

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ ЭФФЕКТАМИ

© 2022 г. С. А. Сергеев

Построено асимптотическое решение задачи Коши для многомерного волнового уравнения с учётом малых дисперсионных эффектов и с локализованной начальной функцией. Отдельно рассмотрены трёхмерный случай и построение асимптотики для него. При специальном выборе начальной функции в трёхмерном случае представлена асимптотика в явном виде с помощью функций Эйри и Скорера. В качестве примера, где возникают дисперсионные эффекты, рассмотрено усреднение волнового уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом и построено асимптотическое решение такого уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064122100089, EDN: KQNPZG

Введение. Во многих задачах математической физики, например, при описании распространения звука в воде [1, гл. 2] или распространения электромагнитных волн в неоднородных средах [2, гл. 4], возникает волновое уравнение в недивергентной форме. Часто в таких задачах в уравнении следует учитывать и дисперсионные эффекты, появляющиеся при распространении волн.

В данной работе строится асимптотика решения задачи Коши с локализованными начальными данными, сформулированной для многомерного волнового уравнения в недивергентной форме с учётом малых дисперсионных эффектов

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \Delta v(x, t) + \varepsilon^2 \Phi(x) \Delta^2 v(x, t) + \varepsilon^2 \hat{\mathcal{L}}v(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = V(x/\mu), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $c(x)$ является гладкой и ограниченной, $0 < c_m \leq c(x) \leq c_M$, где c_m и c_M – некоторые константы; функция $\Phi(x) \geq 0$ также является гладкой и ограниченной; функция $V(\xi)$ – достаточно гладкая и убывающая на бесконечности вместе со своими производными. Малый параметр $0 < \mu \ll 1$ отвечает за локализацию начальной функции, а малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ характеризует дисперсионные эффекты, при этом предполагаем, что справедливо соотношение $\varepsilon^2 \leq \mu^3$. Оператор $\hat{\mathcal{L}}$ – дифференциальный или псевдодифференциальный, устроенный таким образом, что стоящий в правой части уравнения (1) оператор является симметричным и положительно определённым в подходящем пространстве. Если в (1) отбросить $\hat{\mathcal{L}}$, то получим уравнение, которое, вообще говоря, является некорректным, так как его символ не является положительным при больших значениях производных. Однако с учётом оператора $\hat{\mathcal{L}}$ задача (1), (2) является корректной, а символ оператора в (1) положительный.

В работе [3] для задачи Коши для двумерного волнового уравнения, записанного в дивергентной форме, со слабыми дисперсионными эффектами асимптотика решения была представлена с помощью функций Эйри. В статье [4] изучалась задача Коши для многомерных строго гиперболических систем, в частности, трёхмерное волновое уравнение без учёта дисперсионных эффектов. В данной работе представлена асимптотика решения задачи (1), (2) с помощью функций Эйри и связанных с ними других специальных функций. Полученное представление

иллюстрируется на примере построения асимптотики решения задачи Коши для волнового уравнения с быстроосциллирующей скоростью.

В уравнении (1) удобно перейти к оператору $\hat{p} = -i\mu\nabla$, умножив уравнение на $-\mu^2$. Определим следующие функции:

$$L_0(x, p) = c^2(x)|p|^2, \quad L_1(x, p) = i\frac{\varepsilon^2}{\mu^3}c^2(x)\Phi(x)|p|^4.$$

После умножения на $c^2(x)$ уравнение (1) принимает вид

$$-\mu^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \left(L_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}) + i\mu L_1(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}) + i\mu \mathcal{L}^1(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, \mu) \right) v(x, t), \quad (3)$$

где цифры показывают порядок действия операторов: сначала оператор дифференцирования \hat{p} , а потом – оператор умножения на функцию от x (см. [5, с. 56; 6, с. 279]). Функцию $L_0(x, p)$ будем называть *главным символом* оператора.

Через $\mathcal{L}^1(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, \mu)$ в соотношении (3) обозначен результат соответствующих преобразований оператора $\hat{\mathcal{L}}$ из (1). Предполагается, что функция $\mathcal{L}^1(x, p, \mu)$ является гладкой и ограниченной порядка μ . Таким образом, оператор $\hat{\mathcal{L}}^1$ не играет роли при построении асимптотики и его явный вид не является существенным. Асимптотика определяется коэффициентами при вторых и четвёртых производных, т.е. видом функций $L_0(x, p)$ и $L_1(x, p)$.

Отметим, что из вида функции $L_1(x, p)$ и из (3) следует, что при $\varepsilon^2/\mu^2 = O(\mu^{1+\alpha})$, где $\alpha > 0$, асимптотика решения задачи (1), (2) переходит в асимптотику решения волнового уравнения.

Для широкого класса дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с начальными условиями, заданными в виде канонического оператора, имеется общая схема В.П. Маслова [5], позволяющая представить асимптотику решения в виде канонического оператора на лагранжевом многообразии Λ_t (или нескольких многообразиях $\Lambda_{t,j}$), полученном сдвигом за время t вдоль траекторий подходящей гамильтоновой системы (или гамильтоновых систем) начального многообразия Λ_0 .

В рассматриваемом случае соответствующие гамильтонианы определяются с помощью главного символа оператора

$$H^\pm(x, p) = \pm\sqrt{L_0(x, p)} = \pm c(x)|p|.$$

Для наших целей локализованную функцию $V(x/\mu)$ удобно представить с помощью преобразования Фурье, что с точностью до множителя совпадает с определением канонического оператора Маслова [7–9]

$$V(x/\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{V}(p) e^{i(x,p)/\mu} dp \equiv \mu^{n/2} e^{-i\pi n/4} K_{\Lambda_0}^\mu[\tilde{V}(p)](x), \quad (4)$$

где $\tilde{V}(p)$ – образ фурье-функции $V(\xi)$. В этом случае канонический оператор $K_{\Lambda_0}^\mu$ задаётся на многообразии

$$\Lambda_0 = \{x = 0, p = \alpha \in \mathbb{R}^n\},$$

представляющем собой вертикальную плоскость в фазовом пространстве. Это многообразие проектируется в одну точку $x = 0$ на конфигурационном пространстве, и с точки зрения классической теории канонического оператора (см. [5, с. 153]) состоит из особых точек.

В случае представления начальных условий на многообразии Λ_0 гамильтонианы $H^\pm(x, p)$ оказываются негладкими при $p = 0$, что приводит к появлению негладких так называемых проколотых многообразий $\Lambda_{t,j}$, и общий подход Маслова нуждается в серьёзной модификации. Одна из таких модификаций, основанная на представлении асимптотики решения в виде

проинтегрированного по дополнительному параметру канонического оператора, была предложена в статьях [10, 11].

В работе [12] была предложена серьёзная модификация канонического оператора Маслова, которая позволила не только сделать существенно эффективными его интегральные представления в окрестности каустик, но и расширить возможности применения канонического оператора на классы негладких многообразий, в том числе и на “проколотые” многообразия [8, 9, 13, 14]. Использование указанной модификации канонического оператора позволяет прямо применять схему Маслова для решения рассматриваемой задачи Коши, что и продемонстрировано в данной работе.

Асимптотика решения задачи (1), (2) в каждый фиксированный момент времени t локализована в окрестности некоторой поверхности. В случае постоянной функции $c(x) \equiv c_0$ эта поверхность является гладкой и представляет собой фронт волны. В случае переменной функции $c(x)$ на этой поверхности могут возникать точки самопересечения, а сама поверхность может уже быть не гладкой. Тем не менее, будем продолжать называть эту поверхность фронтом волны. С точки зрения теории модифицированного канонического оператора фронт волны является каустикой специального вида [9, 12–14].

В п. 1 приводятся асимптотические формулы для решения задачи (1), (2) в трёхмерном случае. В п. 2 рассматриваются волновое уравнение с быстроосциллирующим коэффициентом и усреднённое уравнение с гладкими коэффициентами, имеющее вид (1). В п. 3 приводятся асимптотические формулы для задачи (1), (2) в многомерном случае, из которых следуют формулы для трёхмерного случая. В п. 4 описана процедура вывода усреднённого уравнения для волнового уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом.

1. Трёхмерный случай. В данном пункте строится асимптотическое при $\mu \rightarrow 0$ решение задачи (1), (2) в трёхмерном случае ($x \in \mathbb{R}^3$). Также рассматривается специальный случай выбора вида начальной функции, когда асимптотику можно представить с помощью функций Эйри и других функций, связанных с ними. Приводятся формулы для асимптотики решения волнового уравнения в бездисперсионном случае.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3) с локализованными начальными данными (2). Этим начальным данным отвечает многообразие Λ_0 , на котором удобно перейти к сферическим координатам $p = \rho \mathbf{n}(\varphi, \theta)$, где $\rho \geq 0$, а вектор $\mathbf{n}(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$.

Следуя схеме построения асимптотики решения с помощью модифицированного канонического оператора [8, 12–14], построим для гамильтониана $H(x, p) = c(x)|p|$ решение следующей системы Гамильтона:

$$\dot{x} = H_p(x, p), \quad \dot{p} = -H_x(x, p), \quad x|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = \mathbf{n}(\varphi, \theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (5)$$

Обозначим через $X(\varphi, \theta, t)$ и $P(\varphi, \theta, t)$ решение этой системы.

Замечание 1. Будем рассматривать только положительную ветвь корня $H(x, p) = \sqrt{L_0(x, p)}$, так как канонические операторы, отвечающие положительной и отрицательной ветвям корня, связаны комплексным сопряжением (см. [11, лемма 14]).

Лагранжево многообразие в момент времени t , отвечающее асимптотике, имеет вид

$$\Lambda_t = \{x = X(\varphi, \theta, t), p = \rho P(\varphi, \theta, t)\}, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Предельный переход $\rho \rightarrow 0+0$ определяет край многообразия

$$\partial\Lambda_t = \{x = X(\varphi, \theta, t), p = 0\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Так как якобиан $J = \det \partial X(\varphi, \theta, t) / \partial(\rho, \varphi, \theta)$ проектирования многообразия Λ_t на конфигурационное пространство $x \in \mathbb{R}^3$ равен нулю, то данное многообразие состоит только из особых точек.

