ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1344–1352

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6+517.929

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

© 2022 г. А. Н. Зарубин

Исследуется задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе в главной части с параллельными линиями изменения типа в неограниченной области. Доказаны теоремы единственности и существования дважды непрерывно дифференцируемого решения.

DOI: 10.31857/S0374064122100053, EDN: KQDVAB

Введение. Известный метод решения задачи Трикоми, основанный на её редукции к сингулярному интегральному уравнению (см. [1, с. 79]), может быть применён и к некоторым уравнениям смешанного типа с запаздывающими аргументами, когда найдены их общие решения [2].

Предлагаемая работа изучает задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с сосредоточенным некарлемановским сдвигом по пространственной переменной вида

$$(\operatorname{sgn} y(h-y))U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=H(x-\tau)[U_x(x-\tau,y)+U(x-\tau,y)], \tag{1}$$

$0<\tau\equiv\text{const}$; $H(\zeta)$ – функция Хевисайда; в области $D=D^+\bigcup D_1^-\bigcup D_2^-\bigcup I$, где $D^+\{(x,y):0<x<+\infty,\ 0<y<h\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}D_k^+(0<h\equiv\text{const})$; $D_i^-=\{(x,y):x>0,\ -x-(i-1)h<(-1)^{i+1}y<(1-i)h\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}D_{ik}^-\bigcup(D_i^-\setminus\bigcup_{k=0}^{+\infty}D_{ik}^-)$, $i=1,2,$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причём

$$D_k^+=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,0<y<h\},\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$D_{ik}^-=\{(x,y):k\tau+(-1)^iy+(1-i)h<x<(k+1)\tau+(-1)^{i+1}y+(i-1)h,$$
$$(1-i)h+(-1)^{2i-1}\tau/2<(-1)^{i+1}y<(1-i)h\},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad i=1,2,$$

а

$$I=I_1\bigcup I_2,\quad I_i=\{(x,y):x>0,\ \ y=(i-1)h\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}I_{ik},$$

$$I_{ik}=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\ \ y=(i-1)h\},\quad i=1,2.$$

1. Постановка задачи. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовём функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap C^2(D)$, имеющую непрерывные производные в D, кроме, быть может, точек $(0,0)$, $(0,h)$, в которых производные $U_x(x,y)$, $U_y(x,y)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Задача *T*. Найти регулярное в области D решение $U(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}U(x,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{3}$$

$$U(x,y)|_{y=(-1)^ix+(i-1)h}=\psi_i(x),\quad x\geqslant 0,\quad i=1,2,\quad \psi_i(0)=\psi_i(+\infty)=0, \tag{4}$$

$$U(x,(i-1)h-) = U(x,(i-1)h+) = \omega_i(x), \quad x \geqslant 0, \quad i = 1,2, \tag{5}$$

$$U_y(x,(i-1)h-) = U_y(x,(i-1)h+) = \nu_i(x), \quad x > 0, \quad i = 1,2, \tag{6}$$

где $\psi_i(x)$, $i = 1,2$, – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega_i(x)$, $\nu_i(x)$, $i = 1,2$, – неизвестные функции, подлежащие определению в процессе решения задачи.

2. Однозначная разрешимость задачи T.

Теорема. *Если функции $\psi_i(x) \in C[0,+\infty) \bigcap C^2(0,+\infty)$ абсолютно интегрируемы на промежутке $(0,+\infty)$ и $\psi_i(0) = \psi_i(+\infty) = 0$, то существует единственное регулярное решение задачи T.*

Доказательство. Единственность решения задачи T основана на установлении знакоопределённости интеграла $\beta = \beta_1 - \beta_2$, $\beta_i = \int_0^{+\infty} \omega_i(x)\nu_i(x)\,dx$, $i = 1,2$.

