КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ

© 2022 г. В. В. Козлов

Доказана теорема о неустойчивости равновесия в автономной системе дифференциальных уравнений с интегральным инвариантом: если в некоторой окрестности B равновесия определена функция V с неотрицательной производной $\dot V$ в силу системы, причём $\dot V > 0$ в некоторых точках B, сколь угодно близких к состоянию равновесия, то это равновесие неустойчиво. В отличие от классических теорем Ляпунова–Четаева–Красовского здесь не накладывается никаких ограничений на свойства самой функции V в окрестности положения равновесия.

DOI: 10.31857/S0374064122100119, EDN: KQYOBT

Введение. Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot x_i = v_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

допускающая интегральный инвариант

$$\int \rho(x)\, d^n x, \quad \rho > 0.$$

Как известно, плотность удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Пусть $x = 0$ – положение равновесия: $v(0) = 0$. Необходимое условие существования интегрального инварианта сводится к равенству

$$\operatorname{div} v|_{x=0} = 0.$$

Наша цель – указать новые условия неустойчивости равновесия $x = 0$. Положим

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\},$$

где ε – некоторое положительное число.

Дифференциальные уравнения (1) могут не определять динамическую систему в пространстве $\mathbb{R}^n$ из-за возможности ухода её решений в бесконечность за конечное время. Чтобы этого избежать, введём гладкую положительную функцию $\rho_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая тождественно равна единице в шаре B и достаточно быстро убывает на бесконечности. Замена времени по формуле

$$d\tau = \frac{1}{\rho_1}\, dt$$

не меняет систему в области B и сохраняет фазовые траектории (и направление движения по ним). При подходящем выборе функции ρ_1 решения новой системы дифференциальных уравнений определены при всех $\tau \in \mathbb{R}$. Кроме того, новая система допускает интегральный инвариант с плотностью ρ/ρ_1.

Напомним обобщённую теорему Красовского [1, с. 84; 2, с. 31] об условиях неустойчивости равновесия $x = 0$ системы (1): если найдётся открытая область Ω $(0 \in \partial\Omega)$ и функция $V \colon B \to \mathbb{R}$, $V(0) = 0$ такие, что выполняются условия

1) $V(x) > 0$ в Ω,

2) $V(x) \equiv 0$ при всех $x \in \partial\Omega \bigcap B$,

3) $\dot V(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \Omega \bigcap B$,

4) множество $\{x \in B : \dot V(x) = 0\} \bigcap \Omega$ не содержит целых полутраекторий $\{x(t),\ \ t \geqslant 0\}$ системы,

то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

В первоначальной формулировке этой теоремы предполагалось, что условие 3) выполнено при всех $x \in B$ (см. [1, с. 84]). Область Ω, очевидно, инвариантна относительно фазового потока системы (1) (согласно условиям 1) и 2)). Собственно, область Ω определяется заданием функции V. Формулировка четвёртого условия несколько отличается от соответствующей формулировки в работах [1, с. 84; 2, с. 31].

Пусть теперь Ω – проколотая окрестность точки $x = 0$. Более точно, пусть гладкая функция V определена в шаре B и удовлетворяет условиям 1) и 3) теоремы Красовского. Если система (1) допускает интегральный инвариант, то V – первый интеграл этой системы. Для доказательства рассмотрим замкнутую область $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leqslant c\}$, где c – малое положительное число. Так как $V(0) = 0$, то (по условию 1)) V – гладкая непостоянная функция. По теореме Сарда почти все значения этой функции являются регулярными. В частности, для почти всех c граница M_c представляет собой гладкое замкнутое регулярное многообразие. По теореме Гаусса поток векторного поля ρv через границу M_c равен

$$\int\limits_{M_c} \operatorname{div}(\rho v)\, d^n x = 0. \tag{2}$$

Так как $\rho > 0$, то (по условию 3)) векторное поле ρv либо касается ∂M_c, либо направлено наружу от границы M_c. С учётом (2) поле ρv тогда должно касаться ∂M_c. Так как множество регулярных значений $\{c\}$ функции V всюду плотно, то по непрерывности V будет первым интегралом.

В частности, функция V будет функцией Ляпунова и, следовательно, равновесие $x = 0$ устойчиво. Таким образом, в самом простом случае (когда область Ω совпадает с $B \setminus \{0\}$) теорема Красовского не применима к системам с интегральным инвариантом.

