline{D}, \tag{8}$$

где E – единичная матрица.

Для ф.м.р. $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ в дальнейшем будут полезны представление

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \Gamma_1(x,t;\xi,\tau) + W_2(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{9}$$

где

$$W_2(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;y,\eta)A_0(y,\eta)\Gamma_1(y,\eta;\xi,\tau)\,dy,$$

и оценки

$$|\partial_x^l W_2(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{(1-l)/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad l=0,1, \tag{10}$$

$$|\Delta_t W_2(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\Delta t\left|\ln\left(\frac{\Delta t}{T}\right)\right|(t-\tau)^{-1/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{11}$$

где $x,\xi \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant T,\ \Delta t < t-\tau$.

В полосе D рассматриваем полуограниченную область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t),\ t \in (0,T)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in D : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию

$$g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \quad \omega_1 \in \mathcal{D}. \tag{12}$$

В области Ω рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$Lu = f, \quad (x,t) \in \Omega; \quad u(x,0) = h(x), \quad x \geqslant g(0); \quad u(g(t),t) = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Основное содержание настоящей работы составляет

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (a), (b) и (12). Предположим, что* $f \in C^0(\overline{D})$ *и существует модуль непрерывности* $\omega \in \mathcal{D}$ *такой, что*

$$\sup_{\substack{(x+\Delta x,t),(x,t)\in D\\ \Delta x\neq 0}} \frac{|\Delta_x f(x,t)|}{\omega(|\Delta x|)} < \infty.$$

Тогда для любых функций $h \in C^1(\mathbb{R})$ *и* $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ *с условием* $\psi - h(g(0)) \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ *существует (единственное) решение* $u \in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи (13), которое имеет вид суммы (векторных) параболических потенциалов*

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi + \int\limits_{0}^{t} \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv Ph(x,t) + Vf(x,t) + U\varphi(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{14}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ *– единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры первого рода*

$$\int\limits_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(t) - Ph(g(t),t) - Vf(g(t),t), \quad t \in [0,T]; \tag{15}$$

и справедлива оценка

$$\|u;\Omega\|^{1,0} \leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1 + \|f;D\|^0 + \|\psi - h(g(0));[0,T]\|^{1/2}\}. \tag{16}$$

Замечание 3. Единственность решения задачи (13) следует из работы [9].

Замечание 4. Если $h \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi \in H^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, и $\psi(0) = h(g(0))$, то условия теоремы 1 для (вектор)-функций h и ψ выполнены, причём имеет место оценка

$$\|\psi - h(g(0));[0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^{1/2+\omega}.$$

Замечание 5. В случае $f \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $h \equiv 0$ на $\mathbb{R}$ теорема 1 доказана в статье [8].

Замечание 6. Если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T]$, причём модуль непрерывности ω_1 не удовлетворяет условию (1), то решение задачи (13) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ может не существовать. В самом деле, пусть $T \in (0,1)$ и

$$g(t) = (T-t)^{1/2}\omega_1((T-t)^{1/2}), \quad t \in [0,T],$$

$$\omega_1(z) = (\ln(1/z))^{-1}, \quad 0 < z \leqslant T^{1/2}, \quad \omega_1(0) = 0.$$

Пусть $u \in C(\overline{\Omega})$ – классическое решение начально-краевой задачи

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (x,t) \in \Omega; \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0); \quad u|_\Sigma = \psi(t),$$

где $\psi \in C[0,T]$ – строго убывающая функция, причём $\psi(T) < 0$. Тогда в силу теоремы 2 из [18]

$$\lim_{x\to 0+} \partial_x u(x,T) = +\infty.$$

Замечание 7. Для любых (вектор)-функций f и h, удовлетворяющих условиям теоремы 1, сумма (векторных) параболических потенциалов (см. (14))

$$u(x,t) = Ph(x,t) + Vf(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D},$$

является классическим решением задачи Коши

$$Lu = f, \quad (x,t) \in D; \quad u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При этом $u \in C^{1,0}(\overline{D})$, справедливо равенство

$$\partial_x Ph(x,0) = h'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и имеет место оценка

$$\|u;D\|^{1,0} \leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1 + \|f;D\|^0\}.$$

2. След потенциала Пуассона на кривой $\boldsymbol{\Sigma}$.

Лемма 1. *Пусть* $\psi \in \underset{0}{C}[0,T] \bigcap C^1(0,T]$, *причём*

$$|\psi'(t)| \leqslant t^{-1/2}\omega(t^{1/2}), \quad t \in (0,T],$$

где ω *– некоторый модуль непрерывности. Тогда* $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{17}$$

Фиксируем произвольное значение $t_0 \in (0,T]$. Достаточно доказать справедливость формулы (17) для $t \in [t_0,T]$.

