ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1360–1379

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ НА КОМПАКТЕ БОРА

© 2022 г. Е. Ю. Панов

Дана формулировка пространственно почти периодических (в смысле Безиковича) решений вырождающихся нелинейных параболических уравнений в рамках теории дифференциальных уравнений на компактной группе Бора. Введено понятие обобщённого энтропийного решения задачи Коши, доказано его существование и единственность. Для доказательства единственности развит вариант метода Кружкова удвоения переменных. Данная формулировка полезна для описания новых инвариантных преобразований на множестве энтропийных решений (обобщённых сдвигов).

DOI: 10.31857/S0374064122100077, EDN: KQJPCE

Введение. В полупространстве $\Pi = \{(t,x) : t\in\mathbb{R}_+ = (0,+\infty),\ \ x\in\mathbb{R}^n\}$ рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \tag{1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u),\ldots,\varphi_n(u))$ лишь непрерывен: $\varphi_i(u)\in C(\mathbb{R})$, $i=\overline{1,n}$, а матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u)\in L^\infty(\mathbb{R})$, $i,j=\overline{1,n}$. Также предполагается, что матрица $a(u)\geqslant 0$ (неотрицательно определена). У этой матрицы может быть нетривиальное ядро, так что в общем случае (1) – вырождающееся (гиперболическое-параболическое) уравнение. В частном случае при $a\equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x\varphi(u) = 0. \tag{2}$$

Формально уравнение (1) записывается в консервативной форме

$$u_t + \operatorname{div}_x\varphi(u) - D_x^2\cdot A(u) = 0, \tag{3}$$

где матрица $A(u)$ – первообразная для $a(u)$, т.е. $A'(u) = a(u)$, а оператор D_x^2 (дивергенция второго порядка) определяется как

$$D_x^2\cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}A_{ij}(u).$$

Уравнение (1) дополним начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{4}$$

Пусть функция $g(u)\in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке из множества $\mathbb{R}$. Нам понадобится ограниченный линейный оператор $T_g : C(\mathbb{R})/C\to C(\mathbb{R})/C$, где C обозначает одномерное подпространство постоянных функций, который задаётся с точностью до аддитивной постоянной соотношением

$$T_g(f)(u) = g(u-)f(u) - \int\limits_c^u f(s)dg(s) \tag{5}$$

(изменение параметра c сводится к добавлению константы и не меняет оператора), где $g(u-)=\lim\limits_{v\to u-}g(v)$ – левосторонний предел функции g в точке u, а интеграл в (5) понимается в соответствии с формулой

$$\int\limits_c^u f(s)dg(s)=\operatorname{sign}(u-c)\int\limits_{J(u)} f(s)dg(s),$$

здесь $\operatorname{sign}(u-c)=1$ и $J(u)$ – интервал $[c,u)$, если $u>c$, и $\operatorname{sign}(u-c)=-1$, $J(u)=[u,c)$ при $u\leqslant c$. Отметим, что функция $T_g(f)(u)$ непрерывна даже при разрывной $g(u)$. Например, если $g(u)=\operatorname{sign}(u-k)$, то $T_g(f)(u)=\operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k))$. Отметим также, что на подпространстве гладких функций $C^1(\mathbb{R})$ оператор T_g определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной равенством $T_g(f)'(u)=g(u)f'(u)$ (в пространстве обобщённых функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Фиксируем представление матрицы диффузии $a(u)$ в форме

$$a(u)=b^{\mathrm{т}}(u)b(u),$$

где $b(u)=(b_{ij}(u))$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,n}$, – $r\times n$-матричнозначная функция с ограниченными измеримыми компонентами, $b_{ij}\in L^\infty(\mathbb{R})$. При $r=n$ мы можем взять $b(u)=(a(u))^{1/2}$. Представление $a(u)=b^{\mathrm{т}}(u)b(u)$ означает, что для всех $j,k=\overline{1,n}$ справедливо равенство

$$a_{jk}(u)=\sum_{i=1}^r b_{ij}(u)b_{ik}(u). \tag{6}$$

Напомним теперь понятие энтропийного решения (э.р.) задачи Коши (1), (4), введённое в работе [1].

Определение 1. Функция $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением задачи (1), (4), если выполнены следующие условия:

(i) для всех $i=\overline{1,r}$ распределение

$$\operatorname{div}_x B_i(u(t,x))\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$$

(частичная соболевская регулярность), где векторы $B_i(u)=(B_{i1}(u),\ldots,B_{in}(u))\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ таковы, что $B'_{ij}(u)=b_{ij}(u)$, $j=\overline{1,n}$;

(ii) для любой функции $s(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $i=\overline{1,r}$,

$$\operatorname{div}_x T_s(B_i)(u(t,x))=s(u(t,x))\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)) \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Pi)$$

(цепное правило);

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t+\operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u)-D_x^2\cdot T_{\eta'}(A)(u)+\eta''(u)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(u))^2\leqslant 0 \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Pi); \tag{7}$$

(iv) $\operatorname*{ess\,lim}\limits_{t\to 0} u(t,\cdot)=u_0$ в пространстве $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Энтропийное соотношение (7) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Pi\left[\eta(u)f_t+T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f+T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f-f\eta''(u)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(u))^2\right]dt\,dx\geqslant 0, \tag{8}$$

где $D_x^2 f$ – симметричная матрица производных второго порядка функции f по пространственным переменным x (гессиан), а символ " $\cdot$ " обозначает обычное скалярное произведение векторов или матриц (так что в случае матриц имеет место равенство $A \cdot B = \operatorname{Tr} A^{\mathrm{т}} B$).

В изотропном случае, когда матрица $A(u) = g(u)E$ скалярна, понятие э.р. было введено ранее в работе [2], и определение э.р. в этом случае значительно упрощается. Для законов сохранения (2) определение 1 сводится к известному определению обобщённого энтропийного решения в смысле С.Н. Кружкова [3]. Подставив $\eta(u) = \pm u$ в (7), получим, что

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi),$$

т.е. э.р. $u(t,x)$ является слабым решением уравнения (3).

Известно (см., например, [4, предложение 2.1]), что начальное условие можно включить в интегральное энтропийное неравенство, заменив условия (iii), (iv) на одно, эквивалентное им, соотношение: для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и любой неотрицательной пробной функции $f(t,x) \in C_0^\infty(\bar\Pi)$, где $\bar\Pi = [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство

$$\int\limits_\Pi \left[\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f \eta''(u) \sum_{i=1}^r (\operatorname{div}_x B_i(u))^2 \right] dt\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0,x)\,dx \geqslant 0. \tag{9}$$

Как показано в [1], в случае непрерывного по Липшицу вектора потока э.р. задачи (1), (4) всегда существует и единственно. В нашем случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а матрица диффузии может вырождаться на целом интервале, свойство единственности может нарушаться, в случае законов сохранения (2) это было показано в работах [5, 6]. В статье [4] установлено существование единственных наибольшего и наименьшего э.р. задачи (1), (4), откуда легко выводится единственность э.р. в случае периодических начальных данных. В работе [7] исследовался более общий случай почти периодической (в смысле Безиковича) начальной функции.

Напомним (см., например, [8, гл. 5, § 10]), что пространство Безиковича $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$ – это замыкание (по указанной ниже норме N_p) тригонометрических многочленов, т.е. конечных сумм $\sum a_\lambda e^{2\pi i \lambda \cdot x}$, $i^2 = -1$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, в фактор-пространстве $B^p(\mathbb{R}^n)/B_0^p(\mathbb{R}^n)$, где

$$B^p(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : N_p(u) < +\infty\}, \quad B_0^p(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : N_p(u) = 0\},$$

а

$$N_p(u) = \left(\limsup_{R\to\infty} R^{-n} \int\limits_{C_R} |u(x)|^p\,dx \right)^{1/p}$$

– средняя " L^p-норма" функции $u = u(x)$. Здесь $C_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty \doteq \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| < R/2\}$ – n-мерный куб со стороной $R > 0$. Пространство $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$, снабжённое нормой N_p, является банаховым пространством, которое изоморфно пополнению пространства Бора $AP(\mathbb{R}^n)$ равномерно почти периодических функций по норме N_p.

