

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.2

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. А. Тораев

Для уравнения  $(-\Delta)^m U + a(x)U = 0$ , где  $\Delta$  – оператор Лапласа, с измеримым локально ограниченным коэффициентом  $a(x)$  приведены критерии осцилляции и неосцилляции в неограниченной области, которая может быть определённым образом сужающейся или расширяющейся на бесконечности.

DOI: 10.31857/S0374064122100120, EDN: KQZWIR

**Введение.** Работа посвящена исследованию осцилляционных свойств уравнения

$$LU = (-\Delta)^m U + a(x)U = 0, \quad (1)$$

где  $a(x)$  – локально суммируемая функция в неограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Осцилляционные свойства решений уравнения (1) в различных неограниченных областях изучены многими авторами. Так, в статьях [1–5] предполагается, что  $m = 1$  и область  $\Omega$  при больших  $x$  содержится в конусе  $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > |x| \cos \alpha\}$ ,  $0 < \alpha < \pi$ . В работах [6, 7] рассмотрены области других видов. Различные виды неограниченных областей изучены в работе [8], в которой приведены оценки числа точек отрицательного спектра эллиптического оператора произвольного порядка.

Уравнение (1) рассматривается в неограниченной области  $\Omega$ , которая может быть определённым образом сужающейся или расширяющейся на бесконечности.

Введём обозначения

$$\Omega_{r_0} = \{x \in \Omega : |x| > r_0\}, \quad \Omega_{r_0,b} = \{x \in \Omega : r_0 < |x| < b\}, \quad S_R^{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - r_0| = R\},$$

$\dot{W}_2^m(\Omega)$  – замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных функций  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме пространства Соболева  $W_2^m(\Omega)$ .

**Определение.** Уравнение (1) называется *осцилляционным* в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , если для любого  $r_0 > 0$  оно имеет нетривиальное обобщённое решение  $U \in \dot{W}_2^m(G)$ , где  $G \subset \Omega_{r_0}$  – некоторая ограниченная область, и *неосцилляционным* – в противном случае.

Сначала найдём оператор  $\Delta^m$  в сферических координатах. Для  $m = 1$  имеем

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \delta,$$

здесь  $\Delta_r = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  – радиальная часть оператора Лапласа,  $\delta$  – оператор Бельтрами.

Сделаем замену  $t = \ln r$ , тогда

$$\Delta = e^{-2t}(\Delta_t + \delta), \quad \Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (n-2) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \Delta^m = e^{-2mt}(\Delta_t + \delta)^m &= e^{-2mt}(\Delta_t^m + C_m^1 \Delta_t^{m-1} \delta + C_m^2 \Delta_t^{m-2} \delta^2 + \\ &+ C_m^3 \Delta_t^{m-3} \delta^3 + \dots + C_m^{m-1} \Delta_t \delta^{m-1} + \delta^m), \quad C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы  $-\Delta_t$  и  $-\delta$  положительны (неотрицательны). Поэтому и операторы  $(-\Delta_t)^l$ ,  $(-\delta)^l$  положительны [9, с. 238–242; 10, с. 222–226]. Из равенства (2) следует, что  $\Delta_t^{m-k}\delta^k = \delta^k\Delta_t^{m-k}$ , так как  $(\Delta + \delta)^m = (\delta + \Delta)^m$ .

**1. Неосцилляция.** Известно [6, с. 6], что выполнение для всех  $U \in C_0^\infty(\Omega)$  неравенства

$$(LU, U) = \int_{\Omega} [(-\Delta)^m U + a(x)U]U \, dx > 0 \quad (3)$$

является необходимым и достаточным условием неосцилляции уравнения (1) в области  $\Omega$ .

