ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1443–1452

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЛИНЕЙНЫЙ ВАРИАНТ АНТИПЕРРОНОВСКОГО ЭФФЕКТА СМЕНЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ

© 2022 г. **Н. А. Изобов, А. В. Ильин**

Реализован линейный вариант антиперроновского эффекта смены всех положительных характеристических показателей Ляпунова на отрицательные. Для произвольных чисел $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0$ и $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0$ доказано существование n-мерных линейных систем: исходной $\dot{x} = A(t)x$, $t \geqslant t_0$, с характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, и возмущённой $\dot{y} = A(t)y + Q(t)y$ с матрицей возмущения $Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и характеристическими показателями $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$. При этом матрицы коэффициентов исходной и возмущённой дифференциальных систем ограничены и бесконечно дифференцируемы на полуоси $[t_0, +\infty)$.

DOI: 10.31857/S0374064122110012, EDN: LZPTPQ

В качестве первого приближения рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \qquad (1_n)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. В работе О. Перрона [1] (см. также [2, с. 50–51]) в двумерном случае установлено существование систем (1_2) с показателями $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) < 0$ и также бесконечно дифференцируемой вектор-функции

$$f(t,y) : (t,y) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

удовлетворяющей условию

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \qquad (2)$$

при $m = 2$ таких, что все нетривиальные решения возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \qquad (3)$$

бесконечно продолжимы вправо, и их показатели Ляпунова составляют множество $\{\lambda_2(A), \lambda\}$ с некоторым числом $\lambda > 0$. Этот эффект смены отрицательных показателей линейного приближения (1_2) на положительные для решений возмущённой системы (3) с m-возмущением (2) произвольного порядка $m > 1$ исследован в серии наших, в том числе и с С.К. Коровиным, работ и завершился (см. [3, 4]) полным описанием суслинскими множествами совокупностей $\Lambda_+(A,f)$ и $\Lambda_-(A,f)$ соответственно положительных и отрицательных показателей всех нетривиальных решений системы (3), в том числе и в необходимом случае $\Lambda_-(A,f) = \varnothing$.

Для возможных приложений (по превращению “абсолютно неустойчивых” дифференциальных систем в экспоненциально или условно устойчивые) бóльший интерес представляет противоположный антиперроновский эффект [5] смены малыми возмущениями (линейными, как исчезающими на бесконечности, так и экспоненциально убывающими; нелинейными высшего порядка малости) всех положительных характеристических показателей линейного приближения (1_n) на отрицательные для решений возмущённой системы. В работе [5] исследован этот эффект для экспоненциально убывающих линейных возмущений: доказано существование линейных систем (1_n) со всеми положительными показателями и возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{4_n}$$

с бесконечно дифференцируемой $n \times n$-матрицей $Q(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{5}$$

и характеристическими показателями

$$\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}(A+Q) < 0 < \lambda_n(A+Q).$$

При этом остался открытым сформулированный в этой же работе вопрос о существовании системы (4_n) с возмущением (5) и отрицательным старшим показателем $\lambda_n(A+Q)$. Нельзя ли при более общем возмущении $Q(t) \to 0$, $t \to +\infty$, одновременно реализовать все необходимые неравенства $\lambda_i(A) > 0$, $\lambda_i(A+Q) < 0$, $i = \overline{1,n}$?

Утвердительный ответ содержит следующая, анонсированная в статье [6],

Теорема. *Для любых параметров*

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0, \quad 2 \leqslant n \in \mathbb{N},$$

существуют:

1) линейная система (1_n) *с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$;

2) бесконечно дифференцируемая $n \times n$*-матрица* $Q(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *такие, что возмущённая система* (4_n) *имеет характеристические показатели* $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательствам двух её частных вариантов, соответственно, в двумерном и трёхмерном случаях. При этом, как и в работе [5], сначала строится кусочно-постоянная и ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$ матрица $A(t)$ коэффициентов системы (1_n) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, и необходимая также кусочно-постоянная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(t) \to 0$, $t \to +\infty$, такие, что возмущённая система (4_n) имеет характеристические показатели $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$. Затем с помощью соответствующих функций Гелбаума–Олмстеда матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ переопределим на промежутках очень малой длины, содержащих их точки разрыва, так чтобы они стали бесконечно дифференцируемыми и по-прежнему остались ограниченными на полуоси $[t_0, +\infty)$ (как и в самом эффекте Перрона), сохранив при этом значения показателей как исходной, так и возмущённой систем.