Известно, что пространства $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ сужаются с ростом $p \geqslant 1$ (так что $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ является самым "большим" среди пространств Безиковича), и что для любой функции $u \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ существуют среднее значение

$$⨍\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx \doteq \lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_{C_R} u(x)\,dx,$$

а также более общие коэффициенты Бора–Фурье

$$a_\lambda = \fint_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-2\pi i\lambda\cdot x}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним, что множество

$$\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : a_\lambda \neq 0\}$$

называется *спектром почти периодической функции* $u(x,t)$ и является не более чем счётным множеством в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $G(u)$ наименьшую аддитивную подгруппу пространства $\mathbb{R}^n$, содержащую $\operatorname{Sp}(u)$, это также счётное множество (конечно, если оно отлично от нулевой подгруппы). В статье [7] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *– ограниченная почти периодическая начальная функция,* $u(t,x)$ *– э.р. задачи (1), (4). Тогда* $u(t,\cdot) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и* $G(u(t,\cdot)) \subset \subset G(u_0)$ *для п.в.* $t > 0$.

В [7] также доказана и единственность э.р. (в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n))$. В данной работе докажем единственность э.р. в более общей постановке, когда задача (1), (4) формулируется в рамках теории уравнений на боровском компакте $\mathcal{B}_n$.

1. Компактная группа Бора $\mathcal{B}_n$. Известно (см., например, [9, гл. 1, § 8]), что боровский компакт $\mathcal{B}_n$ – это компактная абелева группа, совпадающая со спектром (пространством максимальных идеалов) алгебры $AP(\mathbb{R}^n)$ равномерно почти периодических функций Бора. Имеется непрерывный групповой мономорфизм $b : \mathbb{R}^n \to \mathcal{B}_n$, задаваемый тождеством $\hat{f}(b(x)) = f(x)$ для всех $f \in AP(\mathbb{R}^n)$, где $f \to \hat{f}$ – преобразование Гельфанда (так что $\hat{f}$ "пробегает" все непрерывные функции на $\mathcal{B}_n$). При этом образ b плотен в $\mathcal{B}_n$. Можно показать, что группа $\mathcal{B}_n$ изоморфна $(\mathcal{B}_1)^n$, где $\mathcal{B}_1$ – стандартный "одномерный" боровский компакт. Обозначим через m меру Хаара на $\mathcal{B}_n$, которая представляет собой функционал среднего значения, т.е. для любой почти периодической функции $v(x) \in AP(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathcal{B}_n} \hat{v}(x)\,dm(x) = \fint_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx.$$

В частности, для любого $p \geqslant 1$ справедливы равенства

$$\int_{\mathcal{B}_n} |\hat{v}(x)|^p\,dm(x) = \int_{\mathcal{B}_n} (|v(x)|^p)^\wedge\,dm(x) = \fint_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p\,dx,$$

откуда следует, что преобразование Гельфанда допускает единственное непрерывное продолжение до изоморфизма $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathcal{B}_n, m)$, $p \geqslant 1$. Сохраним как обозначение $u \to \hat{u}$, так и наименование "преобразование Гельфанда" для этого изоморфизма. Как показано в статье [10, лемма 4.1], при преобразовании Гельфанда пространство $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ переходит в пространство $L^\infty(\mathcal{B}_n, m)$. Для полноты изложения приведём это свойство с доказательством.

Лемма 1. *Функция* $u(x)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{u}(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n, m)$.

Доказательство. По свойствам преобразования Гельфанда $\widehat{h(u)} = h(\hat{u})$ при всех $u = = u(x) \in AP(\mathbb{R}^n)$, $h = h(u) \in C(\mathbb{R})$. Если функция $h(u)$ непрерывна по Липшицу, то отображения $u \to h(\widehat{u})$, $u \to \widehat{h(u)}$ непрерывны на $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ и совпадают на плотном подпространстве $AP(\mathbb{R}^n)$. Поэтому эти отображения равны, т.е. $\widehat{h(u)} = h(\widehat{u})$ для всех $u = u(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, откуда следует, что

$$\fint_{\mathbb{R}^n} h(u(x))\,dx = \int_{\mathcal{B}_n} \widehat{h(u)}(x)\,dm(x) = \int_{\mathcal{B}_n} h(\widehat{u}(x))\,dm(x).$$

Подставив в это равенство $h(u)=(|u|-M)^+\doteq\max(0,|u|-M)$, $M\geqslant 0$, получим, что

$$\fint_{\mathbb{R}^n}(|u(x)|-M)^+\,dx=\int_{\mathcal{B}_n}(|\hat u(x)|-M)^+\,dm(x). \tag{10}$$

Если $u(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $M=\|u\|_\infty$, то из (10) следует, что $|\hat u(x)|\leqslant M$ m-п.в. на $\mathcal{B}_n$, а значит, $\hat u\in L^\infty(\mathcal{B}_n,m)$, $\|\hat u\|_\infty\leqslant M$. Обратно, если $\hat u\in L^\infty(\mathcal{B}_n,m)$, $M=\|\hat u\|_\infty$, то $\fint_{\mathbb{R}^n}(|u(x)|-M)^+\,dx=0$.

Рассмотрим функцию $v(x)=\max(-M,\min(M,u(x)))\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что $N_1(u-v)=\fint_{\mathbb{R}^n}(|u(x)|-M)^+\,dx=0$. Поэтому функции u и v совпадают в пространстве $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$. Итак, $u\equiv v\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, что и требовалось доказать.

Из доказательства леммы 1 имеем

$$\|\hat u\|_\infty=\min\{\|v\|_\infty : v\in L^\infty(\mathbb{R}^n),\quad v=u \text{ в } \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Для почти периодических функций Бора $u(x)\in AP(\mathbb{R}^n)$ преобразование Гельфанда $\hat u(x)$ является единственным непрерывным продолжением $u(x)$ на $\mathcal{B}_n$, так что $u(x)=\hat u(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Поэтому мы вправе отождествить функции $u(x)$ и $\hat u(x)$ и будем опускать знак $\hat{}$ преобразования Гельфанда. Для элементов пространств Безиковича их продолжение на группу Бора (как функций) рассматривать бессмысленно, поскольку $\mathbb{R}^n$ является, как нетрудно видеть, множеством нулевой m-меры, так что здесь целесообразно сохранить знак преобразования Гельфанда.

Заметим, что коэффициенты Бора–Фурье функции $u(x)$ совпадают с коэффициентами Фурье $\hat u(x)$ по группе характеров $e^{2\pi i\lambda\cdot x}$, $\lambda\in\mathbb{R}^n$, т.е.

$$a_\lambda=\int_{\mathcal{B}_n}\hat u(x)e^{-2\pi i\lambda\cdot x}\,dm(x).$$

Следующее свойство почти периодических функций также хорошо известно (см., например, [10, лемма 4.2]).

Лемма 2. *Пусть* $v(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, $g(y)\in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}v(x)g(x/R)\,dx=c_g\int_{\mathcal{B}_n}\hat v(x)\,dm(x),$$

где $c_g=\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\,dy$.

Доказательство. Выберем $k>0$ так, что $\operatorname{supp}g$ содержится в кубе C_k и пусть $M=\|g\|_\infty$. Тогда

$$\left|\limsup_{R\to+\infty}R^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}v(x)g(x/R)\,dx\right|\leqslant Mk^n\limsup_{R\to+\infty}(kR)^{-n}\int_{C_{kR}}|v(x)|\,dx=Mk^n\|v\|_{\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ввиду этой оценки и плотности множества тригонометрических многочленов в пространстве $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)=L^1(\mathcal{B}_n,m)$ утверждение леммы достаточно доказать для функций $v(x)=e^{2\pi i\lambda\cdot x}$, $\lambda\in\mathbb{R}^n$. Сделав замену $y=x/R$, получим

$$R^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}v(x)g(x/R)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi iR\lambda\cdot y}g(y)\,dy\underset{R\to+\infty}{\to}\begin{cases}0, & \lambda\neq 0,\\ c_g, & \lambda=0\end{cases}=c_g\int_{\mathcal{B}_n}\hat v(x)\,dm(x),$$

поскольку $e^{2\pi iR\lambda\cdot y}\underset{R\to+\infty}{\rightharpoonup}0$ $*$-слабо в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda\neq 0$. Лемма доказана.

