ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1400–1413

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ГЛАДКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. К. Д. Федоров

Рассмотрена первая начально-краевая задача для однородных параболических систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области Ω на плоскости с криволинейной боковой границей, негладкой при $t=0$. Доказано существование решения этой задачи в классе $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ с помощью метода граничных интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122100090, EDN: KQURND

Введение. Предметом исследования в настоящей работе является первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной параболической системы второго порядка (одномерной по пространственной переменной x) с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области Ω на плоскости с криволинейной боковой границей (см. ниже условие (1)), допускающей наличие "клюва" при $t=0$. Методом граничных интегральных уравнений строится решение поставленной задачи из класса $C^{2,1}(\overline{\Omega})$, которое имеет представление в виде специального параболического потенциала.

Если боковая граница области достаточно гладкая, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0,T]$, где $0<\alpha<1$, и коэффициенты параболической системы из класса Гёльдера, то для любой правой части ψ граничного условия первого рода из класса $\underset{0}{H}^{1+\alpha/2}[0,T]$ согласно [1] (см. также [2, с. 706]) существует единственное решение такой задачи в классе $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$.

Если боковая граница области представляет собой негладкую кривую из класса $H^{1/2+\omega}[0,T]$ (ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини), то для любой ψ, имеющей непрерывную дробную производную порядка $1/2$, равную нулю при $t=0$, согласно [3–5] существует единственное регулярное решение первой начально-краевой задачи в классе $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$.

В настоящей статье рассматривается промежуточный случай условия на правую часть $\psi\in\underset{0}{C}^{1}[0,T]$ и доказывается, что (несмотря на негладкость при $t=0$ боковой границы области) существует решение поставленной задачи из класса $\underset{0}{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$. Ранее этот результат был получен в [6] для параболической системы с постоянными коэффициентами.

Работа состоит из четырёх пунктов. В п. 1 вводятся основные функциональные пространства, ставится первая начально-краевая задача и формулируется основная теорема 1. В п. 2 исследуется гладкость специального параболического потенциала и доказывается теорема 2, которая имеет самостоятельный интерес, так как может быть использована в других начально-краевых задачах. Доказательству однозначной разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, к которой редуцируется исходная задача, посвящён п. 3. В п. 4 приведено доказательство теоремы 1 о существовании решения поставленной задачи в классе $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Фиксируем числа $T>0$ и $m\in\mathbb{N}$. Введём пространства: $C[0,T]$ – пространство непрерывных (вектор-)

функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0 := \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi(t)|$; $\underset{0}{C}[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$; $C^1[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi' \in C[0,T]\}$ с нормой $\|\psi;[0,T]\|^1 := \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi(t)| + \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi'(t)|$; $\underset{0}{C}{}^1[0,T] = \{\psi \in C^1[0,T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассматриваем полосу

$$D := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\quad 0 < t \leqslant T\}.$$

Пусть Ω – произвольная область из D. Через $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\overline{\Omega}$, с нормой

$$\|u;\Omega\|^{2,1} := \sum_{k=0}^{2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| + \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|.$$

Введём пространство $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) : \|u;\Omega\|^{(2)} < \infty\}$, где

$$\|u;\Omega\|^{(2)} := \|u;\Omega\|^{2,1} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega \\ |\Delta t|\neq 0}} \frac{|\Delta_t u_x(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}},$$

и подпространство

$$\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega}) : u(x,0) = u_x(x,0) = u_{xx}(x,0) = u_t(x,0) = 0\}.$$

Под значениями (вектор-) функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения "изнутри" области.

Под принадлежностью вектор-функции некоторому функциональному пространству понимается тот факт, что все её элементы принадлежат соответствующему пространству.

Для любой матрицы B (или вектора b) под $|B|$ (соответственно $|b|$) понимаем максимум из модулей элементов B (компонент b).

Рассмотрим область Ω вида

$$\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$$

с боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$,

$$g \in C[0,T] \bigcap C^1(0,T], \quad |g'(t)| \leqslant \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Модулем непрерывности, согласно [7, с. 150–151], называем функцию $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, обладающую свойствами: $\omega(0) = 0$; ω не убывает на $[0,+\infty)$; ω непрерывна на $[0,+\infty)$; ω полуаддитивна, а именно $\omega(z_1 + z_2) \leqslant \omega(z_1) + \omega(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in [0,+\infty)$.

