ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1353–1359

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. В. И. Корзюк, И. И. Столярчук

Рассмотрена первая смешанная задача для волнового уравнения в цилиндрической области. С помощью метода характеристик получена явная формула классического решения данной задачи, а также найдены условия согласования на исходные функции, гарантирующие достаточную гладкость решения во всей области.

DOI: 10.31857/S0374064122100065, EDN: KQGELA

Введение. Смешанные задачи для гиперболических уравнений используются в различных прикладных сферах современной науки. Много работ посвящено исследованию корректной постановки задач для двумерных гиперболических уравнений. Для этих задач доказаны критерии корректности или получены достаточные условия для существования единственного классического решения (см. [1–5]). Однако для уравнений с большим числом независимых переменных таких исследований проведено мало. Например, для задачи Коши для трёхмерного и четырёхмерного волновых уравнений получены формулы Кирхгофа и Пуассона. В книге [6, с. 65–70] выведены формулы для решения задачи Коши в случае произвольной размерности n. В работе [7] с помощью метода Фурье исследована первая смешанная задача для волнового уравнения, при этом вопрос об условиях согласования не изучен.

Возникает вопрос, можно ли получить достаточные условия существования единственного классического решения смешанных задач в случае пространств высоких размерностей и вывести явную формулу данного решения? В данной статье для простейшего случая первой смешанной задачи для четырёхмерного волнового уравнения найдена явная формула решения и выведены необходимые и достаточные условия согласования на значения этих функций и их производных до третьего порядка включительно для существования единственного классического решения поставленной задачи при заданной гладкости исходных функций. Стоит отметить, что в случае четырёх независимых переменных для гладкости решения поставленной задачи требуется более высокая гладкость на исходные функции, чем для первой смешанной задачи для уравнения колебания струны.

1. Постановка задачи. Задача рассматривается на множестве четырёх независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = \{\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \ \ \boldsymbol{x}' \in \Omega\}$, где $\Omega = \{\boldsymbol{x}' : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \subset \mathbb{R}^3$ – трёхмерный шар в четырёхмерном пространстве, относительно неизвестной функции $u : \mathbb{R}^4 \supset Q \to u(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$ задаётся волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta_{\boldsymbol{x}'} u = 0, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\Delta_{\boldsymbol{x}'} = \sum_{j=1}^{3} \partial^2/\partial {x_j}^2$ – оператор Лапласа.

К уравнению (1) добавляются условия Коши

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \tag{2}$$

где $\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \varphi(\boldsymbol{x}') \subset \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \psi(\boldsymbol{x}') \subset \mathbb{R}$ – заданные функции. На боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$ задаётся граничное условие Дирихле

$$u|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

здесь $\mu : \mathbb{R}^4 \supset \Gamma \to \mu(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$ – заданная функция.

2. Операторы осреднения. Для задачи Коши (1), (2) в области $\{(x_0, \boldsymbol{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3\}$ с помощью операторов осреднения доказана теорема о существовании единственного классического решения $u(\boldsymbol{x})$ при достаточной гладкости исходных данных и выведена формула под принятым названием *формула Кирхгофа*, которая даёт аналитическое выражение полученного решения [8, с. 155–157]. Этот же подход применим для первой смешанной задачи (1)–(3).

Рассмотрим оператор

$$J_u(\boldsymbol{x}, r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=r} u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=r} u(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}. \tag{4}$$

Оператор J обладает следующими очевидными свойствами, которые фактически задают непрерывность оператора при $r = 0$:

J-1) $J_u(\boldsymbol{x}, 0) = u(\boldsymbol{x})$;

J-2) $\lim\limits_{r\to 0} J_u(\boldsymbol{x}, r) = u(\boldsymbol{x})$.

Наряду с оператором (4) введём оператор $M_r u(\boldsymbol{x}) = rJ_u(\boldsymbol{x}, r)$, для которого справедливы следующие свойства:

M-1) $\lim\limits_{r\to 0} M_r u(\boldsymbol{x}) = 0$;

M-2) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{M_r u(\boldsymbol{x})}{r} = u(\boldsymbol{x})$;

M-3) $\dfrac{\partial}{\partial r} M_r u(\boldsymbol{x})\Big|_{r=0} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{M_r u(\boldsymbol{x})}{r} = u(\boldsymbol{x})$.

Утверждение 1. *Функция $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна на множестве своего задания тогда и только тогда, когда существует такая окрестность нуля U_0, что для любого параметра $r \in U_0$ функция $M_r u(\boldsymbol{x})$ непрерывна по переменным r, $\boldsymbol{x}$ и непрерывно-дифференцируема по r.*

Доказательство. Необходимость. Непрерывность функции $u(\boldsymbol{x})$ гарантирует непрерывность функции $M_r u(\boldsymbol{x})$ по переменным $\boldsymbol{x}$. Непрерывность функции $M_r u(\boldsymbol{x})$ по переменной r следует из свойств J-1), J-2), M-2).