Пусть $t \in [t_0,T]$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $1/n < t_0/2$ положим

$$I_n(t) = \int\limits_{1/n}^{t-1/n} \tau^{-1/2}\psi(t-\tau)\,d\tau.$$

Справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} I_n(t) = \int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [t_0,T], \tag{18}$$

и

$$I_n'(t) = (t-1/n)^{-1/2}\psi(1/n) + \int\limits_{1/n}^{t-1/n} \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau \equiv (t-1/n)^{-1/2}\psi(1/n) + \Psi_n(t),$$

причём в силу условий на функцию ψ

$$(t-1/n)^{-1/2}\psi(1/n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

равномерно по $t \in [t_0,T]$. Кроме того, $\Psi_n \in C[t_0,T]$, $n \in \mathbb{N}$, $1/n < t_0/2$, и последовательность $\Psi_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [t_0,T]$ к интегралу

$$\int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau$$

в силу неравенства

$$\left|\left(\int\limits_0^{1/n} + \int\limits_{t-1/n}^t\right)\tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant C(t_0)\omega(\sqrt{1/n}), \quad t \in [t_0,T].$$

Отсюда и из (18) следует формула (17) и включение

$$\partial^{1/2}\psi \in C(0,T].$$

Равенство $\partial^{1/2}\psi(0) = 0$ получаем после этого из (17). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $h \in C^1(\mathbb{R})$. *Тогда для функции* $Ph(g(t),t)$, $t \in [0,T]$, *имеют место представление*

$$Ph(g(t),t) = h(g(0)) + \hat{h}(t), \quad t \in [0,T],$$

где $\hat{h} \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, *и оценка*

$$\|\hat{h};[0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|h;\mathbb{R}\|^1.$$

Доказательство. Воспользовавшись равенствами (7)–(9), запишем функцию $Ph(g(t),t)$ в виде

$$Ph(g(t),t) = h(g(0)) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(g(t),t;\xi,0)[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_2(g(t),t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi =$$

$$= h(g(0)) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [Z(g(0)-\xi,t;A_2(\xi,0)) - Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))][h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [Z(g(t)-\xi,t;A_2(\xi,0)) - Z(g(0)-\xi,t;A_2(\xi,0))][h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_1(g(t),t;\xi,0)[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_2(g(t),t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi \equiv h(g(0)) + \sum_{i=1}^{5} P_i(t).$$

Докажем, что $P_i \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T],\ \ i=\overline{1,5}.$

Рассмотрим слагаемое P_1, для которого выполнены условия леммы 1. В самом деле, из условий на функцию h следует, что $P_1 \in \underset{0}{C}[0,T]\bigcap C^1(0,T]$. Далее имеем

$$P_1'(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_t Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi =$$

$$= \bigg(\int\limits_{|\xi-g(0)|\leqslant 1} + \int\limits_{|\xi-g(0)|\geqslant 1}\bigg) A_2(g(0),0)\partial_x Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))[h'(\xi)-h'(g(0))]\,d\xi, \quad t>0.$$

Отсюда, в силу условий на функцию h, следует оценка

$$|P_1'(t)| \leqslant C_h\bigg\{\int\limits_{|\xi-g(0)|\leqslant 1} t^{-1}\omega_{h'}(|g(0)-\xi|)\exp\bigg(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\bigg)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|\xi-g(0)|\geqslant 1} t^{-1}\exp\bigg(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\bigg)\,d\xi\bigg\} \leqslant C_h[t^{-1/2}\omega_{h'}(t^{1/2})+1] \leqslant C_h t^{-1/2}\omega_{h'}(t^{1/2}), \quad t>0,$$

где $\omega_{h'}$ – модуль непрерывности функции h' на отрезке $[g(0)-1,g(0)+1]$. Здесь и далее $C_h = C\|h;\mathbb{R}\|^1$. Таким образом, в силу леммы 1 $P_1 \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$.

Далее докажем, что $P_i \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T],\ \ i=\overline{2,5}$. Для этого достаточно установить, что $P_i \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_i}[0,T]$, где $\omega_i \in \mathcal{D},\ \ i=\overline{2,5}$, – некоторые модули непрерывности.

Рассмотрим P_2. В силу условий на h и оценок (4) имеем

$$|P_2(t)| \leqslant C_h \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2}|g(0)-\xi|\omega_0(|g(0)-\xi|)\exp\bigg(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\bigg)\,d\xi \leqslant C_h t^{1/2}\omega_0(t^{1/2}); \tag{19}$$

$$|\Delta_t P_2(t)| \leqslant C_h \Delta t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} |g(0)-\xi| \omega_0(|g(0)-\xi|) \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_h (\Delta t)^{1/2} \omega_0((\Delta t)^{1/2}), \quad 0<\Delta t<t<t+\Delta t \leqslant T. \tag{20}$$

Из оценок (19) и (20) следует, что $P_2 \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_0}[0,T]$.