Лемма 1. *Если $U(x,y)$ – решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\overline{D}^+) \bigcap C^2(D^+)$, обращающееся в нуль при $x = 0$, $x \to +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant h$, то*

$$\beta \leqslant 0 \tag{7}$$

и

$$\beta + \iint\limits_{D^+} \Bigg\{ U_y^2(x,y) + H(x-\tau)\Big[U_x(x-\tau,y) + \frac{1}{2}U(x,y)\Big]^2 + \frac{1}{4}[2 - H(x-\tau)]U^2(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{2}H(x-\tau)\Bigg[\Bigg(\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Bigg)^2 - \Bigg(\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Bigg)^2\Bigg]\Bigg\}\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Доказательство следует из тождества

$$U(x,y)[U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y) - H(x-\tau)U_x(x-\tau,y) - H(x-\tau)U(x-\tau,y)] =$$

$$= (U(x,y)U_x(x,y))_x - U_x^2(x,y) + (U(x,y)U_y(x,y))_y - U_y^2(x,y) -$$

$$- H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y) - H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y) = 0,$$

интегрируя которое по области $D^+_{\varepsilon\rho} = \{(x,y) : \varepsilon < x < \rho,\ 0 < y < h\}$, $0 < \varepsilon < \rho \equiv \mathrm{const}$, применяя формулу Грина [3, с. 541] и условия леммы, в пределе при $\varepsilon \to 0$, $\rho \to +\infty$ в силу (5), (6) и равенств

$$\iint\limits_{D^+} [U_x^2(x,y) + H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y)]\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D^+} \Bigg\{ U_x^2(x,y) - H(x-\tau)U_x^2(x-\tau,y) + H(x-\tau)\Big[U_x(x-\tau,y) + \frac{1}{2}U(x,y)\Big]^2 -$$

$$- \frac{1}{4}H(x-\tau)U^2(x,y)\Bigg\}\,dx\,dy = \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\Bigg\{\Big[U_x(x-\tau,y) + \frac{1}{2}U(x,y)\Big]^2 - \frac{1}{4}U^2(x,y)\Bigg\}\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)U^2(x-\tau,y)\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\{U^2(x,y) - [U(x,y) - U(x-\tau,y)]^2\}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D^+} U^2(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\Big[\Big(\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Big)^2 - \Big(\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Big)^2\Big]\,dx\,dy$$

получим (8).

Так как

$$\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\Big[\Big(\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Big)^2 - \Big(\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Big)^2\Big]\,dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\Big[\Big(\int\limits_0^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\Big)^2 - \Big(\int\limits_{x-\tau}^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\Big)^2\Big]\,dx\,dy \geqslant 0,$$

то из (8) следует неравенство (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $U(x,y) \in C(\overline{D}_i^-)\bigcap C^2(D_i^-)$ *– решение уравнения (1) в области* D_i^-, *обращающееся в нуль на характеристике* $y = (-1)^i x + (i-1)h$, $x > 0$, $i = 1,2$, *то*

$$\beta \geqslant 0. \tag{9}$$

Доказательство следует из тождества

$$U(x,y)[-U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y) - H(x-\tau)U_x(x-\tau,y) - H(x-\tau)U(x-\tau,y)] =$$

$$= -(U(x,y)U_x(x,y))_x + U_x^2(x,y) + (U(x,y)U_y(x,y))_y - U_y^2(x,y) -$$

$$- H(x-\tau)U_x(x-\tau,y)U(x,y) - H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y) = 0,$$

интегрируя которое по области

$$D_{i\varepsilon}^- = \{(x,y) : x > \varepsilon,\ \ -x-(i-1)h < (-1)^{i+1}y < -\varepsilon-(i-1)h\},\quad 0 < \varepsilon \equiv \mathrm{const},\quad i = 1,2,$$

