ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1414–1430

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2022 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Рассмотрены вопросы корректной разрешимости начальных задач для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с ядрами интегральных операторов, представимыми интегралами Стилтьеса. Использованный в работе подход связан с применением теории полугрупп операторов.

DOI: 10.31857/S0374064122100107, EDN: KQURSV

Введение. В работе предлагается метод сведения исходной начальной задачи для абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве к начальной задаче для системы операторно-дифференциальных уравнений первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Возникающий при этом линейный оператор в расширенном гильбертовом пространстве является максимально диссипативным и, следовательно, генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы. Полученные результаты базируются на классических результатах теории полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах, изложенных в монографиях [1] и [2]. Устанавливается связь между классическими решениями начальной задачи для операторно-дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве и начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения.

Упомянутое абстрактное интегро-дифференциальное уравнение может быть реализовано, в частности, как интегро-дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида:

$$u_{tt}(x,t) = \rho^{-1}[\mu\Delta u(x,t) + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,u(x,t))] -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\rho^{-1}\mu[\Delta u(x,\tau) + \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,u(x,\tau))]\,d\tau - \int\limits_{-\infty}^{t} Q(t-\tau)\rho^{-1}\lambda\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,u(x,\tau))\,d\tau + f(x,t),$$

где $t > 0$, $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ρ, постоянная плотность $\rho > 0$, λ, μ – положительные параметры (коэффициенты Ламе) (см. [3, с. 129–130; 4, с. 54]). Предполагается, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле: $u|_{\partial\Omega} = 0$. Функции ядер интегральных операторов $K(t)$, $Q(t)$ – положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды.

К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости и теории распространения тепла.

Результаты настоящей статьи являются развитием и обобщением результатов, полученных в работах [5–8].

1. Определения, обозначения и постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный оператор $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ $(\kappa_0 > 0)$, действующий в пространстве H, I – тождественный оператор в пространстве H. Пусть

B – самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$ такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$, $0<\kappa<1$, для любого $x \in D(A)$.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int\limits_l^t K_1(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_l^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad u(t) = \varphi(t), \quad t \in [l,0], \quad -\infty \leqslant l \leqslant 0, \tag{2}$$

где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1,2$, имеют представление

$$K_i(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau), \quad i = 1,2, \tag{3}$$

где $d\mu_i$ $(i = 1,2)$ – положительная мера, порождаемая неубывающей, непрерывной справа функцией μ_i. Интеграл (3) понимается в смысле Стилтьеса. Будем предполагать, что функции μ_i $(i = 1,2)$ представляют собой суммы абсолютно непрерывных функций и функций скачков (ступенчатых функций), в которых сингулярная компонента отсутствует. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Введём обозначения

$$M_i(t) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau)}{\tau}, \quad t \geqslant 0, \quad i = 1,2. \tag{5}$$

$$A_0 := \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B.$$

Замечание 1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [1, с. 177–179]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в пространстве H, A_0^{-1} – ограниченный оператор.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, вводя на $D(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим* решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H, снабжённые нормами

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|u(s)\|_H^2\,d\mu_k(s)\right)^{1/2}.$$

Эти пространства являются сепарабельными гильбертовыми (см., например, [9, с. 148]).

Сформулируем теоремы из монографии [1], необходимые для доказательства результатов данной работы.

Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(\mathcal{A})$.

Определение 2 (см. [1, с. 38–39, 58]). Задача Коши

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t), \tag{6}$$

$$Z(0) = Z_0 \tag{7}$$

называется *корректной* (*равномерно корректной*), если

1) для любого $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ существует единственное решение задачи (6), (7);

2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: из того, что $Z_n(0) \to 0$ $(Z_n(0) \in D(\mathcal{A}))$ вытекает, что $Z_n(t) \to 0$ при каждом $t \in [0, T]$ (равномерно по t) на любом конечном интервале $[0, T]$.

Замечание 2. Если задача Коши (6), (7) порождает сжимающую полугруппу в пространстве H, то эта задача равномерно корректна.

Теорема 1.1 (см. [1, с. 41]). *Если задача Коши (6), (7) корректна, то её решение даётся формулой* $Z(t) = S(t)Z_0$ $(Z_0 \in D(\mathcal{A}))$, *где* $S(t)$ *– сильно непрерывная при* $t > 0$ *полугруппа операторов.*

Теорема 6.5 (см. [1, с. 166]). *Если задача Коши (6), (7) равномерно корректна, то формула*

$$Z(t) = S(t)Z_0 + \int\limits_0^t S(t-p)F(p)\,dp \tag{8}$$

даёт решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t)$$

с условием

$$Z(0) = Z_0, \tag{9}$$

где $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ *и вектор-функция* $F(t)$ *удовлетворяет одному из условий:*

1) значения функции $F(t) \in D(\mathcal{A})$ *и функция* $\mathcal{A}F(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$;

2) функция $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$.

2. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка. Введём новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t,\tau) = \int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2}\frac{du(s)}{ds}\,ds, \quad t > 0, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2.$$

Тогда задача (1), (2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t,\tau)\,d\mu_k(\tau)\right] = f_1(t), \quad \frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \quad \frac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \tag{10}$$

где $t > 0$, $\tau > 0$,

$$f_1(t) = f(t) - \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau) A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau) B\right)\varphi(l),$$

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0,$$

$$\xi_k(t,\tau)|_{t=0} = \int_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad k = 1, 2. \tag{11}$$

Теперь мы должны, во-первых, “превратить” задачу (10), (11) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором она будет корректной, во-вторых, установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (10), (11) и решением исходной задачи (1), (2).

3. Задача Коши в расширенном гильбертовом пространстве. Определим линейный оператор умножения на независимую переменную в пространстве Ω_k, $k = 1, 2$.

Определение 3 (см. [2, с. 31]). *Оператор умножения* на независимую переменную $\mathbb{T}_k : \Omega_k \to \Omega_k$, $k = 1, 2$, определяется следующим образом:

$$\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau\xi(\tau), \quad \xi(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad \tau > 0, \tag{12}$$

где область определения $D(\mathbb{T}_k)$ имеет вид

$$D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}. \tag{13}$$

Введём операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$, $k = 1, 2$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad k = 1, 2, \quad \tau > 0.$$

Тогда сопряжённые операторы $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$, $k = 1, 2$, имеют вид

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau)\, d\mu_k(\tau), \quad k = 1, 2.$$

Действительно, для любых функций $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\left\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau) \right\rangle_{\Omega_k} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau) \right\rangle_{\Omega_k} = \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau) \right\rangle_H d\mu_k(\tau) =$$

$$= \left\langle v, Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau)\, d\mu_k(\tau) \right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) \rangle_H.$$

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством.*

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \biggl\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},$$

$$\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = 1, 2\biggr\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^{\text{т}} = \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\right], A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau)\right)^{\text{т}}, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде произведения операторных матриц

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

В работе [6] показано, что при выполнении условий (4) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ максимально диссипативен и, следовательно, является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Введём четырёхкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad Z_0 = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}$$

и рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \tag{14}$$

$$Z(0) = Z_0. \tag{15}$$

Определение 4. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$, $t \in [0, +\infty)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (14), (15), если она принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}) \bigcap C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$ при любом $\tau > 0$ и удовлетворяет уравнению (14) и начальному условию (15).

4. Теоремы о корректной разрешимости задачи (14), (15). Предположим, что выполнены следующие

Условия ($\boldsymbol{\mathcal{CS}}$):

$$F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0), \quad f_1(t) = f(t) - (M_1(t - l)A + M_2(t - l)B)\varphi(l),$$

где l – заданное число, $-\infty \leqslant l \leqslant 0$; $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ – заданная вектор-функция; $M_k(\cdot)$, $k = 1, 2$, определяются формулами (5); $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$ – заданные векторы; вектор-функция $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$, где функции $\xi_{0k}(\tau)$, $k = 1, 2$, определяются по формулам

$$\xi_{0k}(\tau) := \int\limits_{l}^{0} \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2;$$

вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in [l, 0]$, $-\infty \leqslant l \leqslant 0$, причём $\varphi(t) \in H_1$, $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in [l, 0]$, $\varphi(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$ и, кроме того, $\lim\limits_{t \to l} [A\varphi(t)] = 0$, $-\infty \leqslant l < 0$.

Теорема 1 (о корректной разрешимости (общий случай)). *Пусть выполнены условия (4), $(\mathcal{CS})$ и любое из условий:*

1) вектор-функция $f_1(t) \in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2} f_1(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$;

2) вектор-функция $f_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$.

Тогда задача (14), (15) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\Bigg\|\int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\Bigg\|_{\Omega_k}^2 +$$

$$+\Bigg(\int\limits_0^t \|f(s) - (M_1(s-l)A + M_2(s-l)B)\varphi(l)\|_H\,ds\Bigg)^2\Bigg], \tag{16}$$

здесь d *– постоянная, не зависящая от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Сформулируем также важные частные случаи теоремы 1.