Отметим известные свойства модуля непрерывности (см. [7, с. 151–153]): для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\omega(nz) \leqslant n\omega(z)$, где $z > 0$; функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, а именно $\omega(z_2)/z_2 \leqslant 2\omega(z_1)/z_1$, если $z_2 \geqslant z_1 > 0$. Кроме того (см. [8]), для любого $c > 0$ существует число $C > 0$ такое, что справедлива оценка

$$\omega(|x|)\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\} \leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{x^2}{t}\right\}$$

для $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [9]) оператор

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k=0}^{2}A_k(x,t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k},\quad u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)^{\text{т}},\quad m\geqslant 1,$$

где $A_k=\|a_{ijk}\|_{i,j=1}^m$, $k=0,1,2,$ – $m\times m$-матрицы, элементы которых – вещественнозначные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) для собственных чисел μ_r матрицы A_2 выполнены неравенства $\operatorname{Re}\mu_r(x,t)\geqslant\delta$, для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$, $r=\overline{1,m}$;

(b) $a_{ijk}\in C^0(\overline{D})$ и справедливы оценки

$$|\Delta_{x,t}a_{ijk}(x,t)|\leqslant\omega_0(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2}),\quad (x,t)\in\overline{D},\quad i,j=\overline{1,m},\quad k=0,1,2,$$

где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z)=\int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y\omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0\in(0,1)$ функция $\nu(z)=\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает, а именно, существует число $C>0$ такое, что $\nu(z_1)\leqslant C\nu(z_2)$, $z_1\geqslant z_2>0$.

Ставится задача: найти функцию $u\in C(\overline{\Omega})$, являющуюся регулярным решением первой начально-краевой задачи

$$Lu=0,\quad (x,t)\in\Omega;\quad u|_{t=0}=0,\quad x\geqslant g(0);\quad u|_{\Sigma}=\psi(t),\quad t\in[0,T].\tag{2}$$

Рассмотрим функцию (см. [10, с. 296–297])

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sigma x}\exp\{-\sigma^2A_2(\xi,\tau)t\}\,d\sigma,\quad t>0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T,\quad x,\xi\in\mathbb{R},$$

для которой справедливы следующие неравенства:

$$|\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant Ct^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-cx^2/t\},\tag{3}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta\xi|+|\Delta\tau|^{1/2})}{t^{(2k+l+1)/2}}\exp\{-cx^2/t\},\tag{4}$$

$k,l\geqslant 0$, $x,\xi,\xi+\Delta\xi\in\mathbb{R}$, $\tau,\tau+\Delta\tau\in[0,T]$, $t>0$.

Известно (см. [11], если $m=1$, и [12], если $m\geqslant 2$), что при выполнении условий (a), (b) существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$, системы $Lu=0$ и для неё имеют место оценки

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\tag{5}$$

$2k+l\leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$. Кроме того, для функции

$$W(x,t;\xi,\tau)=\Gamma(x,t;\xi,\tau)-Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau))$$

справедливы неравенства

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\tag{6}$$

$2k+l\leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$, и

$$|\Delta_t\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \qquad (7)$$

$l=0,1$, $x,\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T$, $\Delta t\leqslant t-\tau$. Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, δ, коэффициентов оператора L и функции ω из условия (1).

Пусть

$$Y(x,t;g(\tau),\tau)=\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(x,t;g(\tau)-r,\tau)\,dr, \quad (x,t)\in\overline{D}. \qquad (8)$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой функции* $\psi\in\underset{0}{C}^1[0,T]$ *решением задачи (2) является (векторный) параболический потенциал*

$$u(x,t)=\int\limits_0^t Y(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \qquad (9)$$

где $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$ *– единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение граничного интегрального уравнения Вольтерры первого рода*

$$\int\limits_0^t Y(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=\psi(t), \quad t\in[0,T]. \qquad (10)$$

При этом $u\in\underset{0}{\widehat{C}}^{2,1}(\overline{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)}\leqslant C\|\psi\|^1. \qquad (11)$$

Замечание (см. [6]). Если некоторая функция $v\in\underset{0}{\widehat{C}}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и $\psi(t)=v(g(t),t)$, то $\psi\in$ $\in\underset{0}{C}^1[0,T]$.