с применением формулы Грина [3, с. 541] и условий леммы, в пределе при $\varepsilon \to 0$ в силу (5) и (6) имеем

$$(-1)^{i+1}\int\limits_0^{+\infty} \omega_i(x)\nu_i(x)\,dx = \iint\limits_{D_i^-} [U_y^2(x,y) - U_x^2(x,y) +$$

$$+ H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y) + H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)]\,dx\,dy,\quad i = 1,2. \tag{10}$$

Так как

$$\iint\limits_{D_i^-} H(x-\tau)U_x^2(x-\tau,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_i^-} U_x^2(x,y)\,dx\,dy,$$

а $U_x(x-\tau,y) \sim (U(x,y) - U(x-\tau,y))/\tau$ при $x \to x-\tau$ (см. [4, с. 100]), т.е. $U_x(x-\tau,y) = \alpha(x)(U(x,y) - U(x-\tau,y))/\tau$, $\lim\limits_{x\to x-\tau}\alpha(x) = 1$, $\alpha(x) > 0$ (см. [3, с. 130]), причём

$$\Big(\frac{1}{2}U(x,y) - U_x(x-\tau,y)\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2}U(x,y) - \frac{\alpha(x)}{\tau}(U(x,y) - U(x-\tau,y))\Big)^2 =$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta - \frac{\alpha(x)}{\tau}\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Big)^2 = \Big(\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha(x)}{\tau}\Big)\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x-\tau} U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\frac{1}{2}\int\limits_{x-\tau}^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x-\tau} |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\Big)^2 = \frac{1}{4}U^2(x,y),$$

то

$$\iint\limits_{D_i^-}[-U_x^2(x,y)+H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D_i^-}\Bigg[-U_x^2(x,y)+\frac{1}{4}H(x-\tau)U(x,y)U^2(x,y)+H(x-\tau)U_x^2(x-\tau,y)-$$

$$-H(x-\tau)\left(\frac{1}{2}U(x,y)-U_x(x-\tau,y)\right)^2\Bigg]\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D_i^-}H(x-\tau)\left[\frac{1}{4}U^2(x,y)-\left(\frac{1}{2}U(x,y)-U_x(x-\tau,y)\right)^2\right]dx\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\iint\limits_{D_i^-}H(x-\tau)\left[\frac{1}{4}U^2(x,y)-\frac{1}{4}U^2(x,y)\right]dx\,dy=0. \tag{11}$$

Кроме того, аналогично лемме 1 имеет место неравенство

$$\iint\limits_{D_i^-}H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)\,dx\,dy\geqslant 0. \tag{12}$$

Поэтому в силу (11), (12) из равенств (10) имеем $(-1)^{i+1}\int_0^{+\infty}\omega_i(x)\nu_i(x)\,dx=(-1)^{i+1}\beta_i\geqslant 0$, $i=1,2$, т.е. $\beta=\beta_1-\beta_2\geqslant 0$. Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству единственности решения задачи T. Из неравенств (7), (9) следует, что $\beta=0$, а потому из (8) получим положительно определённый двойной интеграл, равный нулю, и значит, $U_x(x,y)\equiv 0$, $U_y(x,y)\equiv 0$, т.е. $U(x,y)\equiv\mathrm{const}$ в D^+.

Однородность граничных условий в области D^+ и $U(x,y)\in C(\overline{D}^+)$ позволяет утверждать, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}^+$ и, в частности, $U(x,(i-1)h)=\omega_i(x)=0$, $x\geqslant 0$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (4) обеспечивает тривиальность решения $U(x,y)\equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D}_i^-$, $i=1,2$. Значит, в силу того, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}^+$ и в $\overline{D}_i^-$, $i=1,2$, следует, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}=\overline{D^+\bigcup D_1^-\bigcup D_2^-}$. Поэтому единственность решения задачи T для уравнения (1) с граничными условиями (2)–(6) в области $\overline{D}$ доказана.