В неравенстве (3) переходим к сферическим координатам и используем замену

$$U = V \exp\left(\frac{2m-n}{2}t\right), \quad t = \ln r.$$

Тогда в силу равенства (2) будем иметь

$$(LU, U) = \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \left[ L_m V + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i (\delta^i L_{m-i} V) + \delta^m V \right] V + a(t, \varphi) V^2 \exp(2mt) \right\} dt \, d\varphi, \quad (4)$$

где  $\Phi$  – область изменения  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ ,  $d\varphi$  – элемент поверхности  $|\varphi| = 1$ ,  $L_j$  – обыкновенные линейные дифференциальные операторы порядка  $2j$ , характеристические полиномы которых имеют следующие корни:

1) при  $j = m$

$$q_k^{(1)} = \frac{4(k+1) - n - 2m}{2}, \quad q_k^{(2)} = \frac{n - 2m + 4k}{2}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

или (так как  $q_k^{(1)} = -q_{m-1-k}^{(2)}$ )

$$q_k^{(1,2)} = \pm \frac{n - 2m + 4k}{2}, \quad k = \overline{0, m-1};$$

2) при  $j = m - i$

$$q_k^{(1)} = \frac{4(k+1) - n - 2m}{2}, \quad q_k^{(2)} = \frac{n - 2m + 4k}{2}, \quad k = \overline{0, m-i-1}; \quad (5)$$

3) при  $j < m/2$

$$q_k^{(1)} = \frac{4(k+1) - n - 2m}{2}, \quad q_k^{(2)} = \frac{n - 2m + 4k}{2}, \quad k = \overline{0, m/2-2}.$$

В формуле (4) выражения  $(-1)^m (\delta^i L_{m-i})V$  можно записать в виде

$$(-1)^m (\delta^i L_{m-i})V = (-1)^i \delta^i (-1)^{m-i} L'_{m-i} V + (-1)^i B_{m-i} \delta^i V, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (6)$$

Числа  $B_{m-i}$  определяются из формул (5).

Уравнения

$$L_{m-i} V = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

являются неосцилляционными в области  $\Omega$ . Нетрудно проверить, что и уравнения

$$L'_{m-i} V = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

также будут неосцилляционными в области  $\Omega$ . Поэтому справедливо неравенство

$$\int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} (-1)^m \sum_{i=1}^{m-1} [C_m^i \delta^i L'_{m-i} V] V dt d\varphi > 0 \quad (7)$$

для любой функции  $V \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \beta_{2i} \lambda^{2i} &= \left[ \lambda^2 + \left( \frac{n-2m}{2} \right)^2 \right] \left[ \lambda^2 + \left( \frac{n-2m+4}{2} \right)^2 \right] \dots \\ &\dots \left[ \lambda^2 + \left( \frac{n+2m-8}{2} \right)^2 \right] \left[ \lambda^2 + \left( \frac{n+2m-4}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

**Теорема 1.** Пусть область  $\Omega$  такова, что  $S_R^0 \cap \Omega$  при достаточно большом  $R$  состоит из совокупности областей  $D_i$  таких, что если  $D_i^*$  есть образ  $D_i$  на  $S_1^0$  при отображении  $x' = x/|x|$ , то собственные значения оператора

$$\sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l C_m^l B_{m-l} \delta^l + (-1)^m \delta^m$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле на  $\partial D_i^*$  для любого  $i$  не меньше  $NR^\gamma$ ,  $N = \text{const} > 0$ ,  $\gamma = \text{const}$ . Если

$$a(x) \geq -\beta_0 |x|^{-2m} - \frac{1}{4} \beta_2 (|x|^m \ln |x|)^{-2} - N |x|^{\gamma-2m},$$

где  $\beta_0$  и  $\beta_2$  определяются из (8), то уравнение (1) является неосцилляционным в области  $\Omega$ .