2. Специальный параболический потенциал. Заметим, что из (1) следует неравенство

$$\Big|g(t+\Delta t)-g(t)\Big|\leqslant 2|\Delta t|^{1/2}\omega((|\Delta t|)^{1/2}),0\leqslant t, \quad t+\Delta t\leqslant T. \qquad (12)$$

Пусть

$$Y_j(x,t;g(\tau),\tau)=\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(x,t;g(\tau)+(-1)^j r,\tau)\,dr, \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad j=1,2.$$

Определим для (вектор-) плотности $\varphi\in C[0,T]$ *параболические потенциалы* $S_j\varphi$, $j=1,2$, формулами

$$S_j\varphi(x,t)=\int\limits_0^t Y_j(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad j=1,2.$$

Заметим, что для любой $\varphi\in C[0,T]$ имеют место соотношения

$$S_1\varphi\in C^{2,1}(\Omega), \quad L(S_1\varphi)=0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

$$S_2\varphi\in C^{2,1}(D\setminus\overline{\Omega}), \quad L(S_2\varphi)=0 \ \text{ в } \ D\setminus\overline{\Omega}.$$

Докажем, что справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой функции* $\varphi \in C[0,T]$ *справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^k S_j\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1-k/2}, \quad k=0,1, \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad j=1,2; \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in\Omega, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in D\setminus\overline{\Omega};$$

$$\left|\Delta_t\frac{\partial S_1\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{\Omega}, \tag{15}$$

$$\left|\Delta_t\frac{\partial S_2\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{D}\setminus\Omega.$$

Кроме того, если $\varphi(0)=0$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\omega_\varphi(t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\omega_\varphi(t), \quad (x,t)\in D\setminus\overline{\Omega},$$

где ω_φ *– модуль непрерывности функции* φ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно доказать для потенциала $S_1\varphi$, для потенциала $S_2\varphi$ доказательство проводится аналогично.

Оценка (13) сразу следует из (5):

$$\left|\frac{\partial^k S_j\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t (t-\tau)^{-k/2}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1-k/2}, \quad j=1,2, \quad k=0,1.$$

Докажем (14). Представим $S_1\varphi(x,t)$ в виде

$$S_1\varphi(x,t)=\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}Z(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(t),t))\,dr+$$

$$+\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\{(Z(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau))-$$

$$-Z(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(t),t)))+W(x,t;g(\tau)-r,\tau)\}\,dr\equiv S_1^{(1)}\varphi(x,t)+S_1^{(2)}\varphi(x,t).$$

Для слагаемого $S_1^{(1)}\varphi$ справедлива оценка (см. [6])

$$\left|\frac{\partial^2 S_1^{(1)}\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in\Omega.$$

Для слагаемого $S_1^{(2)}\varphi$ из оценок (4), (6) имеем

$$\left|\frac{\partial^2 S_1^{(2)}\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_0^t \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\,d\tau \leqslant C\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(t^{1/2})\|\varphi\|^0.$$

Если, кроме того, $\varphi(0)=0$, то, используя неравенство

$$|\varphi(\tau)| = |\varphi(\tau)-\varphi(0)| \leqslant \omega_\varphi(\tau) \leqslant \omega_\varphi(t),$$

получим неравенство (16).

Докажем теперь (15). Достаточно рассмотреть $\Delta t > 0$. При $\Delta t \geqslant t$ неравенство (15) следует из оценки (13) для $k=1$. В случае $0<\Delta t<t$ положим

$$\Delta_t \frac{\partial S_1\varphi}{\partial x}(x,t) = \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x,t+\Delta t; g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x,t; g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t-\Delta t} \Delta_t \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x,t; g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv J_1(x,t,\Delta t) + J_2(x,t,\Delta t) + J_3(x,t,\Delta t).$$

Оценим слагаемое J_1:

$$|J_1(x,t,\Delta t)| \leqslant \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} |\varphi(\tau)|\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,t+\Delta t; g(\tau)-r,\tau)\right| dr \leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{1}{(t+\Delta t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Интеграл J_2 оценивается аналогично.