Пусть $H \subset \mathbb{R}^n$ является счётно-мерным линейным подпространством над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ – его базис. Определим соответствующую Λ последовательность ядер Бохнера–Фейера

$$\Phi_r(x) = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbb{Z}^r\\ |\bar{k}|_\infty<(r+1)!}} \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{|k_j|}{(r+1)!}\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{r!}\sum_{j=1}^r k_j\lambda_j\cdot x\right) = \frac{1}{((r+1)!)^r}\prod_{j=1}^r \frac{\sin^2(\pi(r+1)\lambda_j\cdot x)}{\sin^2(\pi\lambda_j\cdot x/r!)}.$$

Эти ядра являются тригонометрическими многочленами и допускают непрерывное продолжение на группу $\mathcal{B}_n$. Заметим, что $\Phi_r(x) \geqslant 0$ и $\int_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(x)\,dm(x) = 1$. Следующее свойство также содержится в работе [10], приведём его с доказательством.

Лемма 3. *Пусть* $v(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Sp}(v) \subset H$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |v(x) - v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен $w(x) = \sum_{\lambda\in S} a_\lambda e^{2\pi i\lambda\cdot x}$ такой, что $S = \operatorname{Sp}(w) \subset \operatorname{Sp}(v)$ и $\|v - w\|_{L^1(\mathcal{B}_n)} < \varepsilon/2$. Так как, очевидно,

$$||v(x) - v(y)| - |w(x) - w(y)|| \leqslant |v(x) - w(x)| + |v(y) - w(y)|,$$

то

$$\left| \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |v(x)-v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) - \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |w(x)-w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(x)-w(x)|\left(\int\limits_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(x-y)\,dm(y)\right)dm(x) + \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(y)-w(y)|\left(\int\limits_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(x-y)\,dm(x)\right)dm(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(x)-w(x)|\,dm(x) + \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(y)-w(y)|\,dm(y) = 2\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(x)-w(x)|\,dm(x) < \varepsilon. \tag{12}$$

Заметим далее, что

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(x)-w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(y) \leqslant \sum_{\lambda\in S}|a_\lambda|\int\limits_{\mathcal{B}_n}|e^{2\pi i\lambda\cdot x} - e^{2\pi i\lambda\cdot y}|\Phi_r(x-y)\,dy =$$

$$= \sum_{\lambda\in S}|a_\lambda|\int\limits_{\mathcal{B}_n}|e^{2\pi i\lambda\cdot(x-y)} - 1|\Phi_r(x-y)\,dm(y) = \sum_{\lambda\in S}|a_\lambda|\int\limits_{\mathcal{B}_n}|e^{2\pi i\lambda\cdot z}-1|\Phi_r(z)\,dm(z) \doteq I_r. \tag{13}$$

Так как функция $h_\lambda(z) = |e^{2\pi i\lambda\cdot z} - 1|$ является равномерно почти периодической функцией Бора и её спектр лежит в H, то последовательность средних Бохнера–Фейера сходится равномерно по x к этой функции, т.е.

$$(h_\lambda)_r(x) = ⨍_{\mathbb{R}^n} |e^{2\pi i\lambda\cdot(x-z)} - 1|\Phi_r(z)dz = \int\limits_{\mathcal{B}_n} h_\lambda(x-z)\Phi_r(z)\,dm(z) \underset{r\to\infty}{\to} h_\lambda(x).$$

В частности,

$$(h_\lambda)_r(0) = \int\limits_{\mathcal{B}_n} h_\lambda(-z)\Phi_r(z)\,dm(z) = \int\limits_{\mathcal{B}_n} h_\lambda(z)\Phi_r(z)\,dm(z) \underset{r\to\infty}{\to} h_\lambda(0) = 0.$$

Отсюда, с учётом конечности множества S, следует, что $I_r \to 0$ при $r \to \infty$. Ввиду (13) последовательность интегралов

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} |w(x)-w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(y) \underset{r\to\infty}{\to} 0$$

равномерно по $x \in \mathcal{B}_n$, поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |w(x)-w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = 0.$$

Из последнего соотношения и (12) вытекает оценка

$$\limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |v(x)-v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) \leqslant \varepsilon,$$

откуда, с учётом произвольности $\varepsilon > 0$, и следует равенство (11). Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\omega(r)$ *– непрерывная функция на промежутке* $[0,+\infty)$, *такая что* $\omega(r) \geqslant \omega(0) = 0$, *а* $v(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n, m)$, $\operatorname{Sp}(v) \subset H$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} \omega(|v(x)-v(y)|)\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = 0. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть $M = \|v\|_\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такая константа $C > 0$, что

$$\omega(r) \leqslant \varepsilon + Cr \quad \text{для любого} \quad r \in [0, 2M]. \qquad (15)$$

Действительно, выберем $\delta > 0$ так, что $\omega(r) < \varepsilon$ при $0 \leqslant r < \delta$. Легко проверить, что тогда неравенство (15) выполнено при $C = \delta^{-1} \max\limits_{\delta\leqslant r\leqslant 2M} \omega(r)$. В силу (15) и леммы 3 приходим к соотношению

$$\limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} \omega(|v(x)-v(y)|)\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + C \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |v(x)-v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = \varepsilon,$$

и тогда равенство (14) следует из произвольности $\varepsilon > 0$.

2. Распределения на $\boldsymbol{\mathcal{B}_n}$. Уравнение (1) на боровском компакте. Полезно сформулировать уравнение (1) как уравнение на группе $\mathcal{B}_n$, понимаемое в смысле распределений. Введём сначала частные производные f_t, f_{x_i}, $i = \overline{1,n}$, функции $f(t,x)$ на множестве $Q \doteq \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_n$, задаваемые классическими поточечными предельными соотношениями

$$f_t(t,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}, \quad f_{x_i}(t,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t,x+he_i)-f(t,x)}{h},$$

где $t > 0$, $x \in \mathcal{B}_n$, а e_i, $i = \overline{1,n}$, – стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Индуктивно определяются и производные высших порядков

$$D^\alpha f(t,x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_0} t \partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ – мультииндекс порядка $|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. Стандартным образом определяются пространства $C^r(Q)$, $C_0^r(Q)$. Из инвариантности мер dt и m относительно сдвигов следует, что имеет место равенство

$$\int\limits_Q f_{x_i} g\,dt\,dm(x) + \int\limits_Q f g_{x_i}\,dt\,dm(x) = \int\limits_Q (fg)_{x_i}\,dt\,dm(x) = 0, \quad i = \overline{0,n}, \qquad (16)$$

для любых гладких финитных функций $f, g \in C_0^1(Q)$.

Рассмотрим пространство $C_0^\infty(Q)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на Q. Элементы этого пространства можно определить как функции $f(t,x) \in \in C^\infty(\Pi)$, носитель которых содержится в множестве вида $I \times \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}_+$ – отрезок, и у которых все частные производные являются равномерно почти периодическими функциями по пространственным переменным x. Пространство обобщённых функций $\mathcal{D}'(Q)$ определяется как пространство линейных непрерывных функционалов на локально выпуклом пространстве основных функций $C_0^\infty(Q)$. Как обычно, функции $u(t,x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q,\, dt \times m)$ вкладываются в $\mathcal{D}'(Q)$ в соответствии с тождеством

$$\langle u, f\rangle = \int\limits_Q u(t,x) f(t,x)\, dt\, dm(x), \quad f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q).$$

Стандартным образом определяются обобщённые производные $\langle D^\alpha u, f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha f\rangle$. В случае $u, v = D^\alpha u \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q,\, dt \times m)$ справедливо тождество

$$\int\limits_Q u(t,x) D^\alpha f(t,x)\, dt\, dm(x) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_Q v(t,x) f(t,x)\, dt\, dm(x)$$

для любых функций $f(t,x) \in C_0^\infty(Q)$. Заметим, что для обычных производных это тождество легко следует из равенства (16).