Теорема 2 (о корректной разрешимости (частный случай $l = 0$)). *Пусть выполнено условие (4), данные задачи (14), (15) удовлетворяют условиям*

$$F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0), \quad f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0,$$

где $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ *– заданная вектор-функция,* $M_k(\cdot)$, $k = 1, 2$, *определяются формулами (5),* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$ *– заданные векторы, вектор-функция* $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, 0, 0) \in D(\mathbb{A})$, *и выполнено любое из следующих условий:*

1) вектор-функция $f(t) \in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $\varphi_0 \in H_{3/2}$;

2) вектор-функция $f_1(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$.

Тогда задача (14), (15) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* $l = 0$, $f(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \Bigg(\int\limits_0^t \|f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0\|_H\,ds\Bigg)^2\Bigg],$$

d *– постоянная, не зависящая от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 3 (о корректной разрешимости (частный случай $-\infty \leqslant l < 0$)). *Пусть выполнено условие (4), данные задачи (14), (15) удовлетворяют условиям:* $F(t) := (f(t), 0, 0, 0)$, *где* $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ *– заданная вектор-функция,* $M_k(\cdot)$, $k = 1, 2$, *определяются формулами (5),* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$ *– заданные векторы, вектор-функция*

$$Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A}), \tag{17}$$

где функции $\xi_{0k}(\tau)$, $k=1,2$, *определены формулами*

$$\xi_{0k}(\tau) := \int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad \tau>0, \quad k=1,2,$$

вектор-функция $\varphi(t)$ *задана при* $t\in(l,0]$, *причём* $\varphi(t)\in H_1$, $\varphi'(t)\in H_1$ *при* $t\in(l,0]$, $\varphi(t)\in$ $\in C((l,0],H_1)$, $\varphi^{(1)}(t)\in C((l,0],H_1)$, $\varphi(0)=\varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0)=\varphi_1$, *кроме того*, $\lim\limits_{t\to l}[A\varphi(t)]=0$, $-\infty\leqslant l<0$.

Пусть также выполнено любое из следующих условий:

1) вектор-функция $f(t)\in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2}f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$;

2) вектор-функция $f(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$.

Тогда задача (14), (15) имеет единственное классическое решение

$$Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t):=u'(t)$, $\xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* l, $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива оценка*

$$E(t):=\frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2+\|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$

$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2+\|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2+\sum_{k=1}^2\Bigg\|\int\limits_l^0\frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\Bigg\|_{\Omega_k}^2+\bigg(\int\limits_0^t\|f(s)\|_H\,ds\bigg)^2\Bigg],$$

d *– постоянная, не зависящая от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Замечание 2 (достаточные условия корректной разрешимости при $l=-\infty$). Пусть выполнены условия

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau^p}<\infty, \quad k=1,2, \quad p=0,1,2, \tag{18}$$

$$\int\limits_{-\infty}^0\bigg\|A\frac{d\varphi(s)}{ds}\bigg\|^2 ds<\infty. \tag{19}$$

Тогда справедливо условие (17). В частности, если меры $d\mu_k$, $k=1,2$, имеют компактный носитель, принадлежащий отрезку $[d_0,d_1]$, где $d_0>0$, $d_1<+\infty$, то условия (18) выполнены.

5. Доказательство теоремы 1 о корректной разрешимости задачи (14), (15). Задача (14), (15) является равномерно корректной, поскольку полугруппа $S(t)=e^{t\mathbb{A}}$, $t>0$, – сжимающая (см. [6]). Из условий теоремы 1 следует выполнение условий теоремы 1.1 из монографии [1] для задачи (14), (15). Таким образом, для задачи (14), (15) справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}\leqslant d\bigg(\|Z_0\|_{\mathbb{H}}+\int\limits_0^t\|F(s)\|_{\mathbb{H}}\,ds\bigg), \tag{20}$$

где d – постоянная, не зависящая от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1. Оценка (20) следует из формулы (8), применённой к задаче (14), (15), в обозначениях теоремы 1.

Покажем, что $v(t):=u'(t)$, $\xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t)$, где $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2).