Рассмотрим теперь

$$J_3(x,t,\Delta t) = \int\limits_0^{t-\Delta t} \varphi(\tau)\,d\tau \Bigg(\int\limits_0^{+\infty} \bigg\{ \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau)+r, t-\tau; A_2(g(\tau)-r,\tau)) +$$

$$+ \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x,t; g(\tau)-r,\tau) \bigg\}\, dr \Bigg).$$

Из неравенств (3), (7), (12) и оценки $(a-b)^2 \geqslant a^2/2 - b^2$, $a,b\in\mathbb{R}$, получаем

$$|J_3(x,t,\Delta t)| \leqslant C\|\varphi\|^0 \Bigg(\Delta t \int\limits_0^{t-\Delta t} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau + (\Delta t)^{1/2} \int\limits_0^t \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\,d\tau \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой* $\varphi \in C[0,T]$ *функции*

$$\mathcal{R}_j\varphi(t) := \int\limits_0^t \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t\in[0,T], \quad j=1,2, \tag{17}$$

непрерывны.

Доказательство. Достаточно показать, что функция $\mathcal{R}_1\varphi$ непрерывна, доказательство для функции $\mathcal{R}_2\varphi$ проводится аналогично. Пусть $0<t\leqslant T$. Положим

$$\mathcal{R}_1\varphi(t) = -\int\limits_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t K(g(t),t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

где

$$K(x,t;\tau) = \int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau)) - \\ - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(t),t)) + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,t;g(\tau)-r,\tau)\biggr)\,dr. \tag{19}$$

Имеем (см. [6])

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\right| \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Кроме того, из оценок (4), (6) получаем

$$\Bigl|K(x,t;\tau)\Bigr| \leqslant C\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}. \tag{20}$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\right| \leqslant C\biggl(\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} + \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\biggr), \tag{21}$$

следовательно, интеграл $\mathcal{R}_1\varphi(t)$ сходится и имеет место оценка

$$|\mathcal{R}_1\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\Bigl(\omega(t^{1/2}) + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(t^{1/2})\Bigr).$$

Из последнего неравенства следует, в частности, что

$$\mathcal{R}_1\varphi(0) = \lim_{t\to+0}\mathcal{R}_1\varphi(t) = 0. \tag{22}$$

Докажем непрерывность функции $\mathcal{R}_1\varphi$ на промежутке $(0,T]$. Фиксируем произвольно значение $t_1\in(0,T)$ и рассмотрим последовательность функций

$$\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t) = \int\limits_0^{t-1/n^2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t\in[t_1,T], \quad n\in\mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n^2 < t_1/2$. Тогда $(\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t))_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность функций, непрерывных на отрезке $[t_1,T]$. Достаточно проверить, что $\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t)\to\mathcal{R}_1\varphi(t)$, $n\to\infty$, равномерно по $t\in[t_1,T]$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t)-\mathcal{R}_1\varphi(t)\to 0$, $n\to\infty$, равномерно по $t\in[t_1,T]$.

Из оценки (21) получаем

$$|\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t)-\mathcal{R}_1\varphi(t)|=\left|\int\limits_{t-1/n^2}^{t}\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{t-1/n^2}^{t}\left(\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}+\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\right)|\varphi(\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|^0\left(\frac{\omega(t_1^{1/2})}{t_1^{1/2}}\int\limits_{t-1/n^2}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right)\leqslant C(t_1)\|\varphi\|^0\left(\frac{1}{n}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right),$$

откуда следует требуемое равномерное стремление к нулю при $n\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b) и* $\varphi\in C[0,T]$. *Тогда для любого* $t^0\in\in(0,T]$ *имеют место соотношения (см. (17))*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}}\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0)+\mathcal{R}_1\varphi(t^0),\tag{23a}$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in D\setminus\overline{\Omega}}}\frac{\partial^2 S_2\varphi}{\partial x^2}(x,t)=-\frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0)+\mathcal{R}_2\varphi(t^0).\tag{23b}$$

Если, кроме того, $\varphi(0)=0$, *то формулы (23a), (23b) справедливы и для* $t^0=0$.