Сформулируем понятие э.р. задачи Коши для уравнения (1)

$$v_t + \mathrm{div}_x(\varphi(v) - a(v)\nabla_x v) = 0, \quad v = v(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{17}$$

рассматриваемого на множестве Q, с начальным условием

$$v(0,x) = v_0(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n, m). \tag{18}$$

Следующее определение фактически повторяет определение 1.

Определение 2. Функция $v = v(t,x) \in L^\infty(Q,\, dt \times m)$ называется э.р. задачи (17), (18), если:

(i) для всех $i = \overline{1,r}$ распределение

$$\mathrm{div}_x B_i(v(t,x)) \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q);$$

(ii) для любой функции $s(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $i = \overline{1,r}$

$$\mathrm{div}_x T_s(B_i)(v(t,x)) = s(v(t,x))\mathrm{div}_x B_i(v(t,x)) \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(Q);$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(v)_t + \mathrm{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(v) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(v) + \eta''(v)\sum_{i=1}^r (\mathrm{div}_x B_i(v))^2 \leqslant 0 \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(Q); \tag{19}$$

(iv) $\operatorname*{ess\,lim}\limits_{t\to 0} v(t,\cdot) = v_0$ в $L^1(\mathcal{B}_n, m)$.

Заметим, что энтропийное соотношение (19) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_Q \left[\eta(v) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(v)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(v)\cdot D_x^2 f - f\eta''(v)\sum_{i=1}^r (\mathrm{div}_x B_i(v))^2\right] dt\, dm(x) \geqslant 0. \tag{20}$$

Пространство $L^\infty(Q,\, dt \times m)$ по определению состоит из измеримых функций на множестве Q. На самом деле, это довольно сильное ограничение. Например, при $n = 1$ ограниченная аналитическая функция $v(t,x)=\sin tx$ при естественном её продолжении на Q (со свойством непрерывности по x) перестаёт быть даже измеримой (по мере $dt\times m$). Действительно, для любой вещественной функции $g(x)\in L^1(\mathcal{B}_1)$ интеграл $\int_{\mathcal{B}_1} v(t,x)g(x)\,dm(x)=0$ для всех t, за исключением не более чем счётного множества $t\in(2\pi)^{-1}\operatorname{Sp}(g)$. Предположив, что функция $v(t,x)$ измерима на Q, получим, что $\int_Q v(t,x)q(t)g(x)\,dt\,dm(x)=0$ при всех $q(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$, $g(x)\in L^1(\mathcal{B}_1)$. Так как конечные линейные комбинации функций $f(t,x)=q(t)g(x)$ плотны в пространстве $L^1(Q)$, приходим к тождеству $\int_Q v(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x)=0$ при всех $f(t,x)\in L^1(Q)$, откуда имеем $v(t,x)=0$ $dt\times m$-п.в., что противоречит равенству

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)|^2\,dm(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}_n}(1-\cos 2tx)\,dm(x)=\frac{1}{2}\quad \text{для любого}\quad t>0.$$

3. Существование энтропийного решения. Докажем сначала существование э.р. задачи (17), (18). Для этого выберем функцию $u_0(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что в соответствии с леммой 1 $v_0=\hat{u}_0(x)$. По теореме 1 существует э.р. $u=u(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n))\bigcap L^\infty(\Pi)$ задачи (1), (4). Положим $v(t,x)=\widehat{u(t,\cdot)}(x)$. Измеримость функции $v(t,x)$ на множестве Q вытекает из следующего ниже результата о её правосторонней непрерывности по временно́й переменной в метрике $L^1(\mathcal{B}_n)$. Определим множество

$$E_1=\{t\geqslant 0:\ (t,x) - \text{точка Лебега функции } u(t,x) \text{ для п.в. } x\in\mathbb{R}^n\}.$$

Как показано в работе [10, лемма 1.2], E_1 – множество полной меры в $\mathbb{R}_+$ и $t\in E_1$ является общей точкой Лебега функций $t\to\int_{\mathbb{R}^n}u(t,x)\rho(x)\,dx$, $\rho(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ввиду ограниченности $u(t,x)$ множество E_1 не уменьшится при замене $u(t,x)$ на $\eta(u(t,x))$, где $\eta(u)\in C(\mathbb{R})$. Поэтому точки $t\in E_1$ также будут точками Лебега функций $t\to\int_{\mathbb{R}^n}\eta(u(t,x))\rho(x)\,dx$, $\rho(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\eta(u)\in C(\mathbb{R})$. Обозначим через E множество значений $t\in E_1$ со свойствами $u(t,\cdot)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $G(u(t,\cdot))\subset G(u_0)$. По теореме 1 множество E имеет полную меру на промежутке $[0,+\infty)$. При этом, как следует из начального условия (iv) определения 1, $0\in E$.

Предложение 1. *При любом $t_0\in E$ справедливо соотношение*

$$\lim_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-v(t_0,x)|\,dm(x)=0. \tag{21}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из энтропийного условия (7) следует, что для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\eta(u)_t+\operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u)-D_x^2\cdot T_{\eta'}(A)(u)\leqslant 0 \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Pi). \tag{22}$$

Пусть функция $\rho(s)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp}\rho(s)\subset[0,1]$, $\rho(s)\geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)ds=1$. Положим при $\nu\in\mathbb{N}$

$$\delta_\nu(s)=\nu\rho(\nu s),\quad \theta_\nu(t)=\int\limits_0^t\delta_\nu(s)ds=\int\limits_0^{\nu t}\rho(s)ds.$$

Очевидно, что последовательность $\delta_\nu(s)$ сходится при $\nu\to\infty$ к δ-мере Дирака слабо в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а последовательность $\theta_\nu(t)$ – поточечно к функции Хевисайда $\theta(t)$. При $t_1>t_0>0$ положим $\chi_\nu(t)=\theta_\nu(t-t_0)-\theta_\nu(t-t_1)$. Тогда $\chi_\nu(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, $0\leqslant\chi_\nu(t)\leqslant 1$ и последовательность $\chi_\nu(t)$ поточечно сходится при $\nu\to\infty$ к индикаторной функции $\chi(t)$ интервала $(t_0,t_1]$. Применим соотношение (22) к пробной функции $f=\chi_\nu(t)p(x)$, где $p(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x)\geqslant 0$. После элементарных преобразований получим, что

$$\int\limits_\Pi\eta(u)(\delta_\nu(t-t_0)-\delta_\nu(t-t_1))p(x)\,dt\,dx+\int\limits_\Pi[T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x p(x)+T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2p(x)]\chi_\nu(t)\,dt\,dx\geqslant 0.$$

Если $t_0, t_1 \in E,$ то эти точки являются точками Лебега функции $I(t) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t,x))p(x)\,dx,$ и из полученного выше соотношения в пределе при $\nu \to \infty$ следует неравенство

$$I(t_1) - I(t_0) \leqslant \int\limits_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n} [T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot \nabla_x p(x) + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 p(x)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(t_1 - t_0)\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\nabla p(x)| + |D_x^2 p(x)|)\,dx \tag{23}$$

(здесь и ниже $|v|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора v), где константа

$$C = \max_{|u|\leqslant M}(|T_{\eta'}(\varphi)(u)| + |T_{\eta'}(A)(u)|), \quad M = \|u\|_\infty.$$

Пусть $g = g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h = h(x) \in C^\infty(\mathcal{B}_n)$ (так что сужение этой функции на $\mathbb{R}^n$ является равномерно почти периодической функцией вместе со всеми её частными производными), $g, h \geqslant 0$. При $R > 0$ подставим $p(x) = R^{-n}g(x/R)h(x)$ в (23). Учитывая, что

$$\nabla p(x) = R^{-n}g(x/R)\nabla h(x) + h(x)R^{-n-1}\nabla_y g(x/R), \quad D^2 g(x) = R^{-n}g(x/R)D_x^2 h(x) +$$

$$+ R^{-n-1}(\nabla_y g(x/R)\bigotimes \nabla h(x) + \nabla h(x)\bigotimes \nabla_y g(x/R)) + R^{-n-2}h(x)D_y^2 g(x/R),$$