Существование решения. Вопрос существования решения задачи T связан с разрешимостью системы функциональных соотношений относительно функций (5), (6), т.е. $\omega_i(x)$ и $\nu_i(x)$, $i=1,2$, привнесённых специальным образом на линии изменения типа $I_i=\{(x,y):x>0,\ y=(i-1)h\}$, $i=1,2$, из области D^+ и D_i^- решениями:

1) в эллиптической области D^+ задачи Дирихле (1)–(3), (5) для уравнения (1);

2) в гиперболической области D_i^-, $i=1,2$, задачи Коши (1), (5), (6) для уравнения (1).

Решения задач Дирихле и Коши будем искать по аналогии с работой [2] с помощью непосредственно проверяемого общего решения уравнения (1) вида

$$U^{\pm}_{\left\{\substack{0\\i}\right\}}(x,y)=\left\{U^{\pm}_{\left\{\substack{k\\ik}\right\}}(x,y):(x,y)\in\overline{D}^{\pm}_{\left\{\substack{k\\ik}\right\}},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad i=1,2\right\}, \tag{13}$$

здесь $(x,y)\in D^{\pm}$, $D^-=D_1^-\bigcup D_2^-$,

$$U^{\pm}_{\left\{\substack{k\\ik}\right\}}(x,y)=\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\i}\right\}}(x,y), \tag{14}$$

где

$$\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(x,y)=g^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}\left(x-y\sqrt{-\operatorname{sgn}y(h-y)}\right)+f^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}\left(x+y\sqrt{-\operatorname{sgn}y(h-y)}\right), \tag{15}$$

а

$$I^{m}_{0,x-m\tau;\alpha}\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(x,y)=\frac{2}{\Gamma(m)}\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta((x-m\tau+\alpha)^2-(\eta+\alpha)^2)^{m-1}\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(\eta,y)d\eta \tag{16}$$

– интеграл Эрдейи–Кобера [5, с. 246], причём $I^{0}_{0,x;0}\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(x,y)=\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(x,y)$ – тождественный оператор Эрдейи–Кобера; $\gamma_{mj}=(j!(m-j)!2^{2m})^{-1}$; $\Gamma(t)$ – гамма-функция [6, с. 246]; $g^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(t)$, $f^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(t)$, $i=1,2,$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Для определения функций $g^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(t)$, $f^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(t)$, $i=1,2,$ в формуле (15) для задачи Дирихле и задачи Коши воспользуемся соответственно условиями (5) и (5), (6).

В результате из (13) и (14) получим интегро-разностное уравнение

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^{m}_{0,x-m\tau,0}Z^{\Theta}(x)=\Theta(x), \tag{17}$$

где $\Theta(x)=\omega_1(x),\omega_2(x)$ для задачи Дирихле, причём

$$Z^{\omega_1}(x)=\Phi^{+}_{0}(x,0)=g^{+}_{0}(x)+f^{+}_{0}(x), \tag{18}$$

$$Z^{\omega_2}(x)=\Phi^{+}_{0}(x,h)=g^{+}_{0}(x-ih)+f^{+}_{0}(x+ih),\quad i=\sqrt{-1}; \tag{19}$$

или $\Theta(x)=\omega_j(x),\nu_j(x)$, $j=1,2,$ для задач Коши, когда

$$Z^{\omega_j}(x)=\Phi^{-}_{j}(x,(j-1)h)=g^{-}_{j}(x-(j-1)h)+f^{-}_{j}(x+(j-1)h), \tag{20}$$

$$Z^{\nu_j}(x)=\Phi^{-}_{jy}(x,(j-1)h)=-g^{-\prime}_{j}(x-(j-1)h)+f^{-\prime}_{j}(x+(j-1)h),\quad j=1,2, \tag{21}$$

а

$$Z^{\Theta}(x)=\{Z^{\Theta}_{k}(x):k\tau\leqslant x\leqslant(k+1)\tau,\quad k=0,1,2,\ldots\}. \tag{22}$$

Интегро-разностное уравнение (17) после обращения (см. [2]) приводит к решению вида (22), в котором

$$Z^{\Theta}_{k}(x)=\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}(-1)^m\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^{m}_{0,x-m\tau,0}Z^{\Theta}(x). \tag{23}$$

Лемма 3. Если выполняются условия $\omega_j(x)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\omega_j(0)=\omega_j(+\infty)=0$, $j=1,2,$ то решение $U^{+}_{0}(x,y)$ задачи Дирихле (1)–(3), (5) для уравнения (1) в области D^{+} существует, причём $U^{+}_{0}(x,y)\in C(\overline{D}^{+})\bigcap C^2(D^{+})$.