Проекция края многообразия (как и всего многообразия Λ_t) на конфигурационное пространство есть поверхность $\gamma_t = \{x = X(\varphi, \theta, t)\}$, которую будем называть *фронтом волны*. Эта поверхность может быть негладкой и иметь точки самопересечения. С точки зрения теории

модифицированного канонического оператора эта поверхность является каустикой специального вида.

Далее перейдём к описанию вида асимптотики задачи (1), (2) в трёхмерном случае в окрестности переднего фронта. Более подробное описание алгоритма построения модифицированного канонического оператора Маслова для задачи (1), (2) приведено в п. 3, где рассматривается n -мерный случай.

Многообразию Λ_t можно покрыть счётным числом карт Ω_j . В каждой карте рассмотрим систему относительно $(\varphi, \theta) \in \Omega_j$:

$$\langle X_\varphi(\varphi, \theta, t), x_0 - X(\varphi, \theta, t) \rangle = 0, \quad \langle X_\theta(\varphi, \theta, t), x_0 - X(\varphi, \theta, t) \rangle = 0, \tag{6}$$

где x_0 – некоторая фиксированная точка на фронте, $x_0 \in \gamma_t$.

Определим для каждой карты Ω_j её ранг $k_j = \text{rank} \Omega_j$ как наименьшее значение ранга матрицы системы (6)

$$k_j = \min_{(\varphi, \theta) \in \Omega_j} \text{rank} (X_\varphi X_\theta).$$

Пусть в точке $f = (\rho_f, \varphi_f, \theta_f) \in \Lambda_t$ ранг матрицы $\text{rank} (X_\varphi X_\theta)|_f < 2$, тогда точка f называется *фокальной*. Так как функция $X(\varphi, \theta, t)$ не зависит от ρ , то фокальными точками будут и точки $(\rho, \varphi_f, \theta_f)$ для любого $\rho \geq 0$. Таким образом, приходим к определению фокальных точек на крае многообразия.

Определение 1. Точка $(\varphi, \theta) \in \partial\Lambda_t$, в которой $\text{rank} (X_\varphi X_\theta) = 2$, называется *регулярной*. Если же в этой точке $\text{rank} (X_\varphi X_\theta) < 2$, то точка называется *фокальной*.

Предполагаем, что на крае многообразия фокальные точки являются изолированными. Далее будем рассматривать карты многообразия, содержащие точки края этого многообразия, и строить асимптотику, отвечающую именно таким картам.

Определение 2. Выберем некоторую карту Ω . Пусть $\Gamma = (X(\varphi, \theta, \tau), P(\varphi, \theta, \tau))$, $\tau \in [0, t]$, – траектория системы Гамильтона (5) такая, что при $\tau = t$ эта траектория задаёт регулярную точку $r \in \Omega$ с координатами (φ, θ, t) . *Индексом Маслова* карты Ω называется число

$$m(\Omega) = \text{ind} \Gamma + \sigma. \tag{7}$$

Здесь $\text{ind} \Gamma$ – индекс Морса траектории Γ , равный числу фокальных точек на траектории при $\tau \in (0, t)$. Число σ определяется в зависимости от ранга карты. При $k = 2$ число $\sigma = 0$, а при $k = 0$ число $\sigma = \text{inertex}((X_{\varphi, \theta})^T P_{\varphi, \theta})$, где матрица вычислена в точке r . При $k = 1$ определение числа σ будет приведено в утверждении 3.

В зависимости от значения k введём функции

$$U_k(s, \lambda, \varphi, \theta) = \int_0^{+\infty} \rho^{2-k/2} \tilde{V}(\rho n(\varphi, \theta)) e^{i(\rho s + \lambda \rho^3)} d\rho, \quad k = 0, 1, 2.$$

Далее сформулируем утверждения о представлении асимптотики решения задачи (1), (2) в окрестности переднего фронта в зависимости от значения k . Все эти утверждения вытекают из общего n -мерного случая, разобранного в п. 3.

Определим следующие функции:

$$\lambda(\varphi, \theta, t) = \frac{\varepsilon^2}{\mu^3} Q(\varphi, \theta, t), \quad Q(\varphi, \theta, t) = \frac{c(0)}{2} \int_0^t \Phi(X(\varphi, \theta, \tau)) |P(\varphi, \theta, \tau)|^2 d\tau. \tag{8}$$

Сформулируем сначала утверждение о виде асимптотики в карте ранга $k = 2$. В этом случае фронт представляет собой гладкую поверхность и вектор $P(\varphi, \theta, t)$ будет совпадать с внешней нормалью к фронту.

В картах ранга $k = 2$ естественным образом определены координаты $(\varphi, \theta) \in \partial\Lambda_t$ в силу системы (6). Это приводит к представлению асимптотики решения в параметрической форме, где ещё одним параметром выступает координата ξ , определённая по нормали к фронту.

С вычислительной точки зрения параметрическое представление асимптотики представляется наиболее эффективным в силу того, что не требуется разрешать систему (6) относительно (φ, θ) для всех точек x_0 в заданной области фронта.

Пусть точка $x_0 \in \gamma_t$ и пусть она принадлежит проекциям карт $\Omega_j, j = \overline{1, N}$, ранги которых равны $k = 2$. Введём параметр $\xi \in [-d, d]$, определяющий координату по нормали к фронту, причём $\xi = 0$ на фронте, $\xi > 0$ за пределами фронта и $\xi < 0$ в области, ограниченной фронтом. Величина d определяет окрестность фронта по нормали.

Утверждение 1. В окрестности точки x_0 асимптотика решения задачи (1), (2) представляется в виде суммы

$$v_{as}(x, t) = \sum_{j=1}^N v_j(x, t).$$

Функции $v_j(x, t)$ определяются для каждой карты Ω_j и задаются параметрическим образом $v_j(x, t) = (v_j = W_j(\xi, \varphi, \theta, t), x = \Xi_j(\xi, \varphi, \theta, t))$ с параметрами (ξ, φ, θ) , где

$$W_j(\xi, \varphi, \theta, t) = \frac{2\pi\mu\sqrt{|\cos\theta|}}{|\det(X_{(\varphi,\theta)}^m X_{(\varphi,\theta)})|^{1/4}} \sqrt{\frac{c(X)}{c(0)}} \operatorname{Re} e^{-i\pi(\operatorname{ind}\Gamma+1)/2} U_2\left(\xi \frac{|P|}{\mu}, \lambda(\varphi, \theta, t), \varphi, \theta\right),$$

$$\Xi_j(\xi, \varphi, \theta, t) = \xi \frac{P}{|P|} + X, \quad \xi \in [-d, d], \quad (\varphi, \theta) \in \Omega_j. \tag{9}$$

Здесь для краткости обозначили $X = X(\varphi, \theta, t), P = P(\varphi, \theta, t)$, матрица $X_{(\varphi,\theta)} = (X_\varphi, X_\theta)$, а индекс m – транспонирование. Число $\operatorname{ind}\Gamma$ – индекс Морса соответствующей траектории $(X(\varphi, \theta, \tau), P(\varphi, \theta, \tau))$ системы Гамильтона (5).

Сформулируем теперь утверждение о виде асимптотики, отвечающей карте ранга $k = 0$.

Утверждение 2. Пусть точка $x_0 \in \gamma_t$ принадлежит проекции карты Ω ранга $k = 0$. В окрестности точки x_0 асимптотика решения задачи (1), (2) имеет вид

$$v_{as}(x, t) = \operatorname{Re} e^{-i\pi m(\Omega)/2} \int_{\mathbb{R}^2} g(\varphi, \theta) \sqrt{|\cos\theta|} \sqrt{|\det(P, P_\varphi, P_\theta)|} \frac{c(X(\varphi, \theta, t))}{c(0)} \times \\ \times U_0\left(\frac{\langle P(\varphi, \theta, t), x - X(\varphi, \theta, t) \rangle}{\mu}, \lambda(\varphi, \theta, t), \varphi, \theta\right) d\varphi d\theta.$$

Здесь $g(\varphi, \theta)$ – срезающая функция, отвечающая карте Ω , а $m(\Omega)$ – её индекс Маслова.

Теперь опишем асимптотику в окрестности точки $x_0 \in \gamma_t$, которая лежит в проекции карты Ω ранга $k = 1$. В этой карте существует точка, в которой либо $X_\theta = 0$, либо $X_\varphi = 0$, или же векторы X_φ и X_θ являются линейно зависимыми. Во всех этих случаях можно определить в Ω локальные координаты (ϕ, η) : в первом случае $\phi = \varphi, \eta = \theta$, во втором – $\phi = \theta, \eta = \varphi$, а в третьем можно выбрать один из двух вариантов, в зависимости от вычислений. Во всех этих случаях вектор X_ϕ отличен от нуля и существует такая область $\tilde{\Omega}$, что для всех $\eta \in \tilde{\Omega}$ система (6) определяет в области $(\phi, \eta) \in \Omega$ функцию $\phi = \phi(x_0, t, \eta)$.

Утверждение 3. Пусть точка $x_0 \in \gamma_t$ и содержится в проекциях карт $\Omega_j, j = \overline{1, N}$, ранга $k = 1$. Обозначим через $\phi_j = \phi_j(x_0, t, \eta), \eta \in \tilde{\Omega}_j$, решения системы (6), отвечающие картам Ω_j .