получим

$$I_R(t_1) - I_R(t_0) \leqslant C(t_1 - t_0)\biggl(R^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\nabla h(x)| + |D_x^2 h(x)|)g(x/R)\,dx + C_1/R\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant C(t_1 - t_0)[c_g(\|\nabla h\|_\infty + \|D_x^2 h\|_\infty) + C_1/R], \quad C_1 = \text{const}, \tag{24}$$

где обозначено

$$I_R(t) = R^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t,x))h(x)g(x/R)\,dx.$$

Заметим, что $c_g = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy > 0$ (считаем, что $g \not\equiv 0$). Так как $u(t,x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $t = t_0, t_1$, то также и $\eta(u(t,x))h(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. По лемме 2 имеем

$$\lim_{R\to+\infty} I_R(t_i) = c_g\int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t,x))h(x)\,dm(x), \quad i = 0, 1.$$

Поэтому из (24) в пределе при $R \to +\infty$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t_1,x))h(x)\,dm(x) - \int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t_0,x))h(x)\,dm(x) \leqslant C_h(t_1 - t_0),$$

$$C_h = C(\|\nabla h\|_\infty + \|D_x^2 h\|_\infty) = \text{const},$$

из которой следует, что

$$\limsup_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t,x))h(x)\,dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t_0,x))h(x)\,dm(x). \tag{25}$$

Так как любая выпуклая непрерывная функция может быть равномерно на любом отрезке аппроксимирована выпуклыми функциями $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$, то оценка (25) верна для всех выпуклых $\eta(u) \in C(\mathbb{R})$. В частности, при $\eta(u) = |u-k|$, $k \in \mathbb{R}$, получим, что

$$\limsup_{E \ni t \to t_0+} \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x)-k| h(x)\, dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t_0,x)-k| h(x)\, dm(x). \tag{26}$$

Так как обе части этого неравенства непрерывно зависят от $h \in C^\infty(\mathcal{B}_n)$ по норме $L^1(\mathcal{B}_n)$, в то время как пространство $C^\infty(\mathcal{B}_n)$ плотно в $L^1(\mathcal{B}_n)$, то неравенство (26) справедливо для всех неотрицательных функций $h(x) \in L^1(\mathcal{B}_n)$ и для всех $k \in \mathbb{R}$. Поскольку $v(t_0,x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n) \subset \subset L^1(\mathcal{B}_n)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся ступенчатая функция

$$w(x) = \sum_{i=1}^m k_i \chi_{A_i}(x),$$

где $\chi_{A_i}(x)$ – индикаторные функции разбивающих $\mathcal{B}_n$ и попарно не пересекающихся измеримых множеств $A_i \subset \mathcal{B}_n$, $i = \overline{1,m}$, такая, что $\|v(t_0,x) - w\|_1 < \varepsilon$. Из (26) следует, что

$$\limsup_{E \ni t \to t_0+} \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x) - w(x)|\, dm(x) = \limsup_{E \ni t \to t_0+} \sum_{i=1}^m \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x)-k_i| \chi_{A_i}(x)\, dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t_0,x)-k_i| \chi_{A_i}(x)\, dm(x) = \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t_0,x) - w(x)|\, dm(x) < \varepsilon,$$

откуда

$$\limsup_{E \ni t \to t_0+} \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x) - v(t_0,x)|\, dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{E \ni t \to t_0+} \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x) - w(x)|\, dm(x) + \int\limits_{\mathcal{B}_n} |w(x) - v(t_0,x)|\, dm(x) < 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{E \ni t \to t_0+} \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x) - v(t_0,x)|\, dm(x) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из соотношения (21) следует, что найдётся последовательность конечных сумм $\sum v_i(x)\chi_i(t)$ (простых функций), где $v_i \in L^\infty(\mathcal{B}_n)$, а $\chi_i(t)$ – индикаторные функции интервалов, которая почти всюду сходится к функции $v(t,x)$. Так как простые функции измеримы на Q, получаем измеримость и предельной функции $v = v(t,x)$. Таким образом, $v \in L^\infty(Q)$. Проверим теперь условия (i), (ii) определения 2.

Предложение 2. *Функция $v = \widehat{u}(t,\cdot)(x)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 2. При этом для всех $i = \overline{1,r}$ распределения*

$$\operatorname{div}_x B_i(v(t,x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} B_{ij}(v(t,x)) \in L^2(Q)$$

и для всех $s(u) \in C(\mathbb{R})$, $s(u) \geqslant 0$, $f = f(t,x) \in C_0(Q)$, $f \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$c_g \int\limits_Q s(v(t,x))(\operatorname{div}_x B_i(v(t,x)))^2 f\, dt\, dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{R\to\infty} R^{-n}\int\limits_{\Pi} s(u(t,x))(\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx, \tag{27}$$

где $g(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g\geqslant 0$ *и* $c_g=\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy$.

Доказательство. Применим соотношение (9) с $\eta(u)=u^2/2$ к пробной функции $f = R^{-n}g(x/R)(1-\theta_\nu(t-T))$, где $g(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g\geqslant 0$, $T\in E$. Перейдём затем к пределу при $\nu\to\infty$ и получим неравенство (в котором $\Pi_T=(0,T)\times\mathbb{R}^n$)

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}\sum_{i=1}^{r}(\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)))^2 g(x/R)\,dt\,dx - R^{-n-1}\int\limits_{\Pi_T} T_u(\varphi)(u)\cdot(\nabla_y g)(x/R)\,dt\,dx -$$

$$- R^{-n-2}\int\limits_{\Pi_T} T_u(A)(u)\cdot(D_y^2 g)(x/R)\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^{-n}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^2 g(x/R)\,dx - \frac{R^{-n}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(T,x))^2 g(x/R)\,dx \leqslant \frac{R^{-n}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^2 g(x/R)\,dx.$$

Далее, перейдём в этом неравенстве к пределу при $R\to+\infty$ (тогда последние два интеграла в левой части исчезнут) и с использованием леммы 2 (напомним, что $c_g=\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy$) получим оценку

$$\limsup_{R\to+\infty} R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}\sum_{i=1}^{r}(\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)))^2 g(x/R)\,dt\,dx \leqslant \frac{c_g}{2}\|v_0\|^2_{L^2(\mathcal{B}_n,m)}. \tag{28}$$

Пусть теперь $s(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $f(t,x)\in C_0^\infty(Q)$. Тогда $f(t,x)g(x/R)\in C_0^\infty(\Pi)$ при всех положительных R, и из условий (i), (ii) определения 1 следует соотношение

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx =$$

$$= -R^{-n}\int\limits_{\Pi} s(u)\operatorname{div}_x B_i(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx. \tag{29}$$

В частности, из (29) при $s\equiv 1$ с помощью неравенства Коши–Буняковского вытекает оценка

$$R^{-n}\left|\int\limits_{\Pi} B_i(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}(\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)))^2 g(x/R)\,dt\,dx\right)^{1/2}\left(R^{-n}\int\limits_{\Pi}(f(t,x))^2 g(x/R)\,dt\,dx\right)^{1/2}, \tag{30}$$

где число $T>0$ таково, что $\operatorname{supp} f\subset Q_T \doteq (0,T)\times\mathcal{B}_n$. Заметим, что по лемме 2 и теореме Лебега об ограниченной сходимости под знаком интеграла имеют место соотношения

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx = R^{-n}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot(\nabla_x f(t,x))g(x/R)\,dt\,dx +$$

$$+ R^{-n-1}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot(\nabla_y g)(x/R)f(t,x)\,dt\,dx \underset{R\to+\infty}{\to} c_g\int\limits_{Q} T_s(B_i)(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x),$$

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi}(f(t,x))^2 g(x/R)\,dt\,dx \underset{R\to+\infty}{\to} c_g\int\limits_{Q}(f(t,x))^2\,dt\,dm(x), \tag{31}$$

с учётом которых и неравенства (28) из (30) в пределе при $R \to +\infty$ следует оценка

$$\left| \int\limits_Q B_i(v(t,x)) \cdot \nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x) \right| \leqslant C\|f\|_{L^2(Q,\,dt\times m)}, \quad C = \|v_0\|_2/\sqrt{2}.$$