Доказательство. Из системы (18), (19) получим разностное уравнение

$$f^{+}_{0}(x)=R^{2ih}_{x}f^{+}_{0}(x)+\beta(x),$$

где $\beta(x)=R^{ih}_{x}Z^{\omega_2}(x)-R^{2ih}_{x}Z^{\omega_1}(x)$, R^{τ}_{x} – оператор сдвига, действующий по переменной $x:R^{\tau}_{x}q(x)=q(x-\tau)$, единственное решение которого, найденное в статье [7] методом последовательных приближений, имеет вид

$$f^{+}_{0}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}R^{2ihn}_{x}\beta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}R^{ih(2n+1)}_{x}Z^{\omega_2}(x)-\sum_{n=0}^{+\infty}R^{2ih(n+1)}_{x}Z^{\omega_1}(x).$$

Тогда, согласно равенствам (18),

$$f_0^+(x) = Z^{\omega_1}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} Z^{\omega_2}(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{2ih(n+1)} Z^{\omega_1}(x).$$

Значит, в силу формулы (15) будем иметь

$$\Phi_0^+(x,y) = g_0^+(x-iy) + f_0^+(x+iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]}\} Z^{\omega_2}(x) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-(h-y)]} - R_x^{i[h(2n+1)+(h-y)]}\} Z^{\omega_1}(x), \quad i = \sqrt{-1}. \tag{24}$$

Можно показать, что при выполнении условий леммы на функции $\omega_j(x)$, $j = 1, 2$, ряды в (24) равномерно сходятся на промежутке $[0, +\infty)$, и их возможно почленно дифференцировать по x и y дважды. Выражение (13) с функциями (14) для $U_0^+(x,y), (x,y) \in D^+$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), (5), так как функции $z^{\omega_j}(x) \in C[0,+\infty) \bigcap C^2(0,+\infty)$ абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$, $z^{\omega_j}(0) = Z^{\omega_j}(+\infty) = 0$, $j = 1, 2$, и операторы Эрдейи–Кобера (16) этих функций ограничены (см. [5, с. 246]).

Интегральное представление решения (13) с функциями (14) и (24) задачи Дирихле в области D^+ найдём исходя из того, что любая непрерывная на луче $[0, +\infty)$ функция имеет вид (см. [8, с. 254])

$$r(x) = (r(\zeta), \delta(\zeta - x) - \delta(\zeta + x)) = \int_0^{+\infty} r(\zeta)[\delta(\zeta - x) - \delta(\zeta + x)]\, d\zeta, \tag{25}$$

где

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda z)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z}\, d\lambda \tag{26}$$

– дельта-функция Дирака.

Действительно, для первого ряда выражения (24) в силу (25), (26) и формул (5.4.12.4), (2.5.46.8) из [9] имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]}\} Z^{\omega_2}(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_2}(\zeta)\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda(\zeta - x)} - e^{-i\lambda(\zeta + x)}) \operatorname{sh}(\lambda y) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda h(2n+1)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_2}(\zeta)\, d\zeta \int_0^{+\infty} (\cos\lambda(\zeta - x) - \cos\lambda(\zeta + x)) \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda h)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(y\pi/h)}{2h} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_2}(\zeta) \left[\frac{1}{\operatorname{ch}((\zeta - x)\pi/h) + \cos(y\pi/h)} - \frac{1}{\operatorname{ch}((\zeta + x)\pi/h) + \cos(y\pi/h)} \right] d\zeta.$$