**Доказательство.** В силу условия (7) из равенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} (LU, U) &\geq \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \left[ (-1)^m (L_m V, V) + \sum_{l=1}^{m-1} ((-1)^l C_n^l B_l \delta^l V + (-1)^m \delta^m V) V \right] + \right. \\ &\quad \left. + a(t, \varphi) \exp(2mt) V^2 \right\} dt d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условий теоремы и неравенства (9) будем иметь

$$\begin{aligned} (LU, U) &\geq \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^m \beta_{2i} \left( \frac{d^i V}{dt^i} \right)^2 + N |x|^\gamma V^2 - \beta_0 V^2 - \frac{\beta_2}{4} \frac{V^2}{t^2} - N |x|^\gamma V^2 \right] dt d\varphi = \\ &= \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left[ \sum_{i=2}^m \beta_{2i} \left( \frac{d^i V}{dt^i} \right)^2 + \beta_0 V^2 + \beta_2 \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 - \beta_0 V^2 - \frac{\beta_2}{4} \frac{V^2}{t^2} \right] dt d\varphi \geq \\ &\geq \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left[ \beta_{2i} \sum_{i=2}^m \left( \frac{d^i V}{dt^i} \right)^2 + \beta_2 \left( \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 - \frac{V^2}{4t^2} \right) \right] dt d\varphi > 0, \end{aligned}$$

так как известно (см. [6, с. 19]), что

$$\int_{t_0}^{\infty} \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 dt \geq \frac{1}{4} \int_{t_0}^{\infty} \frac{V^2}{t^2} dt.$$

Следовательно, уравнение (1) – неосцилляционное в области  $\Omega$ .

Заметим, что при чётном  $n$  и таком, что  $n \leq 2m$ , возможен случай  $\beta_0 = 0$ .

**2. Осцилляция.** Пусть  $\Omega = T^\omega$  – нормальный телесный угол с раствором  $\omega \leq \pi$  [6, с. 5]. Точность условий теоремы 1 показывает следующая

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda_0$  – наименьшее собственное значение задачи

$$\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i C_m^i B_{m-i} \delta^i z + (-1)^m \delta^m z = \lambda z, \quad (10)$$

$$D^\alpha z|_{\partial T^\omega} = 0, \quad |\alpha| = \overline{0, m-1}. \quad (11)$$

Если для некоторого  $\varepsilon > 0$  при достаточно большом  $r_0$  выполняется равенство

$$a(x) \leq -(\beta_0 + \lambda_0 + \varepsilon)|x|^{-2m}, \quad |x| > r_0,$$

то уравнение (1) является осцилляционным в области  $T^\omega$ .

**Доказательство.** Воспользуемся равенством (4) с учётом равенства (6), в котором положим  $V = z(t)w(\varphi)$ , где  $w(\varphi)$  – собственная функция задачи (10), (11), соответствующая наименьшему собственному значению  $\lambda_0$ . После интегрирования получим

$$\begin{aligned} (LU, U) = & \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left[ W^2 \sum_{i=0}^m \beta_{2i} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_1 W)^2 + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(2)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_2 W)^2 + \dots + A_1^{(m-1)} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 (\nabla_{m-1} W)^2 + \\ & \left. + z^2 \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i \beta_{m-i} (\nabla_i W)^2 + z^2 (\nabla_m W)^2 + a(t, \varphi) \exp(2mt) z^2 W^2 \right] dt d\varphi, \end{aligned}$$

здесь  $\nabla_i$  – градиент порядка  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

В силу условий теоремы имеем

$$\begin{aligned} (LU, U) \leq & \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left[ W^2 \sum_{i=1}^m \beta_{2i} \frac{d^i z}{dt^i} + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_{m-1} W)^2 + \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(2)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_2 W)^2 + \dots \right. \\ & \left. + A_1^{(m-1)} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 (\nabla_{m-1} W)^2 + \beta_0 z^2 W^2 + \lambda_0 z^2 W^2 - \beta_0 z^2 W^2 - \lambda_0 z^2 W^2 - \varepsilon z^2 W^2 \right] dt d\varphi = \\ & = \int_{\Phi} \int_{t_0}^{\infty} \left[ W^2 \sum_{i=1}^m \beta_{2i} \frac{d^i z}{dt^i} + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_{m-1} W)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(2)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_2 W)^2 + \dots + A_1^{(m-1)} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 (\nabla_{m-1} W)^2 - \varepsilon z^2 W^2 \right] dt d\varphi. \end{aligned}$$