Асимптотика решения задачи (1), (2) в окрестности точки x_0 имеет следующий вид:

$$v_{as}(x, t) = \sqrt{2\pi\mu} \operatorname{Re} e^{-i\pi/4} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{\pi}{2}m(\Omega_j)} \int_{\mathbb{R}} g_j(\eta) \sqrt{|\cos\theta|} \sqrt{|\det M|} \frac{c(X(\phi, \eta, t))}{c(0)} \times \\ \times U_1\left(\frac{\langle P(\phi, \eta, t), x - X(\phi, \eta, t) \rangle}{\mu}, \lambda(\phi, \eta, t), \phi, \eta\right) \Big|_{\phi=\phi_j(x_0, t, \eta)} d\eta. \tag{10}$$

Функции $g_j(\eta)$ – срезающие функции, отвечающие областям $\tilde{\Omega}_j$. Матрица M определяется по формуле

$$M = \left(\frac{X_\phi}{|X_\phi|^2}, P, P_\eta - P_\phi \frac{\langle X_\phi, X_\eta \rangle}{|X_\phi|^2} \right).$$

Индекс Маслова $m(\Omega_j)$ вычисляется согласно (7), где $\sigma = 1$, если $W < 0$, и $\sigma = 0$, если $W \geq 0$; число W определяется в регулярной точке карты по формуле

$$W = X_\eta^T \left(E_3 - \frac{1}{|X_\phi|^2} X_\eta X_\phi^T \right) \left(P_\eta - P_\phi \frac{\langle X_\phi, X_\eta \rangle}{|X_\phi|^2} \right).$$

Матрица E_3 – единичная размера 3×3 .

Замечание 2. В (10) присутствует функция $\cos \theta$ вне зависимости от выбора локальных координат (ϕ, η) , и чтобы не усложнять формулу, косинус не выражается через эти координаты. Также у функций X и P вместо аргументов (φ, θ) в (10) записаны (ϕ, η) , что, вообще говоря, не является корректным, однако полностью корректная запись сильно усложнит формулы и их восприятие. Отметим, что при $\phi = \theta$ и $\eta = \varphi$ соответствующие аргументы в функциях следует поменять местами.

Далее рассмотрим случай, когда функция $V(\xi)$ имеет специальный вид

$$V(\xi) = A \left(1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2} + \frac{\xi_2^2}{b_2^2} + \frac{\xi_3^2}{b_3^2} \right)^{-2}, \tag{11}$$

где A, b_1, b_2 и b_3 – некоторые параметры. Преобразование Фурье $\tilde{V}(p)$ такой функции имеет вид [4]

$$\tilde{V}(p) = Ab_1b_2b_3 \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-\sqrt{p_1^2b_1^2+p_2^2b_2^2+p_3^2b_3^2}}.$$

В этом случае функции U_k можно вычислить и представить с помощью специальных функций, связанных с функцией Эйри. Введём обозначения

$$z = \frac{s + i\beta(\varphi, \theta)}{(3\lambda)^{1/3}}, \quad \beta(\varphi, \theta) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + b_2^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b_3^2 \sin^2 \theta},$$

тогда

$$U_2(s, \lambda, \varphi, \theta) = -Ab_1b_2b_3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{e^{i\pi/2}}{(3\lambda)^{2/3}} \left(\text{Ai}'(z) + i \text{Gi}'(z) \right),$$

$$U_1(s, \lambda, \varphi, \theta) = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{e^{-i\pi/4} Ab_1b_2b_3}{(12\lambda)^{1/3} (3\lambda)^{1/2}} \frac{d^2}{d\zeta^2} (\text{Ai}^2(\zeta) + i \text{Ai}(\zeta) \text{Bi}(\zeta)) \Big|_{\zeta=z/4^{1/3}},$$

$$U_0(s, \lambda, \varphi, \theta) = -Ab_1b_2b_3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{3\lambda} \left(z(\text{Ai}(z) + i \text{Gi}(z)) - \frac{i}{\pi} \right).$$

Здесь $\text{Ai}(z)$ и $\text{Bi}(z)$ – функции Эйри, а $\text{Gi}(z)$ – функция Скорера [15], являющаяся ограниченным решением неоднородного уравнения Эйри $f'' - zf = -1/\pi$, равная

$$\text{Gi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \left(zt + \frac{t^3}{3} \right) dt.$$

Отметим, что в двумерном случае профиль волны описывается с помощью функций Эйри, а функция Скорера отсутствует.

Замечание 3. При $k = 2$ асимптотика решения задачи представляется в виде суммы комбинаций производной функции Эйри и производной функции Скорера. При $k = 1$ или $k = 2$ уже требуется интегрирование соответствующих функций.

При вычислении функций $U_{0,2}$ мы воспользовались соотношением

$$\int_0^{+\infty} e^{i(\rho(s+i\beta)+\lambda\rho^3)} d\rho = \frac{\pi}{(3\lambda)^{1/3}} (\text{Ai}(z) + i \text{Gi}(z))$$

и соотношениями, вытекающими из него после дифференцирования по s . При вычислении функции U_1 использовалось соотношение, справедливое при $\lambda > 0$ (см. [9, 16]):

$$\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho s} e^{-\rho\beta} e^{i\lambda\rho^3} d\rho = -\frac{\pi}{\sqrt{6\lambda}} \frac{d}{d\zeta} (\text{Ai}^2(\zeta) + i \text{Ai}(\zeta) \text{Bi}(\zeta))|_{\zeta=z/4^{1/3}},$$

а также равенства, получающиеся после дифференцирования по s .

Замечание 4. Если $\lambda = 0$, т.е. дисперсионные эффекты отсутствуют, то утверждения 1–3 дают асимптотику решения волнового уравнения [4]. При этом для специального начального условия (11) функции $U_k(\xi, 0, \varphi, \theta)$ становятся рациональными:

$$U_k(s, 0, \varphi, \theta) = Ab_1 b_2 b_3 \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \Gamma\left(3 - \frac{k}{2}\right) \frac{e^{i\pi(3-k/2)/2}}{(s + i\beta(\varphi, \theta))^{3-k/2}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $\Gamma(\zeta)$ – гамма-функция Эйлера, соответственно асимптотика решения волнового уравнения в данном случае принимает более простой вид.

При $k = 2$ асимптотика решения для волнового уравнения, по аналогии с утверждением 1, представима в виде суммы параметрически заданных функций $v_j(x, t) = (W_j, \Xi_j)|$:

$$W_j(\xi, \varphi, \theta, t) = \frac{\mu}{4} \frac{Ab_1 b_2 b_3 (2\pi)^{3/2} \sqrt{\cos \theta}}{|\det(X_{(\varphi, \theta)})^T X_{(\varphi, \theta)}|^{1/4}} \sqrt{\frac{c(X(\varphi, \theta, t))}{c(0)}} \text{Re} e^{i\pi(1-\text{ind}\Gamma)/2} \left(\xi \frac{|P|}{\mu} + i\beta(\varphi, \theta)\right)^{-2},$$

$$\Xi_j(\xi, \varphi, \theta, t) = \xi \frac{P}{|P|} + X. \tag{12}$$

При $k = 0$ асимптотика решения для волнового уравнения имеет вид

$$v_{\text{as}}(x, t) = Ab_1 b_2 b_3 \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \text{Re} e^{i\pi(3-m(\Omega))/2} \int_{\mathbb{R}^2} g(\varphi, \theta) \frac{c(X(\varphi, \theta, t))}{c(0)} \times$$

$$\times \sqrt{|\cos \theta|} \sqrt{|\det(P, P_\varphi, P_\theta)|} \left(\frac{\langle P(\varphi, \theta, t), x - X(\varphi, \theta, t) \rangle}{\mu} + i\beta(\varphi, \theta)\right)^{-3} d\varphi d\theta.$$

При $k = 1$, по аналогии с утверждением 3, переходим к координатам (ϕ, η) , что приводит к следующему виду асимптотики волнового уравнения:

$$v_{\text{as}}(x, t) = -\frac{3\pi\sqrt{\pi}}{8} \sqrt{\mu} Ab_1 b_2 b_3 \text{Re} \sum_{j=1}^N e^{i\pi m(\Omega_j)/2} \int_{\mathbb{R}} g_j(\eta) \frac{c(X(\phi, \eta, t))}{c(0)} \times$$

$$\times \sqrt{|\cos \theta|} \sqrt{|\det M|} \left(\frac{\langle P(\phi, \eta, t), x - X(\phi, \eta, t) \rangle}{\mu} + i\beta(\phi, \eta)\right)^{-5/2} \Big|_{\phi=\phi_j(x_0, t, \eta)} d\eta. \tag{13}$$

2. Волновое уравнение с быстроосциллирующим коэффициентом. В качестве примера где возникает волновое уравнение с дисперсионными поправками рассмотрим задачу о построении асимптотики решения задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом и локализованной начальной функцией

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = C^2\left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, x\right) \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u|_{t=0} = V(x/\mu), \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

Здесь вектор-функция $\Theta(x) = (\theta_1(x), \dots, \theta_m(x))$, $m \leq 3$, где $\theta_k(x)$ – гладкие вещественные функции, и градиенты $\nabla\theta_k(x)$ линейно независимы при всех x . Функция $C^2(y, x)$, $y \in \mathbb{R}^m$, является 2π -периодической по каждой переменной y_j и гладкой по всем переменным, и справедливо неравенство $0 < c_m \leq C^2(y, x) \leq c_M$. Малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ отвечает за скорость быстрых осцилляций, описываемых фазами $\theta_k(x)$, считаем что $\varepsilon \leq \mu^{3/2}$.

Поскольку начальная функция является быстроменяющейся, то и главный член асимптотического решения также будет быстроменяющейся функцией. Поэтому прямое применение подходов усреднения, развитых в работах [17–23], приводит, вообще говоря, к неверным результатам, и здесь следует применять подходы, предложенные в [16, 24–27]. Усреднённое уравнение здесь также появляется и в случае гладких решений ($\mu = 1$) переходит в “обычное” усреднённое уравнение из [17–23].

Согласно статьям [16, 25–27] процесс построения асимптотического решения задачи (14) разумно разбить на две задачи. Первая задача состоит в построении “приближённого” усреднённого уравнения с гладкими коэффициентами, что осуществляется с помощью операторного усреднения (см. [16, 25–27]). Вторая задача – построение асимптотического решения усреднённой задачи с помощью представленных выше формул.