Поэтому линейный функционал $f \to -\int_Q B_i(v(t,x)) \cdot \nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x)$ непрерывен в норме гильбертова пространства $L^2(Q,\,dt\times m)$ и по теореме Рисса задаётся скалярным произведением с некоторым элементом $w_i = w_i(t,x) \in L^2(Q,\,dt\times m)$. Таким образом,

$$\int\limits_Q B_i(v(t,x)) \cdot \nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x) = -\int\limits_Q w_i(t,x) f(t,x)\,dt\,dm(x) \tag{32}$$

для любой функции $f(t,x) \in C_0^\infty(Q)$. Это означает, что в пространстве $\mathcal{D}'(Q)$

$$\operatorname{div}_x B_i(v(t,x)) = w_i(t,x) \in L^2(Q,\,dt\times m),$$

что доказывает условие (i), так как $i = \overline{1,r}$ произвольно. Из соотношений (29), (31) (при $s\equiv 1$) и тождества (32) следует, что при всех $f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q_T)$

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_{\Pi_T} \operatorname{div}_x B_i(u(t,x)) f(t,x) g(x/R)\,dt\,dx = c_g \int\limits_{Q_T} w_i(t,x) f(t,x)\,dt\,dm(x). \tag{33}$$

С учётом оценки (28) обе части равенства (33) непрерывны по f в норме $L^2(Q_T)$, так что это равенство остаётся справедливым для функций $f \in L^2((0,T),\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)) \Leftrightarrow \widehat{f(t,\cdot)}(x) \in L^2(Q_T)$, т.е. справедливо равенство

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_{\Pi_T} \operatorname{div}_x B_i(u(t,x)) f(t,x) g(x/R)\,dt\,dx = c_g \int\limits_{Q_T} w_i(t,x) \widehat{f(t,\cdot)}(x)\,dt\,dm(x).$$

В частности, мы можем подставить $s(u(t,x))f(t,x)$ вместо функции f, получив для любой $f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q_T)$ тождество

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_{\Pi} s(u(t,x)) \operatorname{div}_x B_i(u(t,x)) f(t,x) g(x/R)\,dt\,dx = c_g \int\limits_Q s(v(t,x)) w_i(t,x) f(t,x)\,dt\,dm(x). \tag{34}$$

По условию (ii) определения 1 и соотношений (31) левая часть этого тождества совпадает с выражением

$$-\lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x)) \cdot \nabla_x (f(t,x) g(x/R))\,dt\,dx = -c_g \int\limits_Q T_s(B_i)(v(t,x)) \cdot \nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x),$$

тогда из (34) следует, что для всех $f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q_T)$ выполняется равенство

$$\int\limits_Q T_s(B_i)(v(t,x)) \cdot \nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x) = -\int\limits_Q s(v(t,x)) w_i(t,x) f(t,x)\,dt\,dm(x).$$

Ввиду произвольности $T > 0$ имеем

$$\operatorname{div}_x T_s(B_i)(v(t,x)) = s(v(t,x)) w_i(t,x) = s(v(t,x)) \operatorname{div}_x B_i(v(t,x)) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q),$$

что доказывает условие (ii).

Для доказательства неравенства (27) выберем последовательность $p_m \in C_0^\infty(Q)$, $m \in \mathbb{N}$, такую, что $p_m \to w_i$ при $m \to \infty$ в $L^2(Q)$. Из соотношения (34) с пробной функцией fp_m вместо f и неравенства Коши–Буняковского (по мере $R^{-n}s(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx$) следует, что

$$c_g \int\limits_Q s(v(t,x))w_i(t,x)p_m(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x) =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_\Pi s(u(t,x))\mathrm{div}_x B_i(u(t,x))p_m(t,x)f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{R\to+\infty}\biggl(R^{-n}\int\limits_\Pi s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times \biggl(R^{-n}\int\limits_\Pi s(u(t,x))(p_m(t,x))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\liminf_{R\to+\infty} R^{-n}\int\limits_\Pi s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times \biggl(c_g\int\limits_Q s(v(t,x))(p_m(t,x))^2 f(t,x)\,dt\,dm(x)\biggr)^{1/2},$$

где мы также воспользовались леммой 2. Из этого неравенства в пределе при $m \to \infty$ вытекает, что

$$c_g \int\limits_Q s(v(t,x))(w_i(t,x))^2 f(t,x)\,dt\,dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\liminf_{R\to+\infty} R^{-n}\int\limits_\Pi s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times \biggl(c_g\int\limits_Q s(v(t,x))(w_i(t,x))^2 f(t,x)\,dt\,dm(x)\biggr)^{1/2},$$

что эквивалентно неравенству (27). Предложение доказано.

Докажем теперь существование э.р.

Теорема 2. *Функция $v(t,x)$ – э.р. задачи (17), (18).*

Доказательство. По предложению 1 $v(t,x) \in L^\infty(Q)$, а по предложению 2 эта функция удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 2. Кроме того, при $t_0 = 0$ из свойства (21) следует начальное условие (iv). Таким образом, для завершения доказательства остаётся только проверить энтропийное неравенство (iii). Пусть $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta''(u) \geqslant 0$, $f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q)$, $f \geqslant 0$. Из интегрального неравенства (8) с пробной функцией $R^{-n}g(x/R)f(t,x)$, где $g(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(y) \geqslant 0$, вытекает соотношение

$$R^{-n}\int\limits_\Pi \Bigl[\eta(u)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f -$$

$$- f\eta''(u)\sum_{i=1}^r (\mathrm{div}_x B_i(u))^2\Bigr] g(x/R)\,dt\,dx + J(R) \geqslant 0, \tag{35}$$

где $J(R)\to 0$ при $R\to\infty$. По лемме 2

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi}\Big[\eta(u)f_t+T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f+T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f\Big]g(x/R)\,dt\,dx \underset{R\to\infty}{\to}$$

$$\underset{R\to\infty}{\to} c_g\int\limits_{Q}\Big[\eta(v)f_t+T_{\eta'}(\varphi)(v)\cdot\nabla_x f+T_{\eta'}(A)(v)\cdot D_x^2 f\Big]\,dt\,dm(x),$$

а по свойству (27) при $s(u)=\eta''(u)$

$$\liminf_{R\to\infty} R^{-n}\int\limits_{\Pi} f\eta''(u)\sum_{i=1}^r(\mathrm{div}_x B_i(u))^2 g(x/R)\,dt\,dx\geqslant c_g\int\limits_{Q} f\eta''(v)\sum_{i=1}^r(\mathrm{div}_x B_i(v))^2\,dt\,dm(x).$$

С учётом этих соотношений из (35) в пределе при $R\to\infty$ следует интегральное энтропийное неравенство (20). Теорема доказана.

4. Единственность энтропийного решения. Выберем функцию $s(\sigma)\in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами $s'(\sigma)\geqslant 0$, $s(-\sigma)=-s(\sigma)$, $s(\sigma)=\operatorname{sign}\sigma$ при $|\sigma|>1$ и положим $s_\varepsilon(\sigma)=s(\sigma/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Очевидно, что $s_\varepsilon(\sigma)\to\operatorname{sign}\sigma$ при $\varepsilon\to 0$. Пусть теперь $v,w\in L^\infty(Q)$ – пара функций, удовлетворяющих условиям (i), (ii) определения 2. Следующее свойство, установленное в случае "классического" уравнения (1) в работе [1, лемма 4.2], играет ключевую роль при обосновании метода удвоения переменных.

Предложение 3. *Для любой функции* $f=f(t,x;\tau,y)\in C_0^\infty(Q\times Q)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q\times Q}(s_\varepsilon)'(w-v)\sum_{i=1}^r \mathrm{div}_x B_i(w)\mathrm{div}_y B_i(v) f\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)=$$

$$=-\int\limits_{Q\times Q}\sum_{j,k=1}^n \operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y), \qquad (36)$$

где $w=w(t,x)$, $v=v(\tau,y)$.