Задача Коши (14), (15), записанная покоординатно, имеет вид (10), (11). Рассмотрим последние два уравнения системы (10). Применим к этим уравнениям метод вариации произвольных постоянных. Соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi_k(t,\tau)}{dt} = -\mathbb{T}_k\xi_k(t,\tau), \quad t>0.$$

Следовательно, по определению операторов $\mathbb{T}_k\xi(\tau)=\tau\xi(\tau)$, $\tau>0$, $k=1,2$, где $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi\in\Omega_k : \tau\xi\in\Omega_k\}$ (см. (12), (13)), общие решения однородных уравнений могут быть записаны в виде $\xi_k^O(t,\tau)=e^{-t\mathbb{T}_k}C_k(\tau)=e^{-t\tau}C_k(\tau)$, где $\tau>0$, $C_k(\tau)\in\Omega_k$, $k=1,2$, – произвольные векторы.

Применив формулу (8) для решения неоднородных уравнений при заданных начальных условиях

$$\xi_k(t,\tau)|_{t=0} = \int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds, \quad \tau>0, \quad k=1,2,$$

и положив $v(t)=\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi(0)=\varphi_0$ при $t\in(l,0]$, получим

$$\xi_k(t,\tau) = \int\limits_l^t e^{-(t-s)\mathbb{T}_k}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds = \int\limits_l^t e^{-(t-s)\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds.$$

Из первого уравнения системы, согласно области определения оператора $\mathbb{A}$, имеем

$$\xi_0(t) + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)\,d\mu_k(\tau)\in D(A_0^{1/2}). \tag{21}$$

Из второго уравнения системы получаем, что

$$\xi_0(t) = \int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi(l).$$

Подставив найденные выражения для функций ξ_k в (21), имеем

$$\int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi(l) + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\int\limits_l^t e^{-(t-s)\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\mu_k(\tau) =$$

$$= \int\limits_l^t\left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi(l)\in D(A_0^{1/2}).$$

По условиям теоремы 1 $A\varphi(t)$, $B\varphi(t)$ ограничены при $t\to l$ при фиксированном значении параметра l, $-\infty\leqslant l\leqslant 0$, следовательно, $\varphi(l)\in H_1$, откуда получаем

$$\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds\in D(A_0^{1/2}).$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$-A_0^{1/2}\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2} + \sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds =$$

$$= -A_0 \int\limits_l^t A_0^{-1/2}\Bigl[I + \sum_{k=1}^{2}\Bigl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\Bigr)Q_k^*Q_k\Bigr]A_0^{1/2}v(s)\,ds, \quad t>0. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\int\limits_l^t A_0^{-1/2}\Bigl[I + \sum_{k=1}^{2}\Bigl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\Bigr)Q_k^*Q_k\Bigr]A_0^{1/2}v(s)\,ds \in D(A_0). \tag{23}$$

Введём обозначение

$$R(t) := A_0^{-1/2}\Bigl[\sum_{k=1}^{2}\Bigl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\Bigr)Q_k^*Q_k\Bigr]A_0^{1/2}, \quad t>0,$$

тогда вектор-функцию (23) можно записать в виде

$$\int\limits_l^t v(s)\,ds + \int\limits_l^t R(t-s)v(s)\,ds = y(t) \in D(A_0). \tag{24}$$

После интегрирования по частям в (24) получаем следующее интегральное уравнение:

$$(I+R(0))\int\limits_l^t v(s)\,ds + \int\limits_l^t R'(t-s)\Bigl(\int\limits_l^s v(s)\,ds\Bigr)ds = y(t), \quad y(t)\in C(\mathbb{R}_+;H_1), \tag{25}$$

где

$$R'(t) = -A_0^{-1/2}\sum_{k=1}^{2}\Bigl(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_k(\tau)\Bigr)Q_k^*Q_kA_0^{1/2} =$$

$$= -\Bigl(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau)\Bigr)A_0^{-1}A - \Bigl(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau)\Bigr)A_0^{-1}B,$$

$$R(0) = A_0^{-1/2}\Bigl[\sum_{k=1}^{2}\Bigl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}\Bigr)Q_k^*Q_k\Bigr]A_0^{1/2} = \Bigl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\Bigr)A_0^{-1}A + \Bigl(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\Bigr)A_0^{-1}B.$$

Уравнение (25) можно записать в виде

$$(I+R(0))\int\limits_0^t v(s)\,ds + \int\limits_0^t R'(t-s)\Bigl(\int\limits_0^s v(p)\,dp\Bigr)ds = y(t) - \Phi(t), \tag{26}$$

где

$$\Phi(t) := (I+R(0))(\varphi(0)-\varphi(l)) + \int\limits_l^0 R'(t-s)(\varphi(s)-\varphi(l))\,ds + \int\limits_0^t R'(t-s)(\varphi(0)-\varphi(l))\,ds,$$

$\Phi(t)\in D(A_0)$, так как заданная вектор-функция $A_0\varphi(t)\in C([l,0],H)$ по условию теоремы.