Аналогичные преобразования второго ряда из (24) приводят к искомому интегральному представлению

$$\Phi_0^+(x,y) = \frac{\sin(y\pi/h)}{2h} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_j}(\zeta) \left[\frac{1}{\operatorname{ch}((\zeta - x)\pi/h) + (-1)^j \cos(y\pi/h)} - \right.$$

$$-\frac{1}{\operatorname{ch}((\zeta+x)\pi/h)+(-1)^j\cos(y\pi/h)}\Bigg]\,d\zeta, \tag{27}$$

а само решение U_0^+ задачи Дирихле (1)–(3), (5) в области D^+ в интегральной форме будет определяться равенствами (13), (14), (27). Лемма доказана.

Функциональное соотношение между функциями $Z^{\nu_j}(x)$ и $Z^{\omega_j}(x)$, привнесённое из области D^+ на линию $y=(j-1)h$, $0\leqslant x<+\infty$, $j=1,2$, найдём, воспользовавшись условием (6) в формулах (13), (14), (27), из интегро-дифференциально-разностного уравнения типа (17):

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}({\Phi^+_{0y}}'(x,y)|_{y=(n-1)h})=\nu_n(x),\quad n=1,2,$$

решение которого (см. [2]) имеет вид

$${\Phi^+_{0y}}'(x,y)|_{y=(n-1)h}=Z^{\nu_n}(x),\quad 0<x<+\infty,\quad n=1,2, \tag{28}$$

где функция $Z^{\nu_n}(x)$ определяется аналогично решению (22), в котором следует заменить $\Theta(x)$ на $\nu_n(x)$, $n=1,2$,

Дифференцируя выражение (27) (предварительно проинтегрировав по частям) по y, полагая $y=(n-1)h$, $n=1,2$, из (28) получим искомое функциональное соотношение

$$(-1)^{n+1}Z^{\nu_n}(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_n}(\zeta))'\left[\operatorname{cth}\left(\frac{(\zeta-x)\pi}{2h}\right)-\operatorname{cth}\left(\frac{(\zeta+x)\pi}{2h}\right)\right]d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_k}(\zeta))'\left[\operatorname{th}\left(\frac{(\zeta-x)\pi}{2h}\right)-\operatorname{th}\left(\frac{(\zeta+x)\pi}{2h}\right)\right]d\zeta,\quad n,k=1,2,\quad n\neq k,\quad 0<x<+\infty,$$

или

$$(-1)^{n+1}Z^{\nu_n}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x\pi/h)}{h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_n}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\operatorname{ch}(\zeta\pi/h)-\operatorname{ch}(x\pi/h)}+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}(x\pi/h)}{h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_k}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\operatorname{ch}(\zeta\pi/h)+\operatorname{ch}(x\pi/h)},\quad n,k=1,2,\quad n\neq k,\quad 0<x<+\infty. \tag{29}$$

Лемма 4. *Если выполняются условия* $\omega_j(x)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\nu_j(x)\in C^1(0,+\infty)$, $\omega_j(0)=\omega_j(+\infty)=0$, *то решение* $U_j^-(x,y)$, $j=1,2$, *задачи Коши (1), (5), (6) для уравнения (1) в области* D_j^- *существует, причём* $U_j^-(x,y)\in C(\overline{D}_j^-)\bigcap C^2(D_j^-)$, $j=1,2$.

Доказательство. Для построения решения задачи Коши (1), (5), (6) в области D_j^- найдём $g_j^-(x)$, $f_j^-(x)$ из системы (20), (21) в виде

$$g_j^-(x)=\frac{1}{2}Z^{\omega_j}(x+(j-1)h)-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x+(j-1)h}Z^{\nu_j}(\zeta)\,d\zeta+\frac{C}{2},$$

$$f_j^-(x)=\frac{1}{2}Z^{\omega_j}(x-(j-1)h)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-(j-1)h}Z^{\nu_j}(\zeta)\,d\zeta-\frac{C}{2}, \tag{30}$$

где $C\equiv\text{const}$, $j=1,2$.