1. Общие построения. С помощью величин

$$\theta_1 = \theta > e, \quad \theta_i = \theta\,\frac{\mu_{i-1} - \lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} \geqslant \theta, \quad i = 2, 3, \tag{6}$$

введём последовательность $\{T_l\} \subset [t_0, +\infty)$ моментов T_l со свойствами

$$T_{3l+i} = T_{3l+i-1}(\theta\theta_i)^{k_i(l)}, \quad k_i(l) > l, \quad T_3 > e, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Заметим, что нетривиальные построения необходимых систем в двумерном случае будут вестись на промежутках $[T_{3l}, T_{3l+2})$ для всех $l \in \mathbb{N}$, а в трёхмерном – дополнительно и на промежутках $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$, $l \in \mathbb{N}$.

Для определения элементов матриц $A(t)$ и $Q(t)$ понадобятся промежуточные моменты времени

$$t_0(i,l) = T_{3l+i-1}, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N},$$
$$t_{2k}(i,l) = \theta\theta_i t_{2k-2}(i,l), \quad t_{2k-1}(i,l) = \theta t_{2k-2}(i,l)$$

для всех $k = \overline{1, k_i(l)}$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1,3}$.

2. Двумерный случай. Нулевые значения кусочно-постоянных коэффициентов необходимой двумерной системы

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A_2(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1_2}$$

определим для всех $l \in \mathbb{N}$ равенствами

$$a_1(t) = a_2(t) = 0, \quad t \in [t_k(i,l), l + t_k(i,l)) \equiv I_k^0(i,l), \quad k = \overline{0, 2k_i(l) - 1}, \quad i = 1,2, \tag{8_1}$$

$$a_2(t) = 0, \quad t \in I_k^0(3,l), \quad k = \overline{0, 2_{k_3}(l) - 1}. \tag{8_2}$$

Ненулевые значения этих коэффициентов на оставшихся промежутках

$$I_0(i,l) \equiv [t_0(i,l), t_2(i,l)) \setminus \bigcup_{k=0,1} I_k^0(i,l), \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N},$$

$$I_2(i,l) \equiv [t_2(i,l), T_{3l+i}) \setminus \bigcup_k I_k^0(i,l), \quad k = \overline{2, 2k_i(l)}, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N},$$

определим следующим образом:

$$a_1(t) = \alpha_1 \equiv -\theta\lambda_2 + \frac{\theta^2\mu_1 - \mu_2}{\theta - 1},$$

$$a_2(t) = \alpha_2 \equiv -\theta\lambda_1 + (1+\theta)\mu_1, \quad t \in I_0(i,l), \quad i = 1,2, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{9_1}$$

что позволит избежать на промежутках $I_0(i,l)$ возможного недопустимого роста норм решений соответствующей возмущённой системы при переходе с любого промежутка $[T_p, T_{p+1})$, $3 \leqslant p \in \mathbb{N}$, на аналогичный соседний;

$$a_i(t) = \lambda_i, \quad a_{3-i}(t) = \alpha_{3-i}, \quad t \in I_2(i,l), \quad i = 1,2, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{9_2}$$

На последнем для фиксированного l промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ (используемом при последующем рассмотрении в п. 3 трёхмерного случая и не нарушающем необходимых параметров в двумерном случае) положим

$$a_1(t) = \alpha_1, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}),$$

$$a_2(t) = \alpha_3 \equiv -\theta\lambda_3 + \frac{\theta^2\mu_2 - \mu_3}{\theta - 1}, \quad t \in I_0(3,l) \bigcup I_2(3,l), \quad l \in \mathbb{N}. \tag{9_3}$$

Вычислим теперь характеристические показатели построенной линейной системы (1_2). По определениям (8_1), (8_2) и (9_1)–(9_3) коэффициентов этой системы и неравенств $\alpha_i < 0$, $i = \overline{1,3}$, справедливы оценки

$$a_i(t) \leqslant \lambda_i, \quad i = 1,2, \quad t \in [T_3, +\infty),$$

из которых следуют очевидные неравенства $\lambda_i(A_2) \leqslant \lambda_i$, $i = 1,2$. С другой стороны, в силу неравенств

$$T_{3l+i-1}T_{3l+i}^{-1} < \exp[-2k_i(l)], \quad k_i(l) > l, \quad l \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1,3},$$