Введём вектор-функцию $w(t) := \int_0^t v(s)\,ds$, тогда уравнение (26) можно записать в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$(I+R(0))w(t)+\int\limits_0^t R'(t-s)w(s)\,ds = y(t)-\Phi(t). \tag{27}$$

Покажем, что $R'(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{B}(H_1))$. Действительно, для любого $z\in H_1$ справедлива оценка

$$\|R'(t)z\|_{H_1}=\left\|\left[\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau)\right)A+\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau)\right)B\right]A_0^{-1}(A_0z)\right\|_H\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau)\right)AA_0^{-1}+\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau)\right)BA_0^{-1}\right\|_H\|z\|_{H_1}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau)\right)\|AA_0^{-1}\|_H+\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau)\right)\|BA_0^{-1}\|_H\right]\|z\|_{H_1}.$$

Таким образом, $R'(t)\in\mathcal{B}(H_1)$. Кроме того, для любых $t_1,t_2>0$ выполняется неравенство

$$\|R'(t_1)-R'(t_2)\|_{H_1}\leqslant\left(\int\limits_0^{+\infty}(e^{-t_1\tau}-e^{-t_2\tau})\,d\mu_1(\tau)\right)\|AA_0^{-1}\|_H+\left(\int\limits_0^{+\infty}(e^{-t_1\tau}-e^{-t_2\tau})\,d\mu_2(\tau)\right)\|BA_0^{-1}\|_H.$$

Следовательно, $R'(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{B}(H_1))$. Из (27) получаем

$$w(t)=(I+R(0))^{-1}\left(y(t)-\Phi(t)-\int\limits_0^t R'(t-s)w(s)\,ds\right)=:Lw(t),$$

где оператор $L: C(\mathbb{R}_+,H_1)\to C(\mathbb{R}_+,H_1)$. Покажем, что $\|L\|_{C(\mathbb{R}_+;\mathcal{B}(H_1))}<+\infty$.

Утверждение. *Для любых функций* $w_1(t),w_2(t)\in H_1$ *и для любого* $T>0$ *при* $t\in[0,T]$ *имеет место оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\|_{H_1}\leqslant\kappa\sup_{t\in[0,T]}\|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa=\|(M_1(0)A+M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H<+\infty$, *функции* $M_k(t)$, $k=1,2$, *определены формулами (5).*

Действительно, для любых $w_1(t),w_2(t)\in H_1$ при $t>0$ имеем

$$\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\|_{H_1}=\left\|(I+R(0))^{-1}\int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds\right\|_{H_1}. \tag{28}$$

Далее, для любого $z\in H_1$ имеем

$$\|(I+R(0))^{-1}z\|_{H_1}=\|A_0(I+R(0))^{-1}A_0^{-1}(A_0z)\|_H=\|(A_0(I+R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0z)\|_H.$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0, что $A_0(I+R(0))A_0^{-1}=(A+B)A_0^{-1}$. Таким образом,

$$\|(A_0(I+R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0z)\|_H=\|A_0(A+B)^{-1}(A_0z)\|_H. \tag{29}$$

Подставляя в формулу (29) $z = \int_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds$, учитывая представление (28) для любого $T>0$, получаем

$$\sup_{t\in[0,T]}\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\|_{H_1} = \sup_{t\in[0,T]}\left\|A_0(A+B)^{-1}A_0\int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds\right\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \left\|A_0(A+B)^{-1}A_0\int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\,ds\right\|_H \sup_{t\in[0,T]}\|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1}. \tag{30}$$

Можно установить оценку

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|A_0(A+B)^{-1}A_0\int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\,ds\right\|_H =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]}\|A_0(A+B)^{-1}A_0(R(t)-R(0))A_0^{-1}\|_H \leqslant \|A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\|_H. \tag{31}$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0, что

$$\|A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\|_H = \|(M_1(0)A+M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H < +\infty. \tag{32}$$