Подставив значения (30) в формулу (15), получим

$$\Phi_j^-(x,y) = g_j^-(x-y) + f_j^-(x+y) =$$

$$= \frac{1}{2}[Z^{\omega_j}(x-y+(j-1)h) + Z^{\omega_j}(x+y-(j-1)h)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y+(j-1)h}^{x+y-(j-1)h} Z^{\nu_j}(\zeta)\,d\zeta, \tag{31}$$

где $\Theta(x) = \omega_j(x), \nu_j(x)$, $j=1,2$, $Z^{\Theta}(t)$ определяется равенством типа (22) с функциями (23).

Таким образом, решение задачи Коши (1), (5), (6) определяется выражениями (13), (14), (31). При этом $U_j^-(x,y) \in C(\overline{D}_j^-)\bigcap C^2(D_j^-)$, так как $\omega_j(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\nu_j(x) \in C^1(0,+\infty)$, $\omega_j(0) = \omega_j(+\infty) = 0$, абсолютно интегрируемы на $(0,+\infty)$; функции $Z^{\omega_j}(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $Z^{\nu_j}(x) \in C^1(0,+\infty)$, $Z^{\omega_j}(0) = Z^{\omega_j}(+\infty) = 0$, $j=1,2$, абсолютно интегрируемы на промежутке $(0,+\infty)$ и операторы Эрдейи–Кобера этих функций ограничены. Лемма доказана.

Функциональные соотношения между $Z^{\nu_j}(x)$ и $Z^{\omega_j}(x)$, привнесённые из областей D_j^- на линии $y=(j-1)h$, $0 \leqslant x < +\infty$, $j=1,2$, найдём, воспользовавшись условиями (4) в (13), (14), (31), из интегро-дифференциально-разностного уравнения типа (17):

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}(\Phi_n^-(x,y)|_{y=(-1)^n x+(n-1)h}) = \psi_n(x), \quad n=1,2, \quad 0<x<+\infty,$$

решение которого (см. [2]) имеет вид

$$\Phi_n^-(x,y)|_{y=(-1)^n x+(n-1)h} = Z^{\psi_n}(x), \quad 0<x<+\infty, \tag{32}$$

где $Z^{\psi_n}(x)$ определяется аналогично (22), если там заменить $\Theta(x)$ на $\psi_n(x)$, $n=1,2$.

С учётом в (32) выражения (31) после замены x на $x/2$ и дифференцирования получим искомое функциональное соотношение

$$(Z^{\omega_n}(x))' + (-1)^n Z^{\nu_n}(x) = Z\frac{d}{dx}(Z^{\psi_n}(x/2)), \quad x>0, \quad n=1,2. \tag{33}$$

Вопрос существования решения $U(x,y)$ задачи T для уравнения (1) в области D связан с разрешимостью системы функциональных соотношений (29), (33) между $Z^{\omega_n(x)}$ и $Z^{\nu_n(x)}$, $n=1,2$, привнесённых на линии $y=(n-1)h$, $x>0$, $n=1,2$, решениями задачи Дирихле (13), (14), (27) и задачи Коши (13), (14), (31), т.е. к сингулярной интегральной системе уравнений

$$(Z^{\omega_n}(x))' - \frac{1}{h}\mathrm{sh}\,(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_n}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\mathrm{ch}\,(\zeta\pi/h)-\mathrm{ch}\,(x\pi/h)} -$$

$$-\frac{1}{h}\mathrm{sh}\,(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_k}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\mathrm{ch}\,(\zeta\pi/h)+\mathrm{ch}\,(x\pi/h)} = \beta_n(x), \quad x>0, \tag{34}$$

где $\beta_n(x) = 2\dfrac{d}{dx}(Z^{\psi_n}(x))$, $n,k=1,2$, $n\neq k$, $\beta_n(x) \in C^1(0,+\infty)$.