вытекающих из определений (6) и (7), справедливы необходимые противоположные оценки

$$\lambda_i(A_2) \geqslant \overline{\lim_{l\to\infty}} T_{3l+i}^{-1}[\alpha_0 t_2(i,l) - 2\lambda_i l k_i(l) + \lambda_i(T_{3l+i} - t_2(i,l))] \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{l\to\infty}} T_{3l+i}^{-1}[2\alpha_0\theta_1\theta_2 T_{3l+i-1} - 2\lambda_i k_i^2(l) T_{3l+i-1} + \lambda_i(T_{3l+i} - T_{3l+i-1})] =$$

$$= \lambda_i - 2\lambda_i \lim_{l\to\infty}[k_i^2(l)e^{-2k_i(l)}] = \lambda_i, \quad i = 1,2,$$

в которых $\alpha_0 = \min\limits_j\{\alpha_j\}$, $j = \overline{1,3}$.

Таким образом, линейная система (1_2) с кусочно-постоянными ограниченными коэффициентами $a_i(t)$ имеет необходимые характеристические показатели $\lambda_i(A_2)=\lambda_i$, $i=1,2$.

Матрицу $Q_2(t)\to 0$ при $t\to\infty$ (также кусочно-постоянную) возмущённой двумерной линейной системы

$$\dot y = A_2(t)y + Q_2(t)y, \quad y\in\mathbb{R}^2, \quad t\geqslant t_0, \tag{10}$$

определим равенством (см., например, [7])

$$Q_2(t)=q_2(t)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad t\geqslant t_0\equiv T_3, \tag{11_1}$$

с функцией

$$q_2(t)\begin{cases}(-1)^{k+i}\pi/(2l), & t\in I_k^0(i,l), \quad k=\overline{0,2k_i(l)-1}, \quad i=1,2,\\ 0 & \text{для всех остальных } t\in[t_0,+\infty)\end{cases} \tag{11_2}$$

и её интегралом

$$\int\limits_{I_k^0(i,l)} q_2(\tau)\,d\tau = \frac{\pi}{2}(-1)^{k+i}, \quad k=\overline{0,2k_i(l)-1}, \quad i=1,2. \tag{11_3}$$

У системы (10) на промежутках $I_k^0(i,l)$, $i=1,2$, $k=\overline{0,2k_i(l)-1}$, $l\in\mathbb{N}$, матрица $A_2(t)$ тождественно равна нулевой, а матрица $Q_2(t)$ коэффициентов этой системы, определённая равенствами (11_1)–(11_3), обеспечивает на указанных промежутках повороты её решений (и тем самым сохранение их нормами постоянных значений) на угол $\pi/2$: 1) при $i=1$ против часовой стрелки в случае равного нулю и чётного k и по часовой стрелке – для нечётного k; 2) при $i=2$ для тех же k – в противоположных направлениях. Поэтому для норм решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с начальными векторами

$$Y_j[t_k(i,l)] = \|Y_i[t_k(i,l)]\|(2-j,j-1)^{\mathrm{т}}, \quad j=1,2, \tag{12_{ik}}$$

при нулевом или чётном $k<2k_i(l)$ на промежутках

$$I_s^0(i,l), I_s'(i,l)\equiv[l+t_s(i,l),t_{s+1}(i,l))\subset[T_{3l+i-1},T_{3l+i}), \quad i=1,2, \quad l\in\mathbb{N},$$

будем иметь при $j=1,2$ представления

$$\|Y_j(t)\|=\begin{cases}\|Y_j(t_s)\|, & t\in I_s^0(i,l), \quad s=k,k+1,\\ \|Y_j(l+t_s)\|\exp[\beta_s(i,j)(t-l-t_s)], & t\in I_s'(i,l), \quad s=k,k+1,\end{cases} \quad t_s\equiv t_s(i,l), \tag{13_{is}}$$

в случае $i=1$. В них величины $\beta_s(1,j)$ определены равенствами

$$\beta_1(1,1)=\alpha_1, \quad \beta_s(1,1)\begin{cases}\alpha_2 & \text{для } s=0 \text{ и чётных } s<2k_1(l),\\ \lambda_1 & \text{для нечётных } s\in\{3,\ldots,2k_1(l)-1\}\end{cases} \tag{14_{11}}$$