Отметим важный момент, связанный с построением усреднённого уравнения. В случае дивергентной записи волнового уравнения для построения усреднённого уравнения возникает необходимость в решении вспомогательной задачи на ячейке при любом соотношении между ε и μ [25, 26], при этом явно найти решение этой задачи удаётся в редких случаях. Однако при предположении о малости осцилляций, т.е. когда функция $C^2(y, x)$ имеет вид

$$C^2(y, x) = C_0^2(x) + \delta a(y, x), \quad (15)$$

где $C_0(x)$ – гладкая функция, δ – малый параметр, а функция $a(y, x)$ имеет нулевое среднее по y , решение задачи на ячейке можно построить с необходимой точностью.

Для случая уравнения в недивергентной форме ситуация меняется: необходимость решать задачу на ячейке возникает, в частности, при $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$. Если же $\mu \sim 1$, то в качестве усреднённого уравнения получается волновое, и для определения его коэффициента решать задачу на ячейке уже не требуется.

Отметим, что используемый нами метод построения усреднённого уравнения обобщается и на n -мерный случай.

Метод операторного усреднения для уравнения (14) приводит к задаче с псевдодифференциальным уравнением вида (3):

$$-\mu^2 v_{tt}(x, t) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L(x, \hat{p}; \varepsilon, \mu) v(x, t), \quad v|_{t=0} = V(x/\mu), \quad v_t|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

Цифры над операторами показывают их порядок действия: первым действует $\hat{p} = -i\mu\nabla$, а вторым – оператор умножения на функцию от x . Оператор $L(x, \hat{p}; \varepsilon, \mu)$ является симметричным и положительно определённым.

Утверждение 4. Для символа оператора $L(x, p; \varepsilon, \mu)$ справедливо следующее разложение по степеням ε/μ :

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L(x, p; \varepsilon, \mu) = L_0(x, p) + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} L_0^4(x, p) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} \mathcal{L}(x, p, \varepsilon/\mu),$$

$$L_0(x, p) = c^2(x)|p|^2, \quad L_0^4(x, p) = -\Phi(x)c^2(x)|p|^4.$$

Функция $c(x)$ определяется через среднее по ячейке $y \in \mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$ от функции $1/C^2(y, x)$:

$$c^2(x) = \left\langle \frac{1}{C^2(y, x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m}^{-1} = \left(\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \frac{dy}{C^2(y, x)} \right)^{-1}, \tag{17}$$

где скобки $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{T}^m}$ обозначают среднее на ячейке.

Функция $\Phi(x) = \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y, x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m}$, где $\psi_2(y, x)$ является решением задачи на ячейке

$$(-\Delta_y^\theta) \psi_2 = \frac{c^2(x) - C^2(y, x)}{C^2(y, x)}, \quad \langle \psi_2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m} = 0. \tag{18}$$

Операторы $(-\Delta_y^\theta) = \langle -i\nabla_y^\theta, -i\nabla_y^\theta \rangle$, $\nabla_y^\theta = \nabla\Theta(x)\nabla_y$, градиент $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_m)$ и матрица $\nabla\Theta(x) = (\nabla\theta_1(x), \dots, \nabla\theta_m(x))$. Поправка \mathcal{L} содержит производные старшего (по сравнению с $|p|^4$) порядка.

Обоснование этого утверждения приведено в п. 4.

Зная асимптотику решения $v_{as}(x, t)$ усреднённой задачи (16), можно построить асимптотику задачи (14) в виде действия некоторого оператора $\hat{\chi}$ на функцию $v_{as}(x, t)$. В общем случае точно вычислить оператор $\hat{\chi}$ не представляется возможным, но его можно вычислить с требуемой точностью.

Определим операторы $\hat{\chi}_3 = \chi_3(y, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})$ и $\hat{\chi}_4 = \chi_4(y, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})$ следующим образом: пусть их символы являются периодическими по y с нулевым средним решениями следующих задач:

$$(-\Delta_y^\theta) \chi_3(y, x, p) = -2p^2 \langle p, -i\nabla_y^\theta \psi_2(y, x) \rangle, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &(-\Delta_y^\theta) \chi_4(y, x, p) = -2 \langle p, -i\nabla_y^\theta \chi_3(y, x; p) \rangle + \\ &+ p^4 \left(\psi_2(y, x) (-\Delta_y^\theta) \psi_2(y, x) - \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y, x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} \frac{c^2(x)}{C^2(y, x)} \right). \end{aligned} \tag{20}$$

Утверждение 5. Пусть $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$, а функция $v_{as}(x, t)$ является асимптотическим решением усреднённой задачи (16). Тогда функция

$$u_{as}(x, t) = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \psi_2 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, x \right) \hat{p}^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} \chi_3 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}} \right) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} \chi_4 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}} \right) \right) v_{as}(x, t), \tag{21}$$

где символы операторов $\chi_{3,4}$ определены в (19), (20), удовлетворяет волновому уравнению (14) с точностью $O(\mu^{3/2})$, а начальным данным – с точностью $O(\mu)$.

Под выражением $O(\mu^\alpha)$ в формулировке утверждения 5 понимается гладкая и ограниченная функция порядка μ^α .

Определение 3. В рамках утверждения 5 функция $v_{as}(x, t)$ называется *главной частью* асимптотического решения задачи (14).

Обоснование утверждения 5 приведено в п. 4.

Случай малых осцилляций. Отдельно рассмотрим случай, когда коэффициент уравнения (14) имеет вид (15):

$$C^2(y, x) = C_0^2(x) + \delta a(y, x),$$

где $C_0(x)$ – гладкая функция, а параметр δ является малым. Функция $a(y, x)$ является 2π -периодичной по каждой переменной y_j и имеет нулевое среднее. Для неё справедливо разложение в ряд Фурье

$$a(y, x) = \sum_{|k| \neq 0} a_k(x) e^{i\langle k, y \rangle}. \tag{22}$$

Вычислим функцию $c^2(x)$, определённую в (17). Непосредственным вычислением получаем

$$c^2(x) = C_0^2(x) - \delta^2 \frac{\langle a^2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m}}{C_0^2(x)} + O(\delta^3).$$

Из этого равенства следует, что гамильтониан $H(x, p)$ имеет представление

$$H(x, p) = |p|C_0(x) - \frac{\delta^2}{2} \frac{|p|}{C_0^3(x)} \sum_{|k| \neq 0} a_k(x)a_{-k}(x) + O(\delta^3). \tag{23}$$

Обозначим через $X(\varphi, \theta, t)$ и $P(\varphi, \theta, t)$ решение системы Гамильтона (5) с гамильтонианом (23). Отметим, что поправку порядка δ^2 к гамильтониану можно учесть и в уравнении переноса, вместо самой системы Гамильтона. В таком случае гамильтониан приобретает вид $H(x, p) = C_0(x)|p|$, но при этом сдвигается фронт волны и поправляется амплитуда.

Теперь определим коэффициент усреднённого уравнения $\Phi(x)$ при дисперсионных поправках. Для правой части уравнения в задаче на ячейке (18) справедливо равенство

$$\frac{c^2(x) - C^2(y, x)}{C^2(y, x)} = -\frac{\delta}{C_0^2(x)} a(y, x) + O(\delta^2).$$

С учётом (22) решение $\psi_2(y, x)$ задачи на ячейке (18) также ищется в виде ряда Фурье. Непосредственным вычислением действия оператора ∇_y^θ на экспоненту $e^{i\langle k, y \rangle}$ получаем

$$\Phi(x) = \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y, x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} = \frac{\delta^2}{C_0^4(x)} \sum_{|k| \neq 0} \frac{a_k(x)a_{-k}(x)}{|\nabla\Theta(x)k|^2} + O(\delta^3).$$

После определения функции $\Phi(x)$ можно определить функцию $Q(\varphi, \theta, t)$ согласно формуле (8). Эта функция описывает профиль волны и дисперсионные эффекты. В случае малых осцилляций мы имеем $Q(\varphi, \theta, t) = \delta^2 F(\varphi, \theta, t) + O(\delta^3)$, где

$$F(\varphi, \theta, t) = \frac{C_0(0)}{2} \int_0^t \frac{|P|^2}{C_0^4(X(\varphi, \theta, \tau))} \left(\sum_{|k| \neq 0} \frac{a_k(X(\varphi, \theta, \tau))a_{-k}(X(\varphi, \theta, \tau))}{|\nabla\Theta(X(\varphi, \theta, \tau))k|^2} \right) d\tau. \tag{24}$$

Из (24) и (8) следует, что в случае малых осцилляций параметр λ , определяющий дисперсионные эффекты решения, равен $\lambda = (\varepsilon^2 \delta^2 / \mu^3) F(\psi, t)$. Это означает, что дисперсионные эффекты начинают оказывать влияние на решение в случае $\varepsilon \delta \sim \mu^{3/2}$, т.е. при наличии малых осцилляций эффективным параметром дисперсии становится произведение $\delta\varepsilon$ вместо ε .

Пример. Приведём пример реализации полученных выше асимптотических формул в случае малых осцилляций и при $\dim y = m = 1$. Выбираем следующий вид коэффициента уравнения (14):

$$C^2(y, x) = C_0^2(x) + \delta k(x) \cos y, \quad C_0(x) = 1 - \frac{1}{2}k(x), \quad k(x) = \exp\left(-\alpha \left(x_1^2 + \frac{(x_2 - 5)^2}{a} + x_3^2\right)\right).$$

Функция $\Theta(x) = 8x_1^2/7 + 2x_2 + 2x_3^2$, а параметры задачи $\alpha = 0.4$, $a = 2$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.5$. Проводя вычисления, получаем

$$c^2(x) = C_0^2(x) - \frac{\delta^2}{2} \frac{k^2(x)}{C_0^2(x)}, \quad \langle |\nabla_y^\theta \psi_2|^2 \rangle_{[0, 2\pi]} = \frac{\delta^2}{2} \frac{k^2(x)}{C_0^4(x)} \frac{1}{|\nabla\Theta(x)|^2}.$$

На рис. 1 представлены сечение волнового фронта $\gamma_t = \{X(\varphi, \theta, t)\}$ при $t = 20$ плоскостью $x_3 = 0$ при $\varphi \in [0, \pi]$ и проекции некоторых траекторий системы Гамильтона (5) на конфигурационное пространство при $x_3 = 0$, отмечены проекция фокальной точки F и область быстрых осцилляций коэффициента исходного уравнения.