Непрерывная дифференцируемость функции $M_r u(\boldsymbol{x})$ по переменной r в U_0 следует из свойства M-3).

Достаточность. Доказательство достаточности следует из свойства M-3). Утверждение доказано.

Также введём оператор осреднения $\tilde{J}$ по сектору сферы $S(\boldsymbol{x}, r)$ – части поверхности сферы, высекаемой телесным углом с величиной $4\pi r/R$, где R – радиус трёхмерного шара Ω, а $|S(\boldsymbol{x}, r)| = 4\pi rR$ – площадь части сферы.

Оператор $\tilde{J}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{J}_u(\boldsymbol{x}, r) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x},1)} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi rR} \int\limits_{\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi rR} \int\limits_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},r)} u(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}.$$

Заметим, что оператор $\tilde{J}$ удовлетворяет свойствам J-1), J-2), а также сохраняет гладкость функции.

3. Решение вспомогательной задачи для уравнения колебания струны. Рассмотрим точку $N(x_0, \boldsymbol{x}')$ с фиксированными пространственными координатами $\boldsymbol{x}'$. Применим к задаче (1)–(3) в точке N оператор M_r по переменным $\boldsymbol{x}'$. В результате задача (1)–(3) сведётся к задаче для уравнения

$$\partial^2_{x_0} M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') - a^2 \partial^2_r M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') = 0 \tag{5}$$

в области $\widetilde{Q} = \{(x_0, r) : x_0 > 0,\ \ r \in (0, r_N]\}$, где $r_N = d(N, \Gamma)$ – расстояние от точки N до границы Γ, с начальными условиями

$$M_r u|_{x_0=0} = M_r\varphi(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}(r), \quad M_r\partial_{x_0}u|_{x_0=0} = M_r\psi(\boldsymbol{x}') = \overline{\psi}(r) \tag{6}$$

и граничными условиями

$$M_r u|_{r=r_N} = \overline{\mu}(x_0) = \tilde{J}_\mu(x_0, \boldsymbol{x}', r_N), \quad M_r u|_{r\to 0} = 0. \tag{7}$$

Задача (5)–(7) представляет собой первую смешанную задачу для одномерного волнового уравнения, заданную в полуполосе относительно функции $v(x_0, r; \boldsymbol{x}') = M_r u(\boldsymbol{x})$. При этом искомая функция из задачи (1)–(3) $u(\boldsymbol{x})$ выражается через решение $v(x_0, r; \boldsymbol{x}')$ задачи (5)–(7) по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial r}v(x_0, r; \boldsymbol{x}') = \lim_{r\to 0}\frac{M_r u(\boldsymbol{x})}{r}, \tag{8}$$

откуда и в силу утверждения 1 следует, что решение u будет принадлежать классу $C^2(\overline{Q})$, если решение v задачи (5)–(7) будет из класса $C^3([0, +\infty) \times [0, r_N])$.

Для задачи (5)–(7) в статье [9] уже доказан критерий существования единственного классического решения из класса $C^3([0, +\infty) \times [0, r_N])$.

Утверждение 2. *Классическое решение задачи (5)–(7) существует и единственно в классе* $C^3(\widetilde{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\varphi}(r) \in C^3([0, r_N])$, $\overline{\psi}(r) \in C^2([0, r_N])$, $\overline{\mu}(x_0) \in C^3([0, +\infty))$, *и выполняются условия согласования*

$$\overline{\varphi}(0) = 0, \quad \overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0), \quad \overline{\psi}(0) = 0, \quad \overline{\psi}(r_N) = d\overline{\mu}(0),$$
$$d^2\overline{\varphi}(0) = 0, \quad d^2\overline{\mu}(0) = a^2 d^2\overline{\varphi}(r_N), \quad d^2\overline{\psi}(0) = 0, \quad d^3\overline{\mu}(0) = a^2 d^2\overline{\psi}(l). \tag{9}$$

Из формулы (8) следует, что для нахождения решения исходной задачи необходимо найти предел решения вспомогательной задачи (5)–(7) при $r \to 0$ для каждой фиксированной точки N. Это означает, что для $x_0 > 0$ в зависимости от его величины при $r \to 0$ для достаточно малых значений параметра r будет выполняться неравенство $(k+1)r_N - ax_0 < r < ax_0 - kr_N$, $k = 0, 1, \ldots$ В работе [1] для решения задачи (5)–(7) в области, описываемой предыдущим неравенством, приведена рекуррентная формула

$$v^{(k)}(x_0, r; \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}(\overline{\varphi^{(k)}}(r + ax_0 - kr_N) - \overline{\varphi^{(k)}}(-r + ax_0 - kr_N)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N}\overline{\psi^{(k)}}(z)\,dz. \tag{10}$$

Выведем явную формулу решения в данной области.