Доказательство. Достаточно доказать формулу (23a), формула (23b) доказывается аналогично. Фиксируем произвольно $t^0\in(0,T]$ и положим (см. (19)), что

$$\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)=-\int\limits_0^t\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t^0),t^0))\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t^0),t^0))-\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\right)\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t K(x,t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\equiv I_1(x,t)+I_2(x,t)+I_3(x,t),\quad (x,t)\in\Omega.$$

Для слагаемого $I_1(x,t)$ справедливо соотношение (см. [6])

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}}I_1(x,t)=\frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0)-\int\limits_0^{t^0}\frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0)-g(\tau),t^0-\tau;A_2(g(t^0),t^0))\varphi(\tau)\,d\tau.\tag{24}$$

Рассмотрим $I_2(x,t)$. Из представления (см. [13])

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x,t;A_2(\xi,\tau))=-\frac{x}{2t}A_2^{-1}(\xi,\tau)Z(x,t;A_2(\xi,\tau)),\quad x,\xi\in\mathbb{R},\quad t>0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T,$$

оценки (4) и условия (a) на коэффициенты системы получаем неравенство

$$|I_2(x,t)| \leqslant C\bigg\{\int\limits_0^t \frac{|x-g(\tau)|}{t-\tau}|Z(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t^0),t^0)) - Z(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))|\,d\tau +$$

$$+\,\omega_0((t-t^0)^{1/2})\int\limits_0^t \frac{|x-g(\tau)|}{t-\tau}|Z(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\,d\tau|\bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_0((t-t^0)^{1/2})\int\limits_{-\infty}^t \frac{|x-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\bigg\{-c\frac{(x-g(\tau))^2}{t-\tau}\bigg\}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_0((t-t^0)^{1/2}) \to 0, \quad t\to t^0, \quad (x,t)\in\Omega.$$

Рассмотрим интеграл $I_3(x,t)$. Обозначим $t_1 = t^0/2$. Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированное произвольное число. Для $0 < \delta_1 < t_1$ положим

$$I_3(x,t) - \int\limits_0^{t^0} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t-\delta_1}^t K(x,t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t^0-\delta_1}^{t^0} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \bigg(\int\limits_0^{t-\delta_1} K(x,t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{t^0-\delta_1} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\bigg) \equiv$$

$$\equiv J_1(x,t) - J_1(g(t^0),t^0) + (J_2(x,t) - J_2(g(t^0),t^0)).$$

Из оценки (20) следует, что

$$|J_1(x,t)| \leqslant C\int\limits_{t-\delta_1}^t \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}|\varphi(\tau)|\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\delta_1^{1/2}).$$

Аналогично

$$|J_1(g(t^0),t^0)| \leqslant C\int\limits_{t^0-\delta_1}^{t^0} \frac{\widetilde{\omega}_0((t^0-\tau)^{1/2})}{t^0-\tau}|\varphi(\tau)|\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\delta_1^{1/2}).$$

Выбрав δ_1 достаточно малым, имеем $|J_1(x,t)| < \varepsilon/4$, $|J_1(g(t^0),t^0)| < \varepsilon/4$.

Для выбранного δ_1 рассмотрим теперь $J_2(x,t)$. В силу непрерывности подынтегральной функции по x, t, τ и непрерывности по t верхнего предела собственного интеграла $J_2(x,t)$ получаем, что существует $\delta_2 > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|J_2(x,t) - J_2(g(t^0),t^0)| < \varepsilon/2,$$

если $|x-g(t^0)| < \delta_2$, $|t-t^0| < \delta_2$.

Таким образом,

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}} I_3(x,t) = I_3(g(t^0),t^0).$$

Отсюда и из (24) получаем окончательно (см. (18))

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}} \frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0) - \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0)-g(\tau), t^0-\tau; A_2(g(t^0),t^0))\varphi(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{t^0} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0) + \mathcal{R}_1\varphi(t^0),$$

и формула (23а) доказана в случае $t^0 \in (0,T]$.