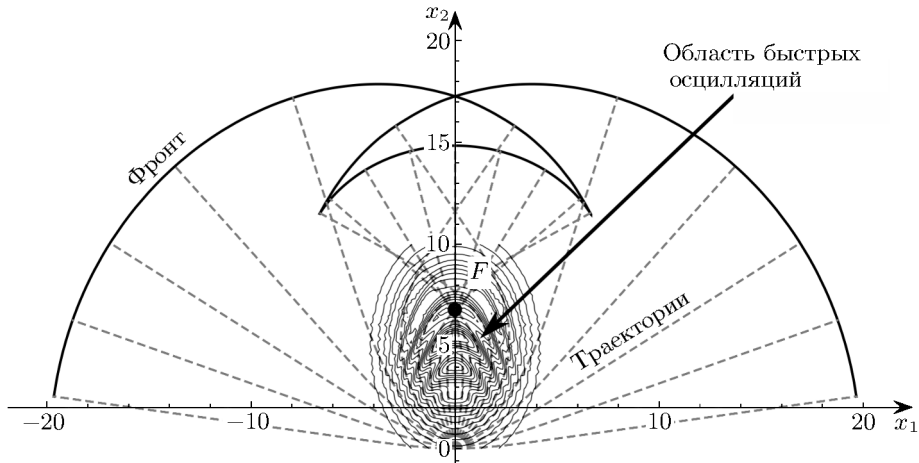


Рис. 1. Сечение волнового фронта γ_t (жирная непрерывная линия) плоскостью $x_3 = 0$ при $\varphi \in [0, \pi]$ и проекции траектории системы Гамильтона (5) (штриховые линии). Контурные линии показывают область быстрых осцилляций коэффициента уравнения.

Начальное возмущение $V(\xi)$ выбирается в специальном виде (11), где $A = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, параметр локализации начальной функции $\mu = (\delta\varepsilon)^{2/3} \approx 0.135$.

На рис. 2 и 3 представлены профили главной части асимптотического решения задачи (14) вдоль луча, выходящего из начала координат и совпадающего с положительным направлением оси x_2 . Для сравнения на обоих рисунках показана асимптотика решения волнового уравнения с коэффициентом $c^2(x)$ без учёта дисперсионной поправки. На рис. 2 показаны профили волны до возникновения фокальной точки. Вначале дисперсионные эффекты не оказывают существенного влияния и главная часть определяется асимптотикой решения волнового уравнения (12). После прохождения области осцилляций дисперсионные эффекты начинают оказывать влияние на амплитуду волны и главная часть асимптотического решения определяется формулой (9).

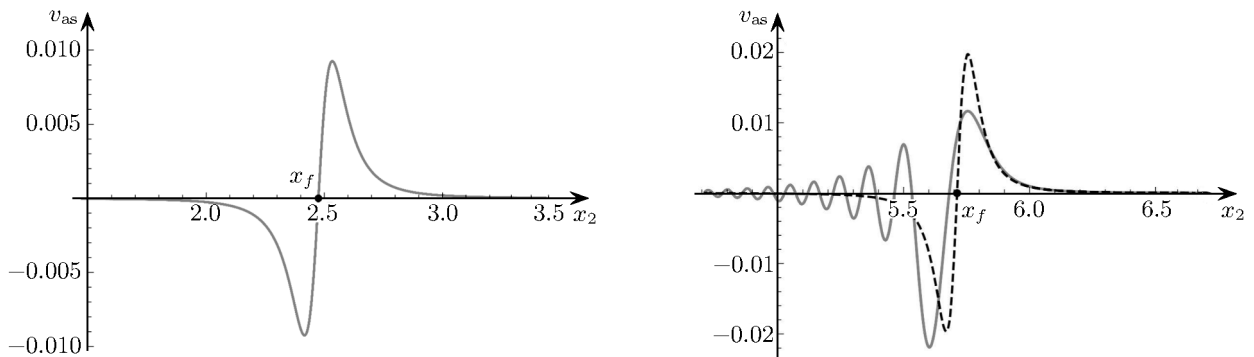


Рис. 2. Графики главной части асимптотического решения до прохождения фокальной точки: слева – в момент времени $t = 3$ до прохождения волной области осцилляций, точка $x_f \approx 2.47$ лежит на фронте; справа – в момент времени $t = 9$ после прохождения зоны осцилляций, точка $x_f \approx 5.71$ лежит на фронте. Штриховой линией показана асимптотика волнового уравнения без учёта дисперсии.

На рис. 3 приведён график главной части асимптотики вдоль указанного луча после возникновения фокальной точки. В этом случае луч пересекает фронт в точках x_{f1} и x_{f2} . Точка x_{f2} является точкой самопересечения фронта, и в её окрестности, в зависимости от значений φ и θ , в нуль обращается либо $|X_\theta|$, либо $|X_\varphi|$. На соответствующих траекториях системы Гамильтона (5) дисперсионные эффекты не играют существенной роли, поэтому главная часть асимптотики в окрестности этой точки представляется суммой функций вида (13), а индекс Маслова в этих случаях равен нулю. Асимптотика решения в окрестности точки x_{f1}

описывается с помощью формулы (9), так как соответствующая траектория системы Гамильтона проходит через область осцилляций. Так как соответствующая траектория прошла через фокальную точку, то её индекс Морса равен единице, и вместо головной волны получается впадина.

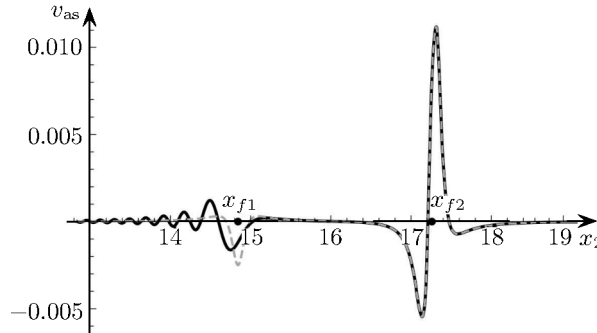


Рис. 3. График главной части асимптотического решения после фокальной точки в момент времени $t = 20$. Точки $x_{f1} \approx 14.8$, $x_{f2} \approx 17.2$ лежат на фронте. Штриховой линией показана асимптотика волнового уравнения без учёта дисперсии.

3. Асимптотика решения многомерного волнового уравнения с дисперсионными эффектами. Приведём формулы для построения асимптотики решения задачи Коши (1), (2) для волнового уравнения с дисперсионными поправками в n -мерном случае.

Перейдём к оператору $\hat{p} = -i\mu\nabla$ в уравнении (1), умножив его на $-\mu^2$. После преобразований получим задачу

$$-\mu^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = c^2(x) |\hat{p}|^2 v(x, t) - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} c^2(x) \Phi(x) |\hat{p}|^4 v(x, t), \quad v(x, 0) = V(x/\mu), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (25)$$

Начальная функция $V(x/\mu)$ определена формулой (4).

Асимптотика задачи (25) представляется с помощью модифицированного канонического оператора Маслова [8, 12–14]

$$v_{as}(x, t) = \text{Re} [\mu^{n/2} e^{-i\pi n/4} K_{\Lambda_t}^\mu [\tilde{V}(p)](x, t)].$$

Далее кратко опишем процедуру построения модифицированного канонического оператора Маслова в n -мерном случае.

Перейдём на начальном многообразии Λ_0 к сферическим координатам $\alpha = \rho \mathbf{n}(\psi)$, где $\rho \geq 0$ и вектор $\mathbf{n}(\psi) \in \mathbb{S}^{n-1}$, а \mathbb{S}^{n-1} – единичная сфера размерности $n - 1$. Пусть функции $\mathcal{X}(\rho, \psi, t)$ и $\mathcal{P}(\rho, \psi, t)$ являются решением следующей системы Гамильтона:

$$\dot{x} = H_p(x, p), \quad \dot{p} = -H_x(x, p), \quad x|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = \rho \mathbf{n}(\psi), \quad \rho \neq 0, \quad (26)$$

где гамильтониан $H(x, p) = c(x)|p|$. Справедливы равенства $\mathcal{X}(\rho, \psi, t) = X(\psi, t)$, $\mathcal{P}(\rho, \psi, t) = \rho P(\psi, t)$, где функции X и P являются решением системы Гамильтона

$$\dot{x} = H_p(x, p), \quad \dot{p} = -H_x(x, p), \quad x|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = \mathbf{n}(\psi). \quad (27)$$

Система (26) не определена при $\rho = 0$, однако её решение можно по непрерывности продолжить на $\rho = 0$ (см. [13]), так как функции $X(\psi, t)$ и $P(\psi, t)$ не зависят от ρ . С учётом такого продолжения можно построить многообразие с краем

$$\Lambda_t = \{x = \mathcal{X}(\rho, \psi, t) \equiv X(\psi, t), p = \mathcal{P}(\rho, \psi, t) \equiv \rho P(\psi, t)\}.$$

Краю многообразия в фазовом пространстве соответствуют точки на многообразии, отвечающие значению $\rho = 0$.

Проекция этого многообразия на конфигурационное пространство в каждый момент времени t представляет собой поверхность $\gamma_t = \{x = X(\psi, t)\}$, которую будем называть *фронтом волны*. Асимптотика решения задачи (25) локализована в окрестности этой поверхности.

В любой точке многообразия Λ_t якобиан проектирования $\det \partial \mathcal{X}(\rho, \psi, t) / \partial(\rho, \psi)$ этого многообразия на конфигурационное пространство равен нулю. Это означает, что данное многообразие, с точки зрения классической теории канонического оператора [5], состоит только из особых точек. При этом, в силу построения, край многообразия Λ_t рассматривается как особенность специального вида. В окрестности края канонический оператор Маслова определяется согласно результатам работ [8, 12–14].