Действительно, справедлива цепочка равенств

$$A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1} = A_0(A+B)^{-1}A_0(M_1(0)A_0^{-1}A+M_2(0)A_0^{-1}B)A_0^{-1} =$$

$$= A_0(A+B)^{-1}(M_1(0)A+M_2(0)B)A_0^{-1} = A_0(A+B)^{-1}(A+B-A_0)A_0^{-1} =$$

$$= A_0(A+B)^{-1}((A+B)A_0^{-1}-I) = I - A_0(A+B)^{-1} =$$

$$= I-(A+B-M_1(0)A-M_2(0)B)(A+B)^{-1} = (M_1(0)A+M_2(0)B)(A+B)^{-1}.$$

Из установленных оценок (30)–(32) следует, что

$$\sup_{t\in[0,T]}\|Lw_1(t)-Lw_2(t)\|_{H_1} \leqslant \|(M_1(0)A+M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H \sup_{t\in[0,T]}\|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1} =$$

$$= \kappa \sup_{t\in[0,T]}\|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa = \|(M_1(0)A+M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H < +\infty$. Отсюда для любого $n\in\mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]}\|L^nw_1(t)-L^nw_2(t)\|_{H_1} \leqslant \frac{\kappa^nT^n}{n!}\sup_{t\in[0,T]}\|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1}.$$

Таким образом, значение n можно выбрать настолько большим, что $\kappa^nT^n/n! < 1$. Следовательно, $\|L^n\|_{C([0,T];\mathcal{B}(H_1))} < 1$, т.е. отображение $L^n : C([0,T],H_1)\to C([0,T],H_1)$ является сжимающим, и уравнение (27) имеет единственное решение $w(t)\in C([0,T],H_1)$. В силу произвольности $T>0$ отсюда получаем, что решение $w(t)\in C([0,+\infty),H_1)$. Тогда

$$\int\limits_l^t v(s)\,ds = \int\limits_l^0 v(s)\,ds + \int\limits_0^t v(s)\,ds = \int\limits_l^0 \varphi'(s)\,ds + w(t) = \varphi(0)-\varphi(l)+w(t) \in C([0,+\infty),H_1).$$

Вернёмся к первому уравнению системы (10) и воспользуемся тем, что

$$\int\limits_l^t v(s)\,ds \in C([0,+\infty),H_1).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$-A_0^{1/2}\biggl[\xi_0(t)+\sum_{k=1}^{2}Q_k^*\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_k(t,\tau)\,d\tau\biggr]+f(t)-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\biggr)\varphi(l)=$$

$$=-A_0^{1/2}\biggl[\int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi(l)+\sum_{k=1}^{2}Q_k^*\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\mu_k(\tau)\biggr]+$$

$$+f(t)-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\biggr)\varphi(l)=$$

$$=-\biggl[\int\limits_l^t A_0v(s)\,ds+A_0\varphi(l)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Av(s)\,ds\,d\mu_1(\tau)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Bv(s)\,ds\,d\mu_2(\tau)\biggr]+$$

$$+f(t)-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\biggr)\varphi(l). \qquad (33)$$

С помощью замены переменной $v(t):=u'(t)$, $u(t)=\varphi(t)$, $t\in[l,0]$, $u(+0)=\varphi_0$, $\varphi(0)=\varphi_0$ в выражении (33) и формулы интегрирования по частям получим

$$-\biggl[\int\limits_l^t A_0u'(s)\,ds+A_0\varphi(l)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Au'(s)\,ds\,d\mu_1(\tau)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Bu'(s)\,ds\,d\mu_2(\tau)\biggr]+$$

$$+f(t)-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\biggr)\varphi(l)=$$

$$=-\biggl[A_0u(t)+\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)Au'(s)\,ds+\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu'(s)\,ds\biggr]+$$

$$+f(t)-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\biggr)\varphi(l)=$$

$$=-A_0u(t)-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\biggr)Au(s)\bigg|_l^t\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds-$$

$$-\biggl(\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\biggr)Bu(s)\bigg|_l^t+\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds+$$

$$+ f(t) - \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l) =$$

$$= -A_0u(t) - \Big(\int_0^\infty \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\Big)Au(t) + \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\Big)Au(l) +$$

$$+ \int_l^t\int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds - \Big(\int_0^\infty \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\Big)Bu(t) +$$

$$+ \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\Big)Bu(l) + \int_l^t\int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds +$$

$$+ f(t) - \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l) =$$

$$= -A_0u(t) - \Big(\int_0^\infty \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\Big)Au(t) + \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\Big)A\varphi(l) +$$

$$+ \int_l^t\int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds - \Big(\int_0^\infty \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\Big)Bu(t) + \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\Big)B\varphi(l) +$$

$$+ \int_l^t\int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds + f(t) - \Big(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A + \int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l) =$$

$$= -(A+B)u(t) + \int_l^t K_1(t-s)Au(s)\,ds + \int_l^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds + f(t).$$

Таким образом, полученное уравнение совпадает с интегро-дифференциальным уравнением (1) с начальными условиями (2). Следовательно, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2). Более того, выполнение условий теоремы 1 обеспечивает выполнение условий теоремы 6.5 из работы [1, с. 166], и тогда оценка (16) следует из оценки (20). Теорема 1 доказана.