для первого решения $Y_1(t)$;

$$\beta_0(1,2)=\alpha_1, \quad \beta_s(1,2)\begin{cases}\alpha_2 & \text{для нечётного } s\leqslant 2k_1(l)-1,\\ \lambda_1 & \text{для чётного } s<2k_1(l)\end{cases} \tag{14_{12}}$$

для второго решения $Y_2(t)$. При этом для рассматриваемых решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ справедливы и их значения $(12_{1,k+2})$. Тем самым при продолжении этих решений представления (12_{lk}) справедливы при всех чётных $k\leqslant 2k_1(l)$ и $k=0$, а при всех нечётных $k<2k_1(l)$ рассматриваемые решения системы (10) принимают значения

$$Y_j[t_k(1,l)] = \|Y_j[t_k(1,l)]\|(1-j,2-j)^{\mathrm{т}}, \quad j=1,2.$$

Очевидно, что это же справедливо и для непрерывных рассматриваемых на всем промежутке $[T_{3l}, T_{3l+1})$ решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ системы (10), а также для них выполнены равенства (13_{1s}) при нулевом и всех чётных $s < 2k_1(l)$.

Заметим, что конечные значения $(12_{1,2k_1(l)})$ в момент $t = t_{2k_1(l)}(1, l) = T_{3l+1}$ построенных на отрезке $[T_{3l}, T_{3l+1}]$ непрерывных решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ возмущённой системы (10) будут являться начальными значениями (12_{20}) аналогичных решений на следующем отрезке $[T_{3l+1}, T_{3l+2}]$ с одним и тем же $l \in \mathbb{N}$.

На отрезке $[T_{3l+1}, T_{3l+2}]$ l-го временного цикла $[T_{3l}, T_{3l+3}]$, соответствующем значению $i = 2$, аналогичным образом построим непрерывные решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ возмущённой системы (10) с начальными значениями (12_{20}), совпадающими, как уже отмечалось, с конечными значениями $(12_{1,2k_1(l)})$. Тем самым они являются непрерывным продолжением построенных на предыдущем промежутке $[T_{3l}, T_{3l+1})$ также непрерывных одноименных решений. При этом следует учитывать, что направление поворотов на угол $\pi/2$ решений системы (10) на промежутках $I_k^0(2, l)$ противоположно аналогичным поворотам на промежутках $I_k^0(1, l) \subset$ $\subset [T_{3l}, T_{3l+1})$.

В итоге будем иметь равенства: (12_{2k}) при всех нулевом и чётных $k \leqslant 2k_2(l)$;

$$Y_j[t_k(2, l)] = \|Y_j[t_k(2, l)]\|(j - 1, j - 2)^{\mathrm{T}}$$

для всех нечётных $k < 2k_2(l)$; (13_{2s}) с постоянными

$$\beta_0(2, 1) = \alpha_2, \quad \beta_s(2, 1) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{для нечётных } s < 2k_2(l), \\ \lambda_2 & \text{для чётных } s < 2k_2(l) \end{cases} \tag{14_{21}}$$

для первого решения $Y_1(t)$,

$$\beta_1(2, 2) = \alpha_2, \quad \beta_s(2, 2) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{для } s = 0 \text{ и чётных } s < 2k_2(l), \\ \lambda_2 & \text{для нечётных } s \subset \{3, \ldots, 2k_2(l) - 1\} \end{cases} \tag{14_{22}}$$

для второго решения $Y_2(t)$.

Последний промежуток $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ l-го временного цикла $[T_{3l}, T_{3l+3})$ построения необходимых исходной (1_2) и возмущённой (10) линейных систем является подготовительным для последующего рассмотрения трёхмерного случая. На нём первый коэффициент системы (1_2) определяется равенством $a_1(t) = \alpha_1$, а второй $a_2(t)$ – равенствами (8_2) и (9_3), матрица $Q_2(t)$ в системе (10) тождественно равна нулю. Тем самым решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ на этом промежутке имеют вид

$$Y_j(t) = \|Y_j(T_{3l+2})\| \exp\biggl(\int\limits_{T_{3l+2}}^{t} a_j(\tau)\, d\tau\biggr)(2 - j, j - 1)^{\mathrm{T}}, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \quad j = 1, 2,$$

и в силу значений $(12_{2,2k_2(l)})$ являются непрерывным продолжением одноименных решений, построенных на предыдущем промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$.