Многообразие Λ_t можно покрыть счётным набором карт Ω_j , так что каждый компакт на многообразии покрывается конечным числом карт [5]. Определим ранг $k_j = \text{rank } \Omega_j$ карты Ω_j как наименьшее значение ранга матрицы $\partial \mathcal{X}(\rho, \psi, t) / \partial(\rho, \psi)$ при $(\rho, \psi) \in \Omega_j$. Точки на многообразиях, в которых ранг этой матрицы равен $n - 1$ (максимально возможный ранг), называем *регулярными*, остальные точки – *фокальными*.

Обозначим через $g_j(\rho, \psi)$ разбиение единицы, подчинённое покрытию многообразия картами Ω_j . Канонический оператор Маслова, действующий на функцию $\tilde{V}(\rho, \psi)$, заданную на многообразии Λ_t , определяется следующим образом:

$$K_{\Lambda_t}^\mu[\tilde{V}(\rho, \psi)](x, t) = \sum_j K_{\Omega_j}[g_j(\rho, \psi)\tilde{V}(\rho, \psi)](x, t).$$

Здесь $K_{\Omega_j}[g_j(\rho, \psi)\tilde{V}(\rho, \psi)]$ – предканонический оператор, записанный в карте Ω_j и определяющий действие канонического оператора на функцию $\tilde{V}(\rho, \psi)$ в этой карте.

Определим предканонический оператор согласно [8, 12–14], учитывая, что карта может содержать точки края многообразия. Пусть ранг карты Ω равен k , тогда в этой карте компоненты вектора ψ можно перенумеровать так, чтобы $\text{rank } \partial X / \partial \phi = k$, где $\phi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$. Оставшиеся компоненты обозначим через $\eta = (\psi_{k+1}, \dots, \psi_{n-1})$, таким образом $\psi = (\phi, \eta)$. В этой карте определена невырожденная матрица размера $n \times n$

$$M(\psi, t) = (\Pi, P, P_\eta - P_\phi \Pi^T X_\eta), \tag{28}$$

где матрица $\Pi = \Pi(\psi, t)$ имеет размер $n \times k$ и определяется равенством $\Pi^T X_\phi = E_k$, E_k – единичная матрица размера $k \times k$, а верхний индекс t обозначает транспонирование.

Пусть точка x_0 лежит на фронте γ_t , тогда в карте Ω существует решение $\phi = \phi(x_0, t, \eta)$ системы уравнений (см. лемму 6 в [12])

$$\Pi^T(\psi, t)(x_0 - X(\psi, t)) = 0. \tag{29}$$

Определим индекс Маслова карты Ω следующим образом:

$$m(\Omega) = \text{ind } \Gamma(\psi, t) + \sigma.$$

Здесь $\text{ind } \Gamma(\psi, t)$ – приращение индекса Маслова вдоль пути, отвечающего траектории $\Gamma = \{X(\psi, \tau), P(\psi, \tau)\}$ системы Гамильтона (27) при $\tau \in (0, t]$, заканчивающейся в регулярной точке карты Ω . В случае гамильтониана $H(x, p) = c(x)|p|$ величина $\text{ind } \Gamma(\psi, t)$ совпадает с индексом Морса соответствующего пути и равна числу фокальных точек на нём (см. [4; 5, с. 155]).

Число σ при $k \neq n - 1$ определяется как число отрицательных собственных чисел матрицы размера $n - k - 1 \times n - k - 1$

$$W = (X_\eta)^T (E_n - \Pi(X_\phi)^T) (P_\eta - P_\phi \Pi^T X_\eta),$$

вычисленной в регулярной точке карты Ω . Если $k = n - 1$, то положим $\sigma = 0$.

Введём функции

$$U_k(s, \lambda, \psi) = \int_0^{+\infty} \rho^{n-1-k/2} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) e^{i(\rho s + \lambda \rho^3)} d\rho, \quad Q(\psi, t) = \frac{c(0)}{2} \int_0^t \Phi(X(\psi, \tau)) |P^0(\psi, \tau)|^2 d\tau.$$

Утверждение 6. Пусть точка $x_0 \in \gamma_t$ и содержится в проекции на конфигурационное пространство карты Ω ранга k . Пусть $\psi = (\phi, \eta)$, а функция $\phi = \phi(x_0, t, \eta)$ – решение системы (29), тогда в окрестности точки x_0 при $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$ справедливо равенство

$$K_\Omega[\tilde{V}](x, t) = \frac{e^{i\pi(n-k-2m(\Omega))/4}}{(2\pi\mu)^{(n-k)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k-1}} g(\psi) \frac{c(X(\psi, t))}{c(0)} \sqrt{|\det(\mathbf{n}(\psi), \mathbf{n}'(\psi))| |\det M|} U_k(s, \lambda, \psi) d\eta,$$

где M – матрица, определённая в (28), а $\mathbf{n}'(\psi)$ – матрица производных вектора $\mathbf{n}(\psi)$ по координатам ψ . Функция $g(\psi)$ является срезающей функцией, отвечающей карте Ω . Здесь

$$s = s(x, \psi, t) = \frac{\langle P(\psi, t), x - X(\psi, t) \rangle}{\mu}, \quad \lambda = \lambda(\psi, t) = \frac{\varepsilon^2}{\mu^3} Q(\psi, t).$$

Из утверждения 6 следуют асимптотические формулы для трёхмерного случая, приведённые в утверждениях 1–3.

4. Вывод усреднённого уравнения. В данном пункте описываются процедура операторного усреднения и вывод усреднённого уравнения, а также приводится обоснование утверждения 5 о малости соответствующей невязки. Мы не будем концентрироваться на вопросах, связанных с корректностью усреднённой задачи и свойствах операторов, возникающих в процессе вывода усреднённого уравнения.

Операторное усреднение. Следуя работам [16, 25–27], воспользуемся операторным усреднением для построения усреднённого уравнения. Решение волнового уравнения (14)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = C^2 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, x \right) \Delta u(x, t)$$

ищем в виде $u(x, t) = \Psi(\Theta(x)/\varepsilon, x, t)$, где функция $\Psi(y, x, t)$ 2π -периодична по переменным $y \in \mathbb{R}^m$. Функция $u(x, t)$ будет решением уравнения (14), если функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon^2 \Psi_{tt}(y, x, t) = \hat{\mathcal{H}}(x, y, -i\varepsilon \nabla, -i \nabla_y^\theta) \Psi(y, x, t), \tag{30}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(x, y, -i\varepsilon \nabla, -i \nabla_y^\theta) = C^2(y, x) \langle (-i\varepsilon \nabla - i \nabla_y^\theta), (-i\varepsilon \nabla - i \nabla_y^\theta) \rangle,$$

где $-i \nabla_y^\theta = -i \nabla \Theta(x) \nabla_y$, матрица $\nabla \Theta(x) = (\nabla \theta_1(x), \dots, \nabla \theta_m(x))$, а $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_m)$.

Оператор $\hat{\mathcal{H}}$ с областью определения на функциях, периодических и гладких по y на ячейке $\mathbb{T}^m = \{y \in [0, 2\pi]^m\}$, а по переменной x из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, является симметричным и положительно определённым в пространстве $L_{2,C}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ с весовым скалярным произведением

$$(f(y, x), g(y, x))_{L_{2,C}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{C^2(y, x)} f(y, x) \overline{g(y, x)} dy dx.$$

Решение уравнения (30) ищется в виде действия псевдодифференциального оператора $\hat{\chi}$ на функцию v :

$$\Psi(y, x, t) = \hat{\chi} \left(x, -i\varepsilon \nabla, y \right) v(x, t), \tag{31}$$

где цифры обозначают порядок действия операторов. При этом предполагается, что функция v не зависит от y и удовлетворяет усреднённому уравнению с гладкими коэффициентами

$$-\varepsilon^2 v_{tt} = \hat{L}v, \quad \hat{L} = L(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\nabla). \tag{32}$$

Отметим, что операторы $\hat{\chi}$ и \hat{L} зависят от параметра ε , но для краткости записи эта зависимость не указывается.

Подстановка (32) и (31) в уравнение (30) приводит к соотношению между операторами

$$(\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi} - \hat{\chi}\hat{L}) = 0. \tag{33}$$

Если функция $v(x, t)$ – решение уравнения (32), то соотношение (33) является достаточным условием (см. [26]), чтобы функция Ψ была решением уравнения (30). Из этого соотношения определяются операторы \hat{L} и $\hat{\chi}$.

Введём пространство $L_{2,c}(\mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$(w(x), v(x))_{L_{2,c}} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2(x)} w(x) \overline{v(x)} dx,$$

где функция $c^2(x)$ определена в (17) и равна $c^2(x) = \langle 1/C^2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m}^{-1}$. Следуя [26], потребуем совпадения нормы функции $\Psi = \hat{\chi}v$ в пространстве $L_{2,C}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ и нормы функции v в пространстве $L_{2,c}(\mathbb{R}^n)$. Это требование приводит к условию нормировки для оператора $\hat{\chi}$:

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \bar{\chi}(p - i\varepsilon\nabla, \overset{1}{x}, y) \frac{1}{C^2(y, x)} \chi(p, x, y) dy = \frac{1}{c^2(x)}, \tag{34}$$

с учётом равенства для сопряжённого оператора $\hat{\chi}^* = \bar{\chi}(-i\varepsilon\nabla, \overset{1}{x}, y)$.

Отметим, что оператор \hat{L} является симметричным и положительно определённым. Действительно, пусть $\Psi = \hat{\chi}v$, тогда из (33) и (34) вытекает равенство $(\hat{L}v, v)_{L_{2,c}} = (\hat{\mathcal{H}}\Psi, \Psi)_{L_{2,C}}$. Из симметричности и положительной определённости оператора $\hat{\mathcal{H}}$ вытекают аналогичные свойства и для оператора \hat{L} .

Доказательство утверждения 4. Напомним, что в утверждении 4 строится символ усреднённого оператора \hat{L} .