Доказательства теорем 2, 3 повторяют доказательство теоремы 1 при $l=0$ и $-\infty \leqslant l < 0$ соответственно.

Доказательство замечания 2. Условие (17) равносильно выполнению условий

$$A_0^{1/2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\Big(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\Big)\,d\mu_k(\tau) \in D(A_0^{1/2}),$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds \in \Omega_k, \quad \int_{-\infty}^0 \sqrt{\tau}e^{s\tau}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds \in \Omega_k, \quad k=1,2.$$

По условию теоремы 3 $\varphi_0 \in H_1$ и $\varphi^{(1)}(t) \in C((-\infty,0],H_1)$. Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получаем оценки

$$\Big\|A_0^{1/2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1^*\Big(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\Big)\,d\mu_1(\tau)\Big\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^0 e^{s\tau} \left\| A_0^{1/2} Q_1^* Q_1 A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H ds \right) \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{-\infty}^0 e^{2s\tau}\, ds \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^0 \left\| A \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \leqslant C_1 \int\limits_0^\infty \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau^{3/2}} \left(\int\limits_{-\infty}^0 \left\| A \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2},$$

поскольку $A_0^{1/2} Q_1^* Q_1 A_0^{1/2} = A$. Аналогично рассматриваем случай $k = 2$. Справедливы следующие оценки:

$$\int\limits_0^\infty \left\| \int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \right\|_H^2 d\mu_k(\tau) \leqslant C_2 \int\limits_0^\infty \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau^2} \left(\int\limits_{-\infty}^0 \left\| A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2},$$

$$\int\limits_0^\infty \left\| \int\limits_{-\infty}^0 \sqrt{\tau} e^{s\tau} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \right\|_H^2 d\mu_k(\tau) \leqslant C_3 \int\limits_0^\infty d\mu_k(\tau) \left(\int\limits_{-\infty}^0 \left\| A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_H^2 ds \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2,$$

где $C_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ – некоторые константы. Таким образом, условия (18), (19) являются достаточными для выполнения условия (17).

6. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим функции

$$\mu_1(\tau) = \left(\sum_{k=0}^{j-1} a_k \right) \chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau),$$

$$\mu_2(\tau) = \left(\sum_{k=0}^{j-1} b_k \right) \chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau), \quad \tau \in [\beta_{j-1}, \beta_j), \quad j = \overline{1, N} \ \ (\text{или} \ \ j \in \mathbb{N}),$$

где $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $\chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau)$ – характеристические функции интервалов $[\beta_{j-1}, \beta_j)$, $0 \leqslant \beta_{j-1} < \beta_j$, $\beta_0 = 0$.

Тогда ядра интегральных операторов имеют представления

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^N a_j e^{-\beta_j t}, \quad K_2(t) = \sum_{j=1}^N b_j e^{-\beta_j t}$$

и условия (4) принимают вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

$$M_1(t) = \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t}, \quad M_2(t) = \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t},$$

$$\|\xi\|_{\Omega_1} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|\xi(s)\|_H^2\, d\mu_1(s) \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^N a_n \|\xi_n\|_H^2 \right)^{1/2},$$

$$\|\xi\|_{\Omega_2} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|\xi(s)\|_H^2\, d\mu_2(s) \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^N b_n \|\xi_n\|_H^2 \right)^{1/2},$$

где $\xi_n = \xi(\beta_n) \in H$, $n \in \{1, \ldots, N\}$.

В этом случае задача (14), (15) может быть записана следующим образом:

$$\frac{dv(t)}{dt}+A_0^{1/2}\bigg[\xi_0(t)+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\sqrt{\beta_j}}Q_1^*\xi_{1j}(t)+\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\sqrt{\beta_j}}Q_2^*\xi_{2j}(t)\bigg]=f_1(t),\quad \frac{d\xi_0(t)}{dt}=A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_{1j}(t)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\beta_j}}Q_1A_0^{1/2}v(t)-\beta_j\xi_{1j}(t,\tau),\quad \frac{d\xi_{2j}(t)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\beta_j}}Q_2A_0^{1/2}v(t)-\beta_j\xi_{2j}(t,\tau),\quad j=\overline{1,N},$$

$$v(t)|_{t=0}=\varphi_1,\quad \xi_0(t)|_{t=0}=A_0^{1/2}\varphi_0,\quad \xi_{kj}(t)|_{t=0}=\int\limits_l^0\frac{e^{\beta_j s}}{\sqrt{\beta_j}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds,\quad k=1,2,\quad j=\overline{1,N},$$

$$f_1(t)=f(t)-\bigg(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\beta_j}e^{-\beta_j(t-l)}A+\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\beta_j}e^{-\beta_j(t-l)}B\bigg)\varphi(l).$$