Значения функций $\overline{\varphi^{(k)}}$, $\overline{\psi^{(k)}}$ находятся из решения $v^{(k-1)}(x_0, r; \boldsymbol{x}')$ по следующим формулам (см. [1]):

$$\overline{\varphi^{(k)}}(r) = v^{(k-1)}(kr_N/a, r; \boldsymbol{x}') = p^{(k-1)}(r - kr_N) + g^{(k-1)}(r + kr_N),$$
$$\overline{\psi^{(k)}}(r) = \partial_{x_0}v^{(k-1)}(kr_N/a, r; \boldsymbol{x}') = -adp^{(k-1)}(r - kr_N) + adg^{(k-1)}(r + kr_N),$$

а функции $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ определяются по формулам

$$p^{(k)}(z) = -\frac{1}{2}\overline{\varphi^{(k)}}(-z - kl) - \frac{1}{2a}\int\limits_{r_N}^{-z-kr_N}\overline{\psi^{(k)}}(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2},$$

$$g^{(k)}(y) = \overline{\mu}\left(\frac{y - r_N}{a}\right) - \frac{1}{2}\overline{\varphi^{(k)}}(2r_N - y + kr_N) + \frac{1}{2a}\int\limits_{r_N}^{2r_N-y+2kr_N}\overline{\psi^{(k)}}(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2}.$$

Из последних выражений следует, что

$$\overline{\varphi^{(k)}}(r) = p^{(k-1)}(r - kr_N) + g^{(k-1)}(r + kr_N) = \overline{\mu}\left(\frac{r + (k-1)r_N}{a}\right) - \overline{\varphi^{(k-1)}}(r_N - r) =$$

$$= \overline{\mu}\left(\frac{r + (k-1)r_N}{a}\right) - \overline{\mu}\left(\frac{(k-1)r_N - r}{a}\right) + \overline{\varphi^{(k-2)}}(r).$$

Продолжив далее этот процесс, получим формулу для произвольного k, которая выражается через известную функцию $\overline{\varphi}$:

$$\overline{\varphi^{(k)}}(r) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) + (-1)^k\overline{\varphi}\left((-1)^k r + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right).$$

Аналогично выводится формула для функции $\overline{\psi^{(k)}}$:

$$\overline{\psi^{(k)}}(r) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j d\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) + (-1)^k\overline{\psi}\left((-1)^k r + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right).$$

Таким образом, решение (10) задачи (5)–(7) для $(k+1)r_N - ax_0 < r < ax_0 - kr_N$ представимо в виде

$$v^{(k)}(x_0, r; \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left(\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\right) - \overline{\mu}\left(\frac{(-1)^{j+1} r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\right)\right) +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2}\left(\overline{\varphi}((-1)^k r + \chi^{(k;N)}(x_0)) - \overline{\varphi}((-1)^{(k+1)} r + \chi^{(k;N)}(x_0))\right) +$$

$$+ \frac{1}{2a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N} d\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j \xi + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2a}\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N} \overline{\psi}\left((-1)^k \xi + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right) d\xi, \tag{11}$$

где

$$\tau_j^{(k;N)}(x_0) = (-1)^j x_0 + \frac{1}{a}(r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor) + (-1)^{j+1} k r_N),$$

$$\chi^{(k;N)}(x_0) = (-1)^k(ax_0 - kr_N) + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right| r_N. \tag{12}$$

4. Вывод формулы для решения первой смешанной задачи в цилиндре. Используя формулу (8), найдём из (11) решение исходной задачи для точек $(x_0, \boldsymbol{x}')$ для каждого фиксированного $\boldsymbol{x}'$. Для этого рассмотрим слагаемые с $\overline{\mu}$, $d\overline{\mu}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ по отдельности.