Перейдём в уравнениях (30) и (32) к оператору $\hat{p} = -i\mu\nabla$:

$$-\mu^2 \Psi_{tt}(y, x, t) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \mathcal{H}\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}, \frac{\varepsilon}{\mu} \hat{p}, -i\nabla_y^\theta\right) \Psi(y, x, t), \tag{35}$$

$$-\mu^2 v_{tt}(x, t) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L\left(\overset{2}{x}, \frac{\varepsilon}{\mu} \hat{p}; \varepsilon\right) v(x, t). \tag{36}$$

Операторнозначный символ оператора $\hat{\mathcal{H}}$ можно представить в виде суммы

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \mathcal{H}\left(x, y, \frac{\varepsilon}{\mu} p, -i\nabla_y^\theta\right) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \left(\mathcal{H}_0(x, y, \frac{\varepsilon}{\mu} p, -i\nabla_y^\theta) + \varepsilon \mathcal{H}_1(x, y, \nabla_y) \right), \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \mathcal{H}_0^0 + \frac{\varepsilon}{\mu} \mathcal{H}_0^1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \mathcal{H}_0^2; & \mathcal{H}_1 &= -C^2(y, x) \langle \Delta\Theta(x), \nabla_y \rangle; \\ \mathcal{H}_0^0 &= C^2(y, x) (-\Delta_y^\theta); & \mathcal{H}_0^1 &= 2C^2(y, x) \langle p, -i\nabla_y^\theta \rangle; & \mathcal{H}_0^2 &= C^2(y, x) p^2. \end{aligned}$$

Здесь $(-\Delta_y^\theta) = \langle -i\nabla_y^\theta, -i\nabla_y^\theta \rangle$, вектор $\Delta\Theta(x) = (\Delta\theta_1(x), \dots, \Delta\theta_m(x))$.

Предполагается, что для символа оператора $\hat{\chi}$ справедливо разложение

$$\chi(y, x, \varepsilon p/\mu; \varepsilon) = \chi_0(y, x, \varepsilon p/\mu) + \varepsilon \chi_1(y, x, \varepsilon p/\mu) + \dots,$$

$$\chi_0(y, x, \varepsilon p/\mu) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m \chi_0^m(y, x, p), \tag{38}$$

где χ_0^m – однородные полиномы по степеням $|p|$. Символ $L(x, p; \varepsilon)$ ищем в виде

$$L(x, \varepsilon p/\mu; \varepsilon) = L_0(x, \varepsilon p/\mu) + \varepsilon L_1(x, \varepsilon p/\mu) + \varepsilon^2 L_2(x, \varepsilon p/\mu) + \dots, \tag{39}$$

$$L_0(x, \varepsilon p/\mu) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m L_0^m(x, p), \quad L_1(x, \varepsilon p/\mu) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m L_1^m(x, p), \tag{40}$$

где $L_0^m(x, p)$ и $L_1^m(x, p)$ являются однородными полиномами по p степени m .

По аналогии с [16] можно оценить количество членов в (39) и (40), необходимое для того, чтобы асимптотика усреднённой задачи удовлетворяла уравнению с точностью $O(\mu^2)$ при $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$. Для этого подставим функцию $v(x, t) = A(x, t)e^{iS(x,t)/\mu}$ в уравнение (36), что приведёт к равенству

$$\begin{aligned} \left(\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L(x, \varepsilon \hat{p} / \mu)\right) A(x, t) e^{iS(x,t)/\mu} = e^{iS(x,t)/\mu} \left[-S_t^2 + i\mu S_{tt} A + i\mu S_t A_t + \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L_0(x, \varepsilon \nabla S / \mu) A + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2}{\varepsilon} L_1(x, \varepsilon \nabla S / \mu) A - i \frac{\mu^2}{\varepsilon} \langle \nabla_\xi L_0(x, \varepsilon \nabla S / \mu), \nabla A \rangle - i \frac{\mu}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial^2 L_0(x, \varepsilon \nabla S / \mu)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) A + \mu^2 \hat{G} A \right]. \tag{41} \end{aligned}$$

Через ξ обозначен второй аргумент символа оператора $L(x, (\varepsilon/\mu)p)$: $\xi = (\varepsilon/\mu)p$. Оператор \hat{G} такой, что его действие на гладкую функцию A даёт ограниченную функцию. Зависимость оператора \hat{L} от ε и μ для сокращения записи не указывается.

Для того чтобы выражение в правой части равенства (41) было порядка $O(\mu^2)$, достаточно определить члены разложения L_0^m , $m = 0, \bar{5}$, L_1^0 и L_1^1 , что следует из (40).

Лемма. *Справедливы следующие равенства:*

$$L_0^0(x, p) = L_0^1(x, p) = L_0^3(x, p) = L_0^5(x, p) = 0, \quad L_1^0(x, p) = L_1^1(x, p) = 0,$$

$$L_0^2(x, p) = c^2(x)|p|^2, \quad L_0^4(x, p) = -c^2(x) \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y, x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} \hat{p}^4,$$

где функция $c^2(x) = \langle 1/C^2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m}$ и определена в (17). Функция $\psi_2(y, x)$ является периодическим решением с нулевым средним задачи на ячейке

$$(-\Delta_y^\theta) \psi_2 = \frac{c^2(x) - C^2(y, x)}{C^2(y, x)}, \quad \langle \psi_2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m} = 0. \tag{42}$$

Доказательство. Существование гладкого по переменным x и y и 2π -периодичного по y решения задачи (42) следует из работы [26].

С учётом равенств (37)–(39) символы произведений операторов $\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}$ и $\hat{\chi}\hat{L}$ можно представить в виде рядов по степеням ε . Подстановка этих рядов в (33) приводит к уравнениям на L_0 , L_1 и χ_0 , χ_1 :

$$\mathcal{H}_0 \chi_0 = \chi_0 L_0, \tag{43}$$

$$\mathcal{H}_0 \chi_1 = \chi_1 L_0 + \chi_0 L_1 - \mathcal{H}_1 \chi_0 + i(\langle \mathcal{H}_{0p}, \nabla \rangle - \langle L_{0x}, \nabla_p \rangle) \chi_0. \tag{44}$$

Уравнение (43) означает, что функция χ_0 при фиксированных x и малых фиксированных p является собственной функцией оператора \mathcal{H}_0 с областью определения на гладких и

периодических функциях на ячейке $y \in \mathbb{T}^m$ (см. [26]). Этот оператор при фиксированных x и малых p является симметричным в смысле скалярного произведения

$$(u(x, y, p), v(x, y, p)) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \frac{u(x, y, p)\overline{v(x, y, p)}}{C^2(y, x)} dy. \tag{45}$$

Для $\chi_0(p, x, y)$ из условия нормировки (34), а также из (38) и правил вычисления символа произведения двух операторов, получаем равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \frac{|\chi_0|^2}{C^2(y, x)} dy = \frac{1}{c^2(x)}. \tag{46}$$

Оператор \mathcal{H}_0 при $p = 0$ переходит в оператор $\mathcal{H}_0^0 = C^2(y, x)(-\Delta_y^\theta)$, поэтому с учётом (46) получаем (см. [26]), что $L_0^0 = 0$ и $\chi_0^0 = 1$.

Из уравнения (43) с помощью (40) определяем следующие члены в разложении символа $L(x, p; \varepsilon)$. Из симметричности оператора \mathcal{H}_0^0 следует, что $L_0^1 = 0$ и $\chi_0^1 = 0$. Для L_0^2 и χ_0^2 получаем задачу

$$\mathcal{H}_0^0 \chi_0^2 + \mathcal{H}_0^2 \chi_0^0 = \chi_0^0 L_0^2.$$

Согласно (45) скалярно умножим это равенство на χ_0^0 и после некоторых вычислений получим $L_0^2 = c^2(x)|p|^2$ и $\chi_0^2 = \psi_2(y, x)|p|^2$, где функция $\psi_2(y, x)$ определена в (42). Аналогичные рассуждения приводят к следующим значениям: $L_0^3 = 0$ и $L_0^4 = -\langle |\nabla_y^\theta \psi_2|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} c^2(x)|p|^4$. При этом функция $\chi_0^3(y, x, p)$ является периодическим решением с нулевым средним задачи на ячейке

$$(-\Delta_y^\theta) \chi_0^3(y, x, p) = -2p^2 \langle p, -i \nabla_y^\theta \psi_2(y, x) \rangle. \tag{47}$$

При вычислении L_0^4 использовалось равенство

$$c^2(x) \left\langle \frac{\psi_2(y, x)}{C^2(y, x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m} = \left\langle \psi_2(y, x) \frac{c^2(x) - C^2(y, x)}{C^2(y, x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m}, \tag{48}$$

а также факт, что функция $\psi_2(y, x)$ является периодическим решением задачи на ячейке (42). Величина $L_0^5 = 0$, что следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} L_0^5 &= -p^2 c^4(x) \left\langle \frac{\chi_0^3(y, x, p)}{C^2(y, x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m} = -p^2 c^2(x) \langle \chi_0^3(y, x, p) (-\Delta_y^\theta) \psi_2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m} = \\ &= -p^2 c^2(x) \langle (-\Delta_y^\theta) \chi_0^3(y, x, p) \psi_2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m} = 2p^4 c^2(x) \langle \langle p, -i \nabla_y^\theta \psi_2(y, x) \rangle \psi_2(y, x) \rangle_{\mathbb{T}^m} = 0. \end{aligned}$$

Здесь использовалось равенство, аналогичное равенству (48), где вместо ψ_2 стоит χ_0^3 . Оператор $(-\Delta_y^\theta)$ мы перенесли на χ_0^3 с помощью интегрирования по частям. Последнее выражение в цепочке равенств равно нулю в силу того, что функция $\psi_2(y, x)$ является периодической с нулевым средним на ячейке \mathbb{T}^m , и произведение её самой и производной также будет иметь нулевое среднее.