Рассмотрим слагаемое P_3. Здесь и далее пользуемся неравенством $(a-b)^2 \geqslant a^2/2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$. В силу условий на h и соотношений (3), (12) имеем

$$|P_3(t)| \leqslant C_h t^{1/2} \omega_1(t^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1} |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \leqslant C_h t^{1/2} \omega_1(t^{1/2}); \tag{21}$$

$$|\Delta_t P_3(t)| \leqslant C_h \biggl[(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1} |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi +$$

$$+ \Delta t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} \omega_1(t^{1/2}) |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \biggr] \leqslant$$

$$\leqslant C_h (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}), \quad 0<\Delta t<t<t+\Delta t \leqslant T. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что $P_3 \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_1}[0,T]$.

Рассмотрим теперь P_4. Из условий на функцию h и соотношений (5), (6), (12) следуют неравенства

$$|P_4(t)| \leqslant C_h t^{1/2} \widetilde{\omega}_0(t^{1/2}); \tag{23}$$

$$|\Delta_t P_4(t)| \leqslant C_h \biggl\{ (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1} |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi +$$

$$+ \Delta t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} \widetilde{\omega}_0(t^{1/2}) |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant C_h (\Delta t)^{1/2} \{\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2})\}, \quad 0<\Delta t<t<t+\Delta t \leqslant T. \tag{24}$$

Из оценок (23) и (24) следует, что $P_4 \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_4}[0,T]$, $\omega_4 = \omega_1 + \widetilde{\omega}_0$.

Наконец, рассмотрим слагаемое P_5. В силу условий на h и соотношений (10)–(12) имеем

$$|P_5(t)| \leqslant C_h t^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-c\frac{(g(t)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \leqslant C_h t; \tag{25}$$

$$|\Delta_t P_5(t)| \leqslant C_h \biggl\{ (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-c\frac{(g(t)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi +$$

$$+ \Delta t \biggl| \ln\biggl(\frac{\Delta t}{T}\biggr) \biggr| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2} \exp\biggl(-c\frac{(g(t)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant C_h(\Delta t)^{1/2}\{\omega_1((\Delta t)^{1/2})+(\Delta t)^{1/4}\},\quad 0<\Delta t<t<t+\Delta t\leqslant T. \tag{26}$$

Из оценок (25) и (26) следует, что $P_5\in \underset{0}{H}^{1/2+\omega_5}[0,T]$, $\omega_5(z)=\omega_1(z)+z^{1/2}$, $z\geqslant 0$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1.

Лемма 2 (см. [19]). *Пусть для оператора L выполнены условия (a), (b). Тогда для любой функции $f\in C^0(\overline{D})$ объёмный потенциал Vf (см. (14)) удовлетворяет оценкам*

$$|\partial_x^l Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0 t^{1-l/2},\quad l=0,1,$$

$$|\Delta_t Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0|\Delta t|(1+|\ln|\Delta t||),$$

$$|\Delta_t\partial_x Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0|\Delta t|^{1/2},$$

$$|\Delta_x\partial_x Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0|\Delta x|(1+|\ln|\Delta x||),\quad (x,t),(x+\Delta x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{D}.$$

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 2 и $\hat f(t)=Vf(g(t),t)$, $t\in[0,T]$. Тогда*

$$\hat f\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T] \tag{27}$$

и справедлива оценка

$$\|\hat f;[0,T]\|^{1/2}\leqslant C\|f;D\|^0. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 1. Решение u задачи (13) будем искать в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+Ph(x,t)+Vf(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}. \tag{29}$$

Положим

$$\hat\psi(t)=\psi(t)-Ph(g(t),t)-Vf(g(t),t),\quad t\in[0,T].$$

В силу условий на функцию ψ, леммы 2, соотношений (27), (28) и теоремы 2 имеем

$$\hat\psi\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T], \tag{30}$$

$$\|\hat\psi;[0,T]\|^{1/2}\leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1+\|f;D\|^0+\|\psi-h(g(0));[0,T]\|^{1/2}\}.$$

Замена (29) в силу включения (30) сводит задачу (13) к поиску (вектор)-функции v такой, что

$$Lv=0,\quad (x,t)\in\Omega;\quad v(x,0)=0,\quad x\geqslant g(0);\quad v(g(t),t)=\hat\psi(t),\quad t\in[0,T]. \tag{31}$$

Из работ [7, 8] следует, что существует решение задачи (31) из пространства $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$, причём оно имеет вид потенциала простого слоя

$$v(x,t)=\int_0^t\Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Omega},$$

где $\varphi\in \underset{0}{C}[0,T]$ – единственное в $C[0,T]$ решение системы граничного интегрального уравнения (15), и справедлива оценка

$$\|v;\Omega\|^{1,0}\leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1+\|f;D\|^0+\|\psi-h(g(0));[0,T]\|^{1/2}\}.$$

Отсюда следует (см. замечание 7), что задача (13) имеет решение u из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$, и для него справедливы представление (14) и оценка (16). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
4. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
5. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
6. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
8. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
9. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2. С. 26–29.
10. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
11. *Камынин Л.И.* О гладкости тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
12. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
13. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
14. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
16. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
17. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
18. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
19. *Тверитинов В.А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений // Деп. ВИНИТИ АН СССР. 15.11.89. № 6906–В89.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 05.06.2022 г.
После доработки 05.06.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.