Функцию  $z(t)$  определим следующим образом:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_1, \\ 1 & \text{при } t_1 + \delta \leq t < t_2, \\ 0 & \text{при } t \geq t_2 + \delta, \end{cases}$$

где  $\delta = \text{const} > 0$ . В результате получим

$$(LU, U) \leq \int_{\Phi} \int_{M_\delta} \left\{ \left[ \sum_{i=0}^m \beta_{2i} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 w^2 + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_1 w)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(2)} \left( \frac{d^i z}{dt^i} \right)^2 (\nabla_2 w)^2 + \dots + A_1^{(m-1)} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 (\nabla_{m-1} w)^2 \right] \right\} dt d\varphi - \varepsilon(t_2^* - t_1^*)A,$$

где  $t_1 < t_1^* < t_1 + \delta$ ,  $t_2 < t_2^* < t_2 + \delta$ ,  $A = \int_{\Phi} w^2 d\varphi$ ,  $M_\delta = (t_1, t_1 + \delta) \cup (t_2, t_2 + \delta)$ .

Теперь положим  $z_{\varepsilon_1}(t) = z(\varepsilon_1 t)$ , тогда из последнего неравенства будем иметь

$$(LU, U) \leq \int_{\Omega_\delta} \left[ \sum_{i=1}^m \varepsilon_1^{2i} \beta_{2i} \left( \frac{d^i z_{\varepsilon_1}}{dt^i} \right)^2 w^2 + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \varepsilon_1^{2i} \left( \frac{d^i z_{\varepsilon_1}}{dt^i} \right)^2 (\nabla_1 w)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(2)} \varepsilon_1^{2i} \left( \frac{d^i z_{\varepsilon_1}}{dt^i} \right)^2 (\nabla_2 w)^2 + \dots + A_1^{(m-1)} \varepsilon_1^2 \left( \frac{dz_{\varepsilon_1}}{dt} \right)^2 (\nabla_{m-1} w)^2 \right] dt d\varphi - \varepsilon(t_2^* - t_1^*)A,$$

где

$$\Omega_\delta = \{(t, \varphi) \in T^w : t_1 \leq t \leq t_1 + \delta, \quad t_2 \leq t \leq t_2 + \delta, \quad \varphi \in \Phi\}.$$

Отсюда при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  получаем, что  $(LU, U) \leq 0$ , следовательно, согласно [6, с. 5, лемма 1.1], уравнение (1) – осцилляционное в области  $T^w$ .

**Заключение.** Теоремы 1 и 2 обобщают соответствующие результаты работ [6, 7], в которых рассмотрены случаи  $m = 1, 2$ .

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту статьи за ценные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allegretto W. Nonoscillation criteria for elliptic equations in conical operators // Pacific J. Math. 1981. V. 92. № 1. P. 15–25.
2. Swanson C. Comparison theorems for elliptic equations on unbounded domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 126. P. 278–285.
3. Swanson C. Strong oscillation on elliptic equations in general domain // Can. Math. Bull. 1970. V. 16. P. 105–110.
4. Headley B., Swanson C.A. Oscillation criteria for elliptic equations // Pacific J. Math. 1968. V. 27. P. 501–506.
5. Kreith K. Comparison theorems for general elliptic equations with mixed boundary // J. Differ. Equat. 1970. V. 8. P. 537–541.
6. Тораев А. Осцилляционные свойства решений эллиптических уравнений. Ашхабад, 1985.
7. Тораев А. Об осцилляции и неосцилляции решений эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 8. С. 1424–1435.
8. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об отрицательном спектре эллиптического оператора // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 147–166.
9. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М., 1984.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1984.

Туркменский государственный  
архитектурно-строительный институт,  
г. Ашгабат

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.  
После доработки 30.07.2022 г.  
Принята к публикации 15.08.2022 г.