Доказательство. По цепному свойству (ii) для функции $w=w(t,x)$ при всех $i=\overline{1,r}$

$$(s_\varepsilon)'(w-v)\mathrm{div}_x B_i(w)=\mathrm{div}_x T_{s'_\varepsilon(\cdot-v)}(B_i)(w)=\sum_{j=1}^n(\psi_{ij}^\varepsilon)_{x_j}\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(Q\times Q),$$

где

$$\psi_{ij}^\varepsilon=\psi_{ij}^\varepsilon(w,v)=T_{s'_\varepsilon(\cdot-v)}B_{ij}(w)=\int\limits_v^w s'_\varepsilon(\alpha-v)b_{ij}(\alpha)d\alpha,\quad w=w(t,x),\quad v=v(\tau,y).$$

Перебросив производные на пробную функцию f, имеем

$$I_\varepsilon\doteq\int\limits_{Q\times Q}(s_\varepsilon)'(w-v)\sum_{i=1}^r\mathrm{div}_x B_i(w)\mathrm{div}_y B_i(v)f\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)=$$

$$=-\int\limits_{Q\times Q}\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^n\psi_{ij}^\varepsilon(w,v)\mathrm{div}_y B_i(v)f_{x_j}\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y). \qquad (37)$$

Используя теперь цепное свойство (ii) для функции $v = v(\tau, y)$, получим соотношение

$$\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,v)\mathrm{div}_y B_i(v) = \mathrm{div}_y T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_i)(v).$$

Подставив это соотношение в (37) и перебросив производные на функции f_{x_j}, придём к равенству

$$I_\varepsilon = \int\limits_{Q\times Q} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j,k=1}^{n} T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) f_{x_j y_k}\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q\times Q), \tag{38}$$

в котором

$$T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) = \int\limits_{w}^{v} \psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\beta) b_{ik}(\beta) d\beta. \tag{39}$$

Заметим далее, что функции $\theta(\pm s)s_\varepsilon'(s)$ слабо в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к δ-функции Дирака (т.е. образуют аппроксимативную единицу). Поэтому

$$\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\beta) = \int\limits_{\beta}^{w} s_\varepsilon'(\alpha-\beta) b_{ij}(\alpha) d\alpha \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathrm{sign}\,(w-\beta) b_{ij}(\beta) \quad \text{для п.в.} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Ввиду ограниченности $\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\beta)$ можно применить теорему Лебега об ограниченной сходимости и получить из (39) предельное соотношение

$$T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathrm{sign}\,(w-v)\int\limits_{w}^{v} b_{ij}(\beta) b_{ik}(\beta) d\beta.$$

Просуммировав по $i = \overline{1,r}$ и использовав равенства (6), $\sum_{i=1}^{r} b_{ij}(\beta)b_{ik}(\beta) = a_{jk}(\beta)$, получим

$$\sum_{i=1}^{r} T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathrm{sign}\,(w-v)\int\limits_{w}^{v} a_{jk}(\beta) d\beta = -\mathrm{sign}\,(w-v)(A_{jk}(w) - A_{jk}(v)).$$

Используя это соотношению и теорему Лебега, перейдём к пределу в равенстве (38) и получим желаемое равенство (36):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\int\limits_{Q\times Q} \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{sign}\,(w-v)(A_{jk}(w) - A_{jk}(v)) f_{x_j y_k}\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y).$$

Предложение доказано.

Для доказательства единственности э.р. применим параболический вариант метода Кружкова удвоения переменных, развитый в случае анизотропных уравнений (1) в работе [1]. Обобщение на случай уравнений (17) на боровском компакте наталкивается на определённые трудности, связанные с отсутствием аппроксимационной единицы в $\mathcal{D}'(B_n)$. Однако наличия “частичной” аппроксимационной единицы $\Phi_r(z)$, обладающей свойствами аппроксимационной единицы на основных функциях со спектром из заданного рационального подпространства H (в соответствии с леммой 3), оказывается достаточно для обоснования метода удвоения переменных в случае, когда одно из э.р. является преобразованием Гельфанда “обычного” э.р. и потому обладает свойством стабильности спектра. Для законов сохранения (2) это было продемонстрировано в статье [10].

Перейдём к формулировке утверждений. Пусть $v(t,x) = \widehat{u(t,\cdot)}(x)$ – э.р. задачи (17), (18), полученное из э.р. задачи (1), (4) в соответствии с теоремой 2, а $w = w(t,x) \in L^\infty(Q)$ – некоторое э.р. задачи (17), (18) с начальной функцией $w_0(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n)$.

Теорема 3. *Для п.в.* $t>0$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x)-w(t,x)|\,dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v_0(x)-w_0(x)|\,dm(x). \tag{40}$$

В частности, при $w_0=v_0$ *из этого свойства следует, что э.р. задачи (17), (18) единственно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, $f=f(t,x;\tau,y)\in C_0^\infty(Q\times Q)$. Рассмотрим энтропийное условие (20) для э.р. $w(t,x)$ с энтропией $\eta_\varepsilon(w,v)=\int_v^w s_\varepsilon(\sigma-v)d\sigma$, $v=v(\tau,y)$, где функция $s_\varepsilon(\sigma)=s(\sigma/\varepsilon)$ была определена выше (см. п. 4). Применив это условие к пробной функции f и проинтегрировав по дополнительным переменным (τ,y), получим

$$\int\limits_{Q\times Q} \biggl[\eta_\varepsilon(w,v)f_t + T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(\varphi)(w)\cdot\nabla_x f + T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(A)(w)\cdot D_x^2 f - \\ - f s'_\varepsilon(w-v)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(w))^2\biggr]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0.$$

Аналогично, меняя ролями э.р. $w(t,x)$, $v(\tau,y)$ и переменные (t,x), (τ,y), придём к соотношению

$$\int\limits_{Q\times Q} \biggl[\eta_\varepsilon(v,w)f_\tau + T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(\varphi)(v)\cdot\nabla_y f + T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(A)(v)\cdot D_y^2 f - \\ - f s'_\varepsilon(w-v)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_y B_i(v))^2\biggr]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0,$$

здесь использована также чётность функции $s'_\varepsilon(\sigma)$. Складывая полученные соотношения, получаем неравенство

$$\int\limits_{Q\times Q} [(\eta_\varepsilon(w,v)f_t+\eta_\varepsilon(v,w)f_\tau) + (T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(\varphi)(w)\cdot\nabla_x f + T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(\varphi)(v)\cdot\nabla_y f) + \\ + (T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(A)(w)\cdot D_x^2 f + T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(A)(v)\cdot D_y^2 f)]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant \\ \geqslant \int\limits_{Q\times Q} f s'_\varepsilon(w-v)\sum_{i=1}^r[(\operatorname{div}_x B_i(w))^2+(\operatorname{div}_y B_i(v))^2]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant \\ \geqslant 2\int\limits_{Q\times Q} f s'_\varepsilon(w-v)\sum_{i=1}^r \operatorname{div}_x B_i(w)\cdot\operatorname{div}_y B_i(v)\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y), \tag{41}$$

где последнее неравенство является следствием неравенства Коши $a^2+b^2\geqslant 2ab$. Перейдём в (41) к пределу при $\varepsilon\to 0$. Нетрудно проверить, что для любой функции $g(u)\in C(\mathbb{R})$

$$T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(g)(w)=\int\limits_v^w (g(w)-g(\sigma))s'_\varepsilon(\sigma-v)d\sigma \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \operatorname{sign}(w-v)(g(w)-g(v)).$$

Кроме того, очевидно, что $\eta_\varepsilon(w,v)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}|w-v|$ (это также следует из предыдущего соотношения при $g(u)=u$). В силу симметричности этих предельных величин относительно (w,v) получим, что левая часть (41) сходится при $\varepsilon\to 0$ к интегралу

$$\int\limits_{Q\times Q} [|w-v|(\partial_t+\partial_\tau)f + \operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f + \\ + \operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(D_x^2+D_y^2)f]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y).$$

Правая же часть сходится к

$$-2\int\limits_{Q\times Q}\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)$$

по предложению 3. Итак, из (41) в пределе при $\varepsilon\to 0$ вытекает неравенство

$$\int\limits_{Q\times Q}\bigg[|w-v|(\partial_t+\partial_\tau)f+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f+$$
$$+\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(D_x^2+D_y^2)f+$$
$$+2\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}\bigg]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0. \tag{42}$$