Если условие 3) теоремы Красовского заменить более сильным условием $\dot V > 0$ в $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ (тогда условие 4) будет лишним), то система (1) будет иметь асимптотическую траекторию, которая выходит из положения равновесия [1, с. 77]. Следует иметь ввиду, что неустойчивость положения равновесия ещё не означает наличие асимптотически выходящих траекторий. В работе [3] указаны контрпримеры для размерности фазового пространства $n \geqslant 3$ (при $n = 2$ всегда имеется асимптотическая траектория, выходящая из неустойчивого изолированного равновесия [4, с. 78]). В статье [5] установлено, что аналитическая система дифференциальных уравнений в трёхмерном фазовом пространстве с изолированной особой точкой всегда имеет хотя бы одну асимптотическую траекторию (входящую или выходящую). Частичное распространение этого результата на случай нечётного $n \geqslant 5$ показано в работах [3, 6].

1. Теорема о неустойчивости. Для систем с инвариантной мерой можно указать иные условия неустойчивости состояний равновесия.

Теорема. *Если найдётся гладкая функция $V\colon B \to \mathbb{R}$ такая, что:*

1) $\dot V(x) \geqslant 0$ при всех $x \in B$,

2) $\dot V(\xi) > 0$ при некоторых ξ из сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$,

то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Главное отличие от классических теорем Ляпунова–Четаева–Красовского о неустойчивости состоит в том, что здесь не накладывается никаких ограничений на свойства самой функции V в окрестности положения равновесия. Кроме того, не предполагается выполненным условие 4) теоремы Красовского.

Следствие. *Если найдётся аналитическая функция $V\colon B \to \mathbb{R}$ такая, что $\dot V \geqslant 0$ и $\dot V \not\equiv 0$, то равновесие неустойчиво.*

Доказательство теоремы. По приведённым во введении данным можно считать, что фазовый поток системы (1) определён при всех $t \in \mathbb{R}$. По теореме Э. Хопфа решения с почти всеми начальными данными либо уходят на бесконечность, либо бесконечно много раз сколь угодно близко подходят к своей начальной точке, причём это свойство имеет место как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. В первом случае теорема доказана: решение с почти каждым начальным условием $x(0) = \xi$ покинет область B. Рассмотрим второй случай, когда $\dot V(\xi) > 0$ и решение с начальным условием ξ не покидает область B. Воспользуемся равенством

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int\limits_0^t \dot V(x(t))\,dt \geqslant 0.$$

С другой стороны, при приближении $x(t)$ к точке ξ, где $\dot V(\xi) > 0$, интеграл справа заведомо увеличивается всегда на малую, но на одну и ту же положительную константу. Это легко выводится из теоремы о выпрямлении фазовых траекторий в окрестности неособой точки $x = \xi$ (рисунок).

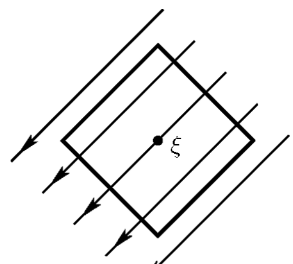

Рисунок. Фазовые траектории в окрестности неособой точки ξ.

Следовательно, $V(x(t)) \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$, откуда вытекает, что решение с почти каждым начальным данным ξ за конечное время покинет область B. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть все решения системы (1) определены на всей оси времени $\mathbb{R} = \{t\}$ и найдётся гладкая функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\dot V(x) \geqslant 0$. Тогда решения системы (1) с почти всеми начальными данными из области $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot V(x) > 0\}$ уходят на бесконечность при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

Из этого утверждения с учётом замечаний из введения вытекает сформулированная выше теорема.

Замечание 2. Предположим, что система (1) допускает непостоянный интеграл $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (как, например, в гамильтоновых системах). Пусть $f(0) = 0$ и f может принимать значения разных знаков в сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$. Если найдётся функция $V\colon B \to \mathbb{R}$ такая, что:

1) $\dot V(x) \geqslant 0$ в области $\Omega = B \bigcap \{f(x) > 0\}$,

2) $\dot V(\xi) > 0$ для некоторых сколь угодно малых ξ из области Ω,

то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Это утверждение доказывается точно так же, как и теорема с учётом инвариантности области $\{f(x) > 0\}$. Конечно, в условии 1) в качестве инвариантной можно взять область $\{f(x) < 0\}$.

Замечание 3. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы Красовского и $\dot V(x) > 0$ в некоторых точках $\Omega \bigcap B$, сколь угодно близких к началу координат. Тогда $x = 0$ – неустойчивое равновесие.

Доказательство неустойчивости основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы, и использует инвариантность области Ω.

2. Примеры.