Оценка (16) в этом случае имеет вид

$$E(t):=\frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2+\|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$

$$\leqslant d\bigg[\|\varphi_1\|_H^2+\|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2+\sum_{k=1}^{2}\bigg\|\int\limits_l^0\frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\bigg\|_{\Omega_k}^2+$$

$$+\bigg(\int\limits_0^t\bigg\|f(s)-\sum_{j=1}^{N}\frac{e^{-\beta_j(s-l)}}{\beta_j}(a_jA+b_jB)\varphi(l)\bigg\|_H ds\bigg)^2\bigg].$$

Пример 2. Рассмотрим функции

$$K_1(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\,\mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t),\quad K_2(t)=\sum_{j=1}^{N}b_j\,\mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t),$$

где $0<\alpha<1$, $a_j>0$, $b_j\geqslant 0$, $0\leqslant\beta_{j-1}<\beta_j$, $j=\overline{1,N}$, $\beta_0=0$,

$$\mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t):=t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]},\quad j=\overline{1,N},$$

– функции Работнова (см. [10, с. 36]), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Функции Работнова имеют следующие интегральные представления (см. [10, с. 29]):

$$\mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}\,d\tau}{\tau^{\alpha}+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha}},\quad 0<\alpha<1,\quad j=\overline{1,N}.$$

Тогда

$$d\mu_1(\tau)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\bigg(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\tau^{\alpha}+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha}}\bigg)d\tau,$$

$$d\mu_2(\tau)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\bigg(\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\tau^{\alpha}+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha}}\bigg)d\tau,$$

$$M_1(t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau)}{\tau}=\sum_{j=1}^N a_j\int\limits_t^{+\infty}Э_{\alpha-1}(-\beta_j,s)\,ds,$$

$$M_2(t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau)}{\tau}=\sum_{j=1}^N b_j\int\limits_t^{+\infty}Э_{\alpha-1}(-\beta_j,s)\,ds.$$

Условия (4) принимают вид

$$\sum_{j=1}^N\frac{a_j}{\beta_j}<1,\quad \sum_{j=1}^N\frac{b_j}{\beta_j}<1.$$

В этом случае задача (14), (15) имеет представление

$$\frac{dv(t)}{dt}+A_0^{1/2}\bigg[\xi_0(t)+\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{j=1}^N\int\limits_0^{+\infty}\frac{(a_jQ_1^*\xi_1(t,\tau)+b_jQ_2^*\xi_2(t,\tau))\,d\tau}{\sqrt{\tau}(\tau^\alpha+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha})}\bigg]=f_1(t),\quad t>0,$$

$$\frac{d\xi_0(t)}{dt}=A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_1(t,\tau)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t)-\tau\xi_1(t,\tau),\quad \frac{d\xi_2(t,\tau)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t)-\tau\xi_2(t,\tau),\quad \tau>0,$$

$$v(t)|_{t=0}=\varphi_1,\quad \xi_0(t)|_{t=0}=A_0^{1/2}\varphi_0,\quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0}=\int\limits_l^0\frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds,\quad k=1,2,$$

$$f_1(t)=f(t)-\sum_{j=1}^N\bigg(\bigg(\int\limits_{t-l}^{+\infty}Э_{\alpha-1}(-\beta_j,s)\,ds\bigg)(a_jA+b_jB)\varphi(l)\bigg).$$

Оценка (16) принимает вид

$$E(t):=\frac12(\|u'(t)\|_H^2+\|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2)\leqslant\frac12\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$

$$\leqslant d\bigg[\|\varphi_1\|_H^2+\|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2+\sum_{k=1}^2\bigg\|\int\limits_l^0\frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\bigg\|_{\Omega_k}^2+$$

$$+\bigg(\int\limits_0^t\bigg\|f(s)-\sum_{j=1}^N\bigg(\int\limits_{s-l}^{+\infty}Э_{\alpha-1}(-\beta_j,\tau)\,d\tau\bigg)(a_jA+b_jB)\varphi(l)\bigg\|_H ds\bigg)^2\bigg].$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
2. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
4. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 536–551.
7. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.
8. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
9. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961.
10. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.
После доработки 01.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.