Слагаемые с $\overline{\varphi}$ преобразуются следующим образом:

$$\frac{(-1)^k}{2}(\overline{\varphi}((-1)^k r + \chi^{(k;N)}(x_0)) - \overline{\varphi}((-1)^{(k+1)} r + \chi^{(k;N)}(x_0))) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2}\lim_{r\to 0}\frac{M_{(-1)^k r + \chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}') - M_{(-1)^{(k+1)} r + \chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{r} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2}\lim_{r\to 0}\frac{M_{(-1)^k r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}') - M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{r} +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2}\lim_{r\to 0}\frac{M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}') - M_{(-1)^{(k+1)} r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{r} =$$

$$= \frac{\partial M_{\chi^{(k;N)}(r/a)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial r}\bigg|_{r=ax_0} = \frac{\partial M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial(ax_0)} = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial_{x_0}}\Bigg(\frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}\Bigg).$$

Аналогично случаю с $\overline{\varphi}$ преобразуются слагаемые с $\overline{\mu}$:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\Bigg(\overline{\mu}\bigg(\frac{(-1)^j r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\bigg) - \overline{\mu}\bigg(\frac{(-1)^{j+1} r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\bigg)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial\tilde{M}_{\tau_j^{(k;N)}(x_0)}\mu(\boldsymbol{x})}{\partial x_0} = \frac{1}{4\pi Ra}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_j^{(k;N)}(x_0))}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Слагаемые с $\overline{\psi}$ преобразуются с использованием правила Лопиталя для раскрытия неопределённости вида $[0/0]$ следующим образом:

$$\frac{(-1)^k}{2a}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N}\overline{\psi}\bigg((-1)^k\xi + \bigg|\sin\frac{\pi k}{2}\bigg|\bigg)\,d\xi =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2a}\lim_{r\to 0}M_{(-1)^k r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{x}') + M_{(-1)^{(k+1)} r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{x}') =$$

$$= \frac{1}{a}M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{4\pi a\chi^{(k;N)}(x_0)}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Аналогично получим для слагаемых с $d\overline{\mu}$:

$$\frac{1}{2a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N}d\overline{\mu}\bigg(\frac{(-1)^j\xi + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\bigg)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial\tilde{M}_{\tau_j^{(k;N)}(x_0)}\mu(\boldsymbol{x})}{\partial x_0} = \frac{1}{4\pi Ra}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_j^{(k;N)}(x_0))}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Таким образом, решение (11) задачи (5)–(7) преобразуется к решению задачи (1)–(3):

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial_{x_0}}\Bigg(\frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}\Bigg) + \frac{1}{4\pi a\chi^{(k;N)}(x_0)}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi Ra}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_j^{(k;N)}(x_0))}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}, \tag{13}$$

где функции τ, χ определены по формуле (12).

5. Условия согласования. В утверждении 2 важную роль играет выполнение условий согласования (9). Найдём эквивалентные условия в терминах исходных функций φ, ψ, μ. Заметим, что некоторые из этих условий, а именно $\overline{\varphi}(0) = 0$, $\overline{\psi}(0) = 0$, $d^2\overline{\varphi}(0) = 0$, $d^2\overline{\psi}(0) = 0$, выполняются автоматически в силу определения оператора M_r.

Рассмотрим условие согласования $\overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0)$. Исходя из определения, имеем

$$\overline{\varphi}(r_N) = M_{r_N}\varphi(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{4\pi r_N}\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N}\varphi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$\overline{\mu}(0) = \frac{1}{4\pi R r_N}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'},$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N}\varphi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}. \tag{14}$$

Аналогично выводятся остальные условия согласования:

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N}\psi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)}\partial_{x_0}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$a^2\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N}\Delta\varphi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)}\partial^2_{x_0}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$a^2\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N}\Delta\psi(\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R}\int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}',r_N)}\partial^3_{x_0}\mu(x_0,\boldsymbol{y}')\,ds_{\boldsymbol{y}'}. \tag{15}$$

Таким образом, в силу утверждения 2, формулы (13) и выведенных выше условий согласования следует теорема о разрешимости первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндрической области.

Теорема. *Пусть* $\varphi(\boldsymbol{x}') \in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi(\boldsymbol{x}') \in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu(\boldsymbol{x}) \in C^3(\Gamma)$. *Классическое решение задачи (1)–(3) существует, единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *и может быть найдено в точках* $\boldsymbol{x}$, *у которых* $x_0 \in [kr_N/a,(k+1)r_N/a]$, $k = 1,2,\ldots$, *по формуле (13), где* $r_N = d(N,\Gamma)$ – *расстояние от точки* $\boldsymbol{x}$ *до границы* Γ, *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (14), (15).*

Заключение. В данной работе выведена явная формула для решения первой смешанной задачи для четырёхмерного волнового уравнения в цилиндре и получены необходимые и достаточные условия согласования на исходные данные задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1108–1117.
2. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.

3. *Чернятин В.А.* О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С. 717–720.
4. *Барановская С.Н., Юрчук Н.И.* Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.
5. *Шлапакова Т.С., Юрчук Н.И.* Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с производной в краевом условии, направленной не по характеристике // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2013. № 1. С. 64–69.
6. *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск, 2003.
7. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.
8. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М., 2021.
9. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Произвольной гладкости классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 1. С. 34–47.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 05.06.2022 г.
После доработки 29.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.