Если $t^0 = 0$ и $\varphi(0) = 0$, то (23а) следует из оценки (16) и равенства (22). Лемма доказана.

Из лемм 1–3 следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b) и* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$. *Тогда* $S_1\varphi \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $S_2\varphi \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{D}\setminus\Omega)$ *и имеют место оценки*

$$\|S_1\varphi;\Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\varphi;[0,T]\|^0, \quad \|S_2\varphi; D\setminus\Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\varphi;[0,T]\|^0.$$

3. Граничное интегральное уравнение.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой функции* $\psi \in C^1[0,T]$, $\psi(0) = 0$, *интегральное уравнение Вольтерры*

$$\int\limits_0^t Y(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{25}$$

имеет единственное в пространстве $C[0,T]$ *решение* $\varphi \in C[0,T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|^0 \leqslant C\|\psi\|^1. \tag{26}$$

Если, кроме того, $\psi \in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$, *то* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$.

Доказательство. Учитывая определение (8), запишем уравнение (25) в виде

$$\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\,dr = \psi(t), \quad t\in[0,T]. \tag{27}$$

Применим к обеим частям этого соотношения оператор дифференцирования по t:

$$\lim_{\tau\to t-0}\varphi(t)\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\,dr +$$

$$+\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty}\Big(\Gamma_x(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)g'(t) + \Gamma_t(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\Big)\,dr = \psi'(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} Z(r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\,dr = \frac{1}{2},$$

и, кроме того, имеем (см. (3), (4), (6) и (12))

$$\Big|\int\limits_0^{+\infty}\Big\{Z(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau))-Z(r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\Big\}+$$

$$+W(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\,dr\Big|\leqslant C\Big(\omega((t-\tau)^{1/2})+\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\Big)\to 0,\quad \tau\to t-0.$$

В результате после дифференцирования обеих частей в (27) в силу условия $\psi(0)=0$ получаем эквивалентное (27) уравнение Вольтерры второго рода

$$\varphi(t)+\int\limits_0^t N(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=2\psi'(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{28}$$

где

$$N(t,\tau)=2\int\limits_0^{+\infty}(\Gamma_x(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)g'(t)+\Gamma_t(g(t),t;g(\tau)-r,\tau))\,dr\equiv I_1(t,\tau)+I_2(t,\tau).$$

Докажем, что для ядра $N(t,\tau)$ справедлива оценка

$$|N(t,\tau)|\leqslant C\bigg\{\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}+\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\bigg\},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T. \tag{29}$$

Действительно, из условия (1) и оценки (5) для $I_1(t,\tau)$ вытекает неравенство

$$|I_1(t,\tau)|\leqslant C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_2(t,\tau)=\int\limits_0^{+\infty}Z_t(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\,dr+\int\limits_0^{+\infty}(Z_t(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau))-$$

$$-Z_t(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))+W_t(g(t),t;g(\tau)-r,\tau))\,dr\equiv I_{21}(t,\tau)+I_{22}(t,\tau).$$

Для слагаемого $I_{21}(t,\tau)$ справедливо неравенство (см. [6])

$$|I_{21}(t,\tau)|\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Далее, из оценок (4) и (6) имеем

$$|I_{22}(t,\tau)|\leqslant C\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}.$$

Умножив обе части уравнения (28) на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda>0$ будет выбрано ниже, получим эквивалентное уравнение

$$\varphi^*(t)+\int\limits_0^t N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau=\psi^*(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{30}$$

где

$$\varphi^*(t) := \varphi(t)e^{-\lambda t}, \quad \psi^*(t) := 2\psi'(t)e^{-\lambda t}, \quad N^*(t,\tau) := N(t,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}.$$

Введём обозначение

$$\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t) = \int\limits_0^t N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и запишем уравнение (30) в операторном виде

$$\varphi^* + \mathcal{B}_\lambda\varphi^* = \psi^*. \tag{31}$$

Заметим, что $\mathcal{B}_\lambda\varphi^* \in C[0,T]$, если $\varphi^* \in C[0,T]$. В самом деле, в силу оценки (29) получаем

$$\lim_{t\to+0} \mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t) = 0.$$

Докажем непрерывность $\mathcal{B}_\lambda\varphi^*$ на $(0,T]$. Фиксируем произвольно $t_1 \in (0,T)$ и рассмотрим последовательность функций

$$\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) = \int\limits_0^{t-1/n^2} N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau, \quad t \in [t_1,T], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n^2 < t_1/2$. Тогда $(\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность функций, непрерывных на отрезке $[t_1,T]$. Докажем, что $\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) \to \mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)$, $n\to\infty$, равномерно по $t\in[t_1,T]$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) - \mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t) \to 0$, $n\to\infty$, равномерно по $t \in [t_1,T]$.