2.1. Рассмотрим динамику частицы на плоскости в соленоидальном силовом поле. Её уравнения движения имеют следующий вид:

$$\ddot x_1 = \frac{\partial W}{\partial x_2}, \quad \ddot x_2 = -\frac{\partial W}{\partial x_1}.$$

Фазовый поток сохраняет стандартную форму объёма в четырёхмерном фазовом пространстве $\{x, \dot x\}$. Пусть W – ненулевой однородный многочлен по x_1 и x_2 степени $n \geqslant 2$. Тогда (по формуле Эйлера)

$$(\dot x_1 x_2 - x_1 \dot x_2)^{\cdot} = nW.$$

Если $W \geqslant 0$ (или $W \leqslant 0$), то (по доказанной теореме) положение равновесия $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво.

2.2. Рассмотрим вопрос об устойчивости изолированных положений равновесия следующей бездивергентной системы в трёхмерном евклидовом пространстве:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_3^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 x_3^2, \quad \dot{x}_3 = -\frac{2x_3^3}{3}. \tag{3}$$

Положим $V = x_1^2 + x_2^2$. Тогда

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)x_3^2.$$

Очевидно, что $\dot{V} \geqslant 0$ и $\dot{V} > 0$ в некоторых точках, сколь угодно близких к началу координат. Следовательно, по сформулированной выше теореме равновесие $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ неустойчиво. Более того, почти все решения системы (3) уходят в бесконечность.

Стоит отметить, что вся плоскость $\{x_3 = 0\}$ заполнена периодическими траекториями (следовательно, условие 4) теоремы Красовского не выполняется). Кроме того, хотя равновесие неустойчиво, нет решений, асимптотически выходящих из него [3], но есть две входящие в равновесие асимптотические траектории (как и полагается по теореме Брунеллы [5]).

2.3. Рассмотрим ещё задачу об устойчивости тривиального равновесия следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = y_1 + x_1\rho_1\rho_2, \quad \dot{y}_1 = -x_1 + y_1\rho_1\rho_2, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_2\rho_1\rho_2, \quad \dot{y}_2 = -x_2 - y_2\rho_1\rho_2, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\rho_k = x_k^2 + y_k^2$ $(k = 1, 2)$. Эта система также является бездивергентной и допускает первый интеграл

$$f = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

Однако эта функция не является положительно определённой в окрестности начала координат, и поэтому её нельзя принять за функцию Ляпунова.

Положим $V = x_1^2 + y_1^2$. Тогда

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + y_1^2)^2(x_2^2 + y_2^2).$$

Следовательно (по доказанной теореме), равновесие $x = y = 0$ неустойчиво.

Стоит отметить инвариантность двумерных плоскостей $\{x_1 = y_1 = 0\}$ и $\{x_2 = y_2 = 0\}$ – они сплошь заполнены периодическими траекториями. Как показано в [3], система (4) вообще не допускает асимптотических траекторий (как входящих, так и выходящих из особой точки).

2.4. Наконец, рассмотрим градиентную динамическую систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

с гармонической функцией φ $(\Delta\varphi = 0)$. Покажем, что если $\varphi \neq \mathrm{const}$, то почти все её траектории выходят на бесконечность (как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$).

Действительно, фазовый поток системы (5) сохраняет стандартную меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n = \{x\}$ ввиду бездивергентности её правой части:

$$\operatorname{div} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \Delta\varphi = 0.$$

Положив $V = \varphi$, получим

$$\dot{V} = \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2.$$

Поскольку гармоническая функция аналитична и $\varphi \neq \mathrm{const}$, то (согласно п. 1) почти все решения системы (5) уходят на бесконечность (возможно, за конечное время). Что и требовалось.

Множество траекторий, не уходящих в бесконечность, не сводится только к критическим точкам функции φ. Каждая из *невырожденных* критических точек – неустойчивое равновесие, и имеются траектории, асимптотически входящие в положение равновесия. Это вытекает из аналитичности гармонической функции и отсутствия у неё точек локального максимума [7].

Отметим ещё, что в системе (5) с гармонической функцией φ могут быть решения, уходящие в бесконечность за конечное время, простой пример – $n = 2$ и $\varphi = x_1^3 - 3x_1x_2^2$.

Предположение о гармоничности функции φ существенно. Например, если $\varphi = -(x, x)/2$, то все решения системы (5) стремятся к равновесию $x = 0$ при $t \to +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости. М., 1959.
2. *Карапетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М., 2020.
3. *Kozlov V.V., Treschev D.V.* Instability, asymptotic trajectories and dimension of the phase space // Moscow Math. J. 2018. V. 18. № 4. P. 681–692.
4. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.
5. *Brunella M.* Instability of equilibria in dimension three // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1998. V. 48. № 5. P. 1345–1357.
6. *Козлов В.В.* Первые интегралы и асимптотические траектории // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 1. С. 32–59.
7. *Козлов В.В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50. № 6. С. 928–937.

Математический институт
имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва,
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 09.08.2022 г.
После доработки 09.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.