Складывая и вычитая уравнения системы (34), после преобразований получаем систему

$$(Z^{\omega_1}(x)-(-1)^n Z^{\omega_2}(x))' - \frac{2}{h}\mathrm{sh}\,(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_1}(\zeta)-(-1)^n Z^{\omega_2}(\zeta))'\frac{\mathrm{ch}\,\{[(n-1)x+(2-n)\zeta]/h\}}{\mathrm{sh}^2(\zeta\pi/h)-\mathrm{sh}^2(x\pi/h)}\,d\zeta =$$

$$= \beta_1(x) - (-1)^n\beta_2(x), \quad x>0, \quad n=1,2, \tag{35}$$

которая после замены переменных и функций по формулам

$$(Z^{\omega_1}(x)-(-1)^n Z^{\omega_2}(x))' = \operatorname{sh}(nx\pi/h)\, r_n(y), \quad y=\operatorname{sh}(x\pi/h),$$

$$\beta_1(x)-(-1)^n\beta_2(x) = \operatorname{sh}(nx\pi/h)\, q_n(y), \quad t=\operatorname{sh}(\zeta\pi/h), \quad n=1,2, \tag{36}$$

примет вид

$$r_n(y)-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} r_n(t)\frac{t\,dt}{t^2-y^2} = q_n(y), \quad y>0, \quad n=1,2. \tag{37}$$

Операция преобразования системы (35) в систему (37) законна ввиду однозначности и монотонности функции $\operatorname{sh}(\pi x/h)$, $0<x<+\infty$, и условия $q_n(y)\in C^1(0,+\infty)$.

Обращение сингулярной интегральной системы (37) в классе функций $r_n(y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера, проведено в работе [2] и имеет вид

$$r_n(y)=\frac{1}{2}\left[q_n(y)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\frac{t}{y}}q_n(t)\frac{t\,dt}{t^2-y^2}\right], \quad y>0, \quad n=1,2,$$

а возврат к старым переменным и функциям по формулам (36) приводит к решению системы уравнений (34), (35)

$$(Z^{\omega_1}(x)-(-1)^n Z^{\omega_2}(x))' = \frac{1}{2}\left[(\beta_1(x)-(-1)^n\beta_2(x))+\frac{2}{h}\operatorname{sh}(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(\beta_1(\zeta)-(-1)^n\beta_2(\zeta))\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/h)}{\operatorname{sh}(\pi x/h)}}\frac{\operatorname{ch}\{[(n-1)x+(2-n)\zeta]/h\}\,d\zeta}{\operatorname{sh}^2(\pi\zeta/h)-\operatorname{sh}^2(\pi x/h)}\right], \quad x>0, \quad n=1,2, \tag{38}$$

где $\beta_n(x)$, $n=1,2,$ – правая часть системы (34).

Из (38) найдём $Z^{\omega_n}(x)$, а из соотношения (33) с помощью (38) получим $Z^{\nu_n}(x)$, $n=1,2$.

Подставив в (13), (14), (27) и (13), (14), (31) найденные выражения для $Z^{\omega_n}(x)$ и $Z^{\nu_n}(x)$, $n=1,2$, получим окончательный вид соответственно искомых решений задачи Дирихле в области D^+ и задачи Коши в области D_n^-, $n=1,2$, а значит, и решение задачи T в области D. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. *Зарубин А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел, 1999.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М., 1988.
4. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М., 1999.
5. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
6. *Градштейн И.С., Ражик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.
7. *Зарубин А.Н.* Краевые задачи для функционально-дифференциальных канонических уравнений смешанного типа // Докл. РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 133–137.
8. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.

Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 08.04.2022 г.
После доработки 08.04.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.