Функция $\chi_0^4(y, x, p)$ по y является периодическим решением с нулевым средним следующей задачи:

$$\begin{aligned} &(-\Delta_y^\theta) \chi_0^4(y, x, p) = -2 \langle p, -i \nabla_y^\theta \chi_0^3(y, x, p) \rangle + \\ &+ p^4 \left(\psi_2(y, x) (-\Delta_y^\theta) \psi_2(y, x) - \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y, x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} \frac{c^2(x)}{C^2(y, x)} \right). \end{aligned} \tag{49}$$

Перейдём теперь к вычислению символа L_1 . Умножим выражение (44) скалярно, согласно (45), на функцию χ_0 и воспользуемся равенством (43) и условием (46), после чего для L_1 получим выражение

$$\frac{1}{c^2(x)} L_1 = (\chi_0, \mathcal{H}_1 \chi_0) - i \left(\chi_0, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_j} \frac{\partial \chi_0}{\partial x_j} - \frac{\partial L_0}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_0}{\partial p_j} \right).$$

Минимальная степень p у выражения справа равна 2, поэтому L_1^0 и L_1^1 равны нулю. Лемма доказана.

На основании леммы доказано утверждение 4.

В процессе доказательства леммы также определяются члены разложения (38) для оператора χ_0 :

$$\chi_0^0 = 1, \quad \chi_0^1 = 0, \quad \chi_0^2 = \psi_2(y, x)|p|^2,$$

где функция $\psi_2(y, x)$ – решение задачи на ячейке (42). Функции $\chi_0^3(y, x, p)$ и $\chi_0^4(y, x, p)$ являются периодическими решениями с нулевым средним задач (47) и (49).

Отметим, что так как не учитывается L_1 из разложения оператора \hat{L} , то нас не интересует и вид поправки χ_1 из разложения оператора $\hat{\chi}$.

Если полученные в лемме выражения для $L(x, p; \varepsilon)$ подставить в (41), то в него будут входить только $L_0^2(x, p)$ и $L_0^4(x, p)$. При этом функция $L_0^2(x, p)$ определяет уравнение Гамильтона–Якоби, а поправка $L_0^4(x, p)$ попадает в уравнение переноса, добавляя дисперсионные эффекты к асимптотике решения.

Доказательство утверждения 5. Пусть функция $v_{\text{as}}(x, t)$ является формальным асимптотическим решением уравнения (16) с локализованными начальными данными из (14). Для такой функции справедливо равенство

$$-\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{\text{as}}(x, t) = c^2(x)|\hat{p}|^2 v_{\text{as}}(x, t) - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} c^2(x) \langle |\nabla_y^\theta \psi_2|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} |\hat{p}|^4 v_{\text{as}}(x, t) + O(\mu^2).$$

Построим функцию

$$\Psi_{\text{as}}(y, x, t) = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \psi_2(y, x)|\hat{p}|^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} \chi_0^3(y, \hat{x}, \hat{p}) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} \chi_0^4(y, \hat{x}, \hat{p}) \right) v_{\text{as}}(x, t), \quad (50)$$

где $\chi_0^{3,4}(y, x, p)$ определены в (47), (49). Отметим, что в момент времени $t = 0$ при $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$ справедливо равенство $\Psi_{\text{as}}(y, x, 0) = V(x/\mu) + O(\mu)$.

Покажем, что при подстановке функции (50) в уравнение (35) для невязки выполнена оценка

$$R(y, x, t) = -\mu^2 (\Psi_{\text{as}})_{tt} - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \mathcal{H} \left(x, y, \frac{\varepsilon}{\mu} \hat{p}, -i \nabla_y^\theta \right) \Psi_{\text{as}} = O(\mu^{3/2}),$$

из которой следует, что функция (21), равная $u_{\text{as}}(x, t) = \Psi_{\text{as}}(\Theta(x)/\varepsilon, x, t)$, будет удовлетворять волновому уравнению с быстроосциллирующим коэффициентом (14) с такой же точностью.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} -\mu^2 (\Psi_{\text{as}})_{tt} &= \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \psi_2(y, x)|\hat{p}|^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} \chi_0^3(y, x, \hat{p}) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} \chi_0^4(y, x, \hat{p}) \right) (-\mu^2 (v_{\text{as}})_{tt}) = \\ &= \left(c^2(x)|\hat{p}|^2 - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} c^2(x) \langle |\nabla_y^\theta \psi_2|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} |\hat{p}|^4 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \psi_2(y, x)|\hat{p}|^2 c^2(x)|\hat{p}|^2 \right) v_{\text{as}}(x, t) + O(\mu^2 + \varepsilon^3/\mu^3). \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление действия оператора $\hat{\mathcal{H}}$ на функцию $\Psi_{\text{as}}(y, x, t)$ с учётом уравнения на ячейке (42) и формул (47) и (49) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \hat{\mathcal{H}} \Psi_{\text{as}} &= \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} (\hat{\mathcal{H}}_0 + \varepsilon \hat{\mathcal{H}}_1) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \psi_2(y, x)|\hat{p}|^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} \chi_0^3(y, x, \hat{p}) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} \chi_0^4(y, x, \hat{p}) \right) v_{\text{as}} = \\ &= c^2(x)|\hat{p}|^2 v_{\text{as}} - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} c^2(x) \langle |\nabla_y^\theta \psi_2|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} |\hat{p}|^4 v_{\text{as}} + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} c^2(x) \psi_2(y, x)|\hat{p}|^4 v_{\text{as}} + O(\varepsilon + \varepsilon^3/\mu^3). \end{aligned}$$

Здесь также учитывалось, что действие оператора \hat{p} на гладкие функции аргумента x , в частности на $\psi_2(y, x)$ и $\chi_0^{3,4}(y, x, \hat{p})$, есть $O(\mu)$. Таким образом, для невязки R получаем выражение

$$R(y, x, t) = -\mu^2(\Psi_{\text{as}})_{tt} - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\hat{\mathcal{H}}\Psi_{\text{as}} = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\psi_2(y, x)(|\hat{p}|^2c^2(x)|\hat{p}|^2 - c^2(x)|\hat{p}|^4)v_{\text{as}} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} + \mu^2\right).$$

В силу того, что функция $c^2(x)$ является гладкой, справедливо равенство $|\hat{p}|^2c^2(x)|\hat{p}|^2v_{\text{as}} = c^2(x)|\hat{p}|^4v_{\text{as}} + O(\mu)$. В итоге для невязки при условии $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$ получаем нужную оценку $R(y, x, t) = O(\mu^{3/2})$. Утверждение 5 доказано.

Автор выражает благодарность Доброхотову С.Ю., Шафаревичу А.И., Толченникову А.А. и Аникину А.Ю. за ценные советы и указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tolstoy I., Clay C.S. Ocean Acoustics. Theory and Experiment in Underwater Sound. New York, 1966.
2. Laufer G. Introduction to Optics and Lasers in Engineering. New York, 1996.
3. Dobrokhotov S.Yu., Sergeev S.A., Tirozzi B. Asymptotic solutions of the Cauchy problem with localized initial conditions for linearized two-dimensional Boussinesq-type equations with variable coefficients // Rus. J. of Math. Phys. 2013. V. 20. № 2. P. 155–171.
4. Аллилуева А.И., Доброхотов С.Ю., Сергеев С.А., Шафаревич А.И. Новые представления канонического оператора Маслова и локализованные асимптотические решения строго гиперболических систем // Докл. РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 261–266.
5. Маслов В.П., Федорок М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., 1976.
6. Маслов В.П. Операторные методы. М., 1973.
7. Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., Шафаревич А.И. Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // Мат. заметки. 2007. Т. 82. № 5. С. 792–796.
8. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Эффективные асимптотики в задачах о распространении волн, порождённых локализованными источниками, в линейных многомерных неоднородных и дисперсионных средах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 8. С. 107–120.
9. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Проколотые лагранжевы многообразия и асимптотические решения линейных уравнений волн на воде с локализованными начальными условиями // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 936–943.
10. Доброхотов С.Ю., Секержс-Зенькович С.Я., Тироцци Б., Тудоровский Т.Я. Описание распространения волн цунами на основе канонического оператора Маслова // Докл. РАН. 2006. Т. 409. № 2. С. 171–175.
11. Dobrokhotov S.Yu., Shafarevich A.I., Tirozzi B. Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Rus. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 192–221.
12. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Новые интегральные представления канонического оператора Маслова // Изв. РАН. Сер. мат. 2017. Т. 81. № 2. С. 53–96.
13. Dobrokhotov S.Yu., Nazakinski V.E., Shafarevich A.I. Canonical operator on punctured Lagrangian manifolds // Rus. J. of Math. Phys. 2021. V. 28. № 1. P. 22–36.
14. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2021. Т. 76. Вып. 5 (461). С. 3–80.
15. Scorer R. S. Numerical evaluation of integrals of the form $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)e^{i\phi(x)} dx$ and the tabulation of the function $\text{Gi}(z) = (1/\pi) \int_0^\infty \sin(uz + (1/3)u^3) du$ // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1950. V. 3. Pt. 1. P. 107–112.
16. Dobrokhotov S.Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B. Asymptotic theory of linear water waves in a domain with nonuniform bottom with rapidly oscillating sections // Rus. J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 4. P. 455–474.
17. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.

18. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
19. *Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam; New York; Oxford, 1978.
20. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Осреднение дифференциальных операторов. М., 1993.
21. *Marchenko V.A., Khruslov E.Ya.* Homogenization of Partial Differential Equations. Boston, 2006.
22. *Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н.* Об операторных оценках усреднения для эллиптических уравнений с младшими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. № 5. С. 179–207.
23. *Дородный М.А., Суслина Т.А.* Операторные оценки погрешности при усреднении гиперболических уравнений // Функциональный анализ и его прил. 2020. Т. 54. № 1. С. 69–74.
24. *Буслаев В.С.* Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. Вып. 6 (258). С. 77–98.
25. *Грушин В.В., Доброхотов С.Ю., Сергеев С.А.* Осреднение и дисперсионные эффекты в задаче о распространении волн, порожденных локализованным источником // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 170–187.
26. *Брюнинг Й., Грушин В.В., Доброхотов С.Ю.* Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы // Мат. заметки. Т. 92. № 2. С. 163–180.
27. *Brüning J., Grushin V.V., Dobrokhotov S.Yu.* Approximate formulas for eigenvalues of the Laplace operator on a torus arising in linear problems with oscillating coefficients // Rus. J. of Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 261–272.

Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.04.2022 г.
После доработки 24.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.