Поскольку с учётом симметричности матрицы A

$$\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(D_x^2+D_y^2)f+2\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}=$$
$$=\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))(f_{x_jx_k}+f_{y_jy_k}+f_{x_jy_k}+f_{x_ky_j})=$$
$$=\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))(\partial_{x_j}+\partial_{y_j})(\partial_{x_k}+\partial_{y_k})f=$$
$$=\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)\bigotimes(\nabla_x+\nabla_y)f,$$

то можно записать (42) в виде

$$\int\limits_{Q\times Q}[|w-v|(\partial_t+\partial_\tau)f+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f+$$
$$+\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)\bigotimes(\nabla_x+\nabla_y)f]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0. \tag{43}$$

Пусть $\Phi_r(x)$, $r\in\mathbb{N}$, – последовательность ядер Бохнера–Фейера, построенная по базису $\mathbb{Q}$-линейного пространства H, содержащего $\operatorname{Sp}(v_0)$, а $\delta_\nu(s)$, $\nu\in\mathbb{N}$, – последовательность (аппроксимативная единица), определённая при доказательстве предложения 1. Возьмём в (43) функцию $f=f(t,x;\tau,y)=g(t,x)\delta_\nu(\tau-t)\Phi_r(y-x)$, где $g=g(t,x)\in C_0^\infty(Q)$, $g\geqslant 0$. Учитывая, что

$$(\partial_t+\partial_\tau)\delta_\nu(\tau-t)=0,\quad (\nabla_x+\nabla_y)\Phi_r(y-x)=0,\quad (\nabla_x+\nabla_y)\bigotimes(\nabla_x+\nabla_y)g=D_x^2g,$$

получим

$$\int\limits_{Q\times Q}[|w-v|g_t+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_xg+$$
$$+\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2g]\delta_\nu(\tau-t)\Phi_r(y-x)\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0. \tag{44}$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу сначала при $\nu\to\infty$. Очевидны следующие оценки:

$$||w-v|-|w-v_1||\leqslant|v-v_1|,$$

$$|\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))-\mathrm{sign}\,(w-v_1)(\varphi(w)-\varphi(v_1)|\leqslant 2\omega_\varphi(|v-v_1|),$$
$$|\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))-\mathrm{sign}\,(w-v_1)(A(w)-A(v_1))|\leqslant 2\omega_A(|v-v_1|), \tag{45}$$

в которых $w=w(t,x)$, $v=v(\tau,y)$, $v_1=v(t,y)$, а

$$\omega_\varphi(r)=\max_{\substack{u,v\in[-M,M]\\|u-v|\leqslant r}}|\varphi(u)-\varphi(v)|,\quad \omega_A(r)=\max_{\substack{u,v\in[-M,M]\\|u-v|\leqslant r}}|A(u)-A(v)|$$

– модули непрерывности $\varphi(u)$ и $A(u)$ на отрезке $[-M,M]$, $M=\max(\|w\|_\infty,\|v\|_\infty)$. Далее, из свойства непрерывности в среднем легко вывести соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\omega(|v(t,y)-v(\tau,y)|)h(t)\delta_\nu(\tau-t)\,dt\,d\tau=0\quad\text{для п.в.}\quad y\in\mathcal{B}_n,$$

справедливое для любой непрерывной в нуле функции $\omega(r)$, такой что $0=\omega(0)\leqslant\omega(r)$, и любой неотрицательной функции $h(t)\in C_0(\mathbb{R})$. Это свойство и оценки (45) позволяют перейти к пределу при $\nu\to\infty$ в (44) и получить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n}[|w-v|g_t+\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_x g+$$
$$+\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2 g]\Phi_r(y-x)\,dt\,dm(x)\,dm(y)\geqslant 0, \tag{46}$$

где $w=w(t,x)$, $v=v(t,y)$. Снова используя неравенства (45) при $w=w(t,x)$, $v=v(t,y)$, $v_1=v(t,x)$ и лемму 3 вместе с её следствием (заметим, что по теореме 1 $\mathrm{Sp}\,(v(t,\cdot))\subset G(v_0)\subset\subset H$ для п.в. $t>0$), получим, что при замене $v=v(t,y)$ на $v(t,x)$ предел при $r\to\infty$ левой части неравенства (46) не меняется (так как $\int_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(y-x)\,dm(y)=1$) равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathcal{B}_n}[|w-v|g_t+\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_x g+\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2 g]\,dt\,dm(x),$$

где $w=w(t,x)$, $v=v(t,x)$. Итак, в пределе при $r\to\infty$ из (46) следует, что для всех $g=g(t,x)\in C_0^\infty(Q)$, $g\geqslant 0$, выполняется неравенство

$$\int\limits_Q[|w-v|g_t+\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_x g+\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2 g]\,dt\,dm(x)\geqslant 0, \tag{47}$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}|w-v|+\mathrm{div}_x[\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))]-D_x^2\cdot[\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))]\leqslant 0\quad\text{в}\quad\mathcal{D}'(Q).$$

Подставив в (47) пробную функцию $g=g(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $g\geqslant 0$, получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\bigg(\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(t,x)-v(t,x)|\,dm(x)\bigg)g'(t)\,dt\geqslant 0.$$

Это соотношение означает, что $I'(t)\leqslant 0$ в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, где

$$I(t)=\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(t,x)-v(t,x)|\,dm(x).$$

Поэтому для п.в. $t > 0$

$$I(t) \leqslant I(0) \doteq \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} I(t) = \int\limits_{\mathcal{B}_n} |w_0(x) - v_0(x)|\, dm(x), \tag{48}$$

где учтены начальные условия (18) для э.р. w, v. Очевидно, что (48) совпадает с неравенством (40). Теорема доказана.

Как видно из определения 2 и инвариантности меры Хаара m, множество э.р. уравнения (17) инвариантно относительно сдвигов на элементы $h \in \mathcal{B}_n$ (а не только на элементы "физического" пространства $\mathbb{R}^n$). Заметим, что значения характеров $e^{2\pi i\lambda\cdot x}$ в точке h определяют мультипликативный функционал $\mu_h(\lambda)$ на $\mathbb{R}^n$ со значениями в единичной комплексной окружности и сдвиг функции $S_h u(x) = u(x+h)$ сводится к умножению коэффициентов Фурье a_λ функции u на $\mu_h(\lambda)$. Интересно, что при $h \notin \mathbb{R}^n$ функционал μ_h даже не измерим по Лебегу. Из теоремы 3 при $w = v(t, x+h)$ следует, что э.р. $v(t,x)$ удовлетворяет для п.в. $t > 0$ неравенствам

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x+h) - v(t,x)|\, dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v_0(x+h) - v_0(x)|\, dm(x), \quad h \in \mathcal{B}_n.$$

В частности, если начальная функция v_0 инвариантна относительно сдвига на h, т.е. $v_0(x+h) = v_0(x)$ m-п.в. на $\mathcal{B}_n$, то и э.р. v задачи (17), (18) обладает этим же свойством инвариантности: $v(t,x+h) = v(t,x)$ п.в. на Q.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00344).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen G.-Q., Perthame B.* Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20. P. 645–668.
2. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems // Arch. Ration. Mech. Anal. 1999. V. 147. P. 269–361.
3. *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
4. *Panov E.Yu.* On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations // J. Differ. Equat. 2021. V. 275. P. 139–166.
5. *Кружков С.Н., Панов Е.Ю.* Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 79–84.
6. *Kruzhkov S.N., Panov E.Yu.* Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.). 1994. V. 40. P. 31–54.
7. *Panov E.Yu.* On decay of entropy solutions to nonlinear degenerate parabolic equation with almost periodic initial data // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 5. P. 974–988.
8. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
9. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М., 1973.
10. *Panov E.Yu.* On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: global well-posedness and decay property // J. Hyperbolic Differ. Equat. 2016. V. 13. № 3. P. 633–659.

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород,
ООО "Центр научных исследований и разработок",
г. Великий Новгород,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 22.11.2021 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.