Из оценки (29) имеем

$$|\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) - \mathcal{B}_\lambda\varphi^*| = \left|\int\limits_{t-1/n^2}^t N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{t-1/n^2}^t \left(\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} + \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\right)|\varphi^*(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi^*\|^0\left(\frac{\omega(t_1^{1/2})}{t_1^{1/2}}\int\limits_{t-1/n^2}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right) \leqslant C(t_1)\|\varphi^*\|^0\left(\frac{1}{n} + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right),$$

откуда следует требуемое равномерное стремление к нулю при $n\to\infty$.

Покажем, что оператор $\mathcal{B}_\lambda : C[0,T] \to C[0,T]$ будет сжимающим, если число $\lambda > 0$ выбрать достаточно большим.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Если $0 < t \leqslant \varepsilon^2$, то в силу (29) справедливо неравенство

$$|\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)| \leqslant C(\omega(\varepsilon) + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon))\|\varphi^*\|^0.$$

Если $t > \varepsilon^2$, то

$$|\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)| \leqslant C\|\varphi^*\|^0\left\{\int\limits_0^{\varepsilon^2} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau + \int\limits_{\varepsilon^2}^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau +\right.$$

$$+\int\limits_0^{t-\varepsilon^2}\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau+\int\limits_{t-\varepsilon^2}^{t}\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\,d\tau\bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi^*\|^0\bigg\{\omega(\varepsilon)+\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon}\int\limits_0^t\frac{e^{-\lambda(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon)\bigg\}\leqslant C\|\varphi^*\|^0\bigg\{\omega(\varepsilon)+\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon)\bigg\}.$$

В итоге получаем оценку

$$|\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)|\leqslant C\|\varphi^*\|^0\bigg\{\omega(\varepsilon)+\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon)\bigg\},\quad t\in[0,T].$$

Фиксируя сначала $\varepsilon>0$ так, что $C(\omega(\varepsilon)+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon))<1/4$, а затем выбирая $\lambda=\lambda(\varepsilon)$ так, что

$$C\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}}<\frac{1}{4},$$

получаем окончательно $\|\mathcal{B}_\lambda\|<1/2$. Следовательно, уравнение (31) имеет единственное решение $\varphi^*\in C[0,T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi^*\|^0\leqslant C\|\psi^*\|^1.$$

Возвращаясь к первоначальной функции φ, получаем первое утверждение леммы.

Если, кроме того, правая часть $\psi\in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$, то из вида уравнения (30) делаем вывод, что $\varphi^*\in\underset{0}{C}[0,T]$ и, следовательно, $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Ищем решение u задачи (2) в виде (векторного) параболического потенциала (9) с плотностью $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$, подлежащей определению. Тогда для любой $\varphi\in C[0,T]$ функция u удовлетворяет уравнению и начальному условию из (2). Подставив (9) в граничное условие из (2), для определения неизвестной плотности $\varphi\in C[0,T]$ имеем интегральное уравнение Вольтерры первого рода (10). Из леммы 4 следует, что это уравнение имеет единственное решение $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$ и справедлива оценка (26).

Подставив решение φ уравнения (10) в выражение (9) для $u(x,t)$, получим, что определённая таким образом функция u является решением задачи (2). При этом из теоремы 2 и неравенства (26) следует, что $u\in\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и верна оценка (11). Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
4. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coecients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
5. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 503. № 2. С. 26–29.
6. *Федоров К.Д.* О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1623–1634.

7. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
8. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
9. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Московского гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
11. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
12. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. в ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
13. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-В88.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 24.07.2022 г.
После доработки 24.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.