Заметим, что построенные непрерывные на промежутке $[T_{3l}, T_{3l+3})$ решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ возмущённой системы (10) в любой момент этого промежутка являются ортогональными.

Приведённые построения на промежутке $[T_{3l}, T_{3l+3})$ с произвольно фиксированным индексом $l \in \mathbb{N}$ распространим индукцией по $l \in \mathbb{N}$ (в определённом смысле периодически) на всю полуось $[t_0, +\infty)$, $t_0 \equiv T_3$. В итоге будем иметь двумерные исходную линейную систему (1_2) с ограниченной кусочно-постоянной матрицей коэффициентов $A_2(t)$ и положительными показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, а также возмущённую систему (10) с кусочно-постоянной матрицей $Q_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и нормальной (ортогональной в любой момент $t \geqslant t_0$) системой непрерывных решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с начальными значениями

$$Y_1(t_0) = (2 - j, j - 1)^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, 2.$$

Нормы этих решений в силу равенств (13_{is}) представимы в виде

$$\|Y_j(t)\| = \exp\biggl(\int\limits_{t_0}^{t} \beta_j(\tau)\,d\tau\biggr), \quad j = 1,2, \quad t \geqslant t_0, \tag{15}$$

здесь кусочно-постоянные вспомогательные функции $\beta_j(t)$, $j = 1,2$, на разных временных промежутках принимают значения

$$\beta_j(t) = \begin{cases} 0, & t \in I^0_s(i,l), \quad i = 1,2, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \beta_s(i,j), & t \in I'_s(i,l), \quad s = \overline{0, 2k_i(l)-1}, \\ a_j(t), & t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}) \end{cases} \tag{16}$$

с величинами $\beta_s(i,j)$, определёнными равенствами (14_{ij}), $i,j = 1,2$.

Вычислим теперь показатели решений $Y_j(t)$, $j = 1,2$, нормы которых представлены равенствами (15), (16). Для этого вместо функций $\beta_j(t)$ используем более простые по определению кусочно-постоянные функции $b_j(t)$, $j = 2$, имеющие представления

$$b_1(t) = \begin{cases} \alpha_{3-i}, & t \in [t_{2s+1-i}, t_{2s+2-i}), \quad s = \overline{1, k_i(l)+i-2}, \quad t_s = t_s(i,l), \\ \lambda_i, & t \in [t_{2s+2-i}, t_{2s+3-i}), \quad s = \overline{1, k_i(l)-1}, \quad i = 1,2, \end{cases}$$

$$b_1(t) = \alpha_{2-s}, \quad t \in [t_s(i,l), t_{s+1}(i,l)), \quad s = 0,1, \quad i = 1,2,$$

$$b_j(t) = \alpha_{2j-1}, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \quad j = 1,2, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Вторая функция $b_2(t)$ дополнительно определяется равенствами

$$b_2(t) = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - b_1(t), & t \in [t_0(i,l), t_2(i,l)), \quad i = 1,2, \\ \alpha_{3-i} + \lambda_i - b_1(t), & t \in [t_2(i,l), T_i), \quad i = 1,2. \end{cases}$$

Эти новые функции $b_j(t)$ связаны с прежними интегральными неравенствами

$$-\lambda_2 l + \int\limits_{t_{2s}}^{t} b_j(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_{2s}}^{t} \beta_j(\tau)\,d\tau \leqslant 2|\alpha_0|l + \int\limits_{t_{2s}}^{t} b_j(\tau)\,d\tau, \quad j = 1,2,$$

$$\alpha_0 = -\theta\lambda_3 + \frac{\theta^2\mu_1 - \mu_3}{\theta - 1}, \quad t_{2s} = t_{2s}(i,l), \quad t \in [t_{2s}, t_{2s+1}), \tag{17}$$

для любых $s = \overline{0, k_i(l)-1}$, $i = \overline{1,3}$ и $l \in \mathbb{N}$. С помощью соотношений (17) установим равенства

$$\lambda[Y_i] \equiv \varlimsup_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)\,d\tau = \varlimsup_{t\to\infty} \lambda_j(t), \quad \lambda_j(t) \equiv t^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} b_j(\tau)\,d\tau, \quad j = 1,2, \tag{18}$$

для вычисления характеристических показателей $\lambda[Y_j]$ решений $Y_j(t)$, $j = 1,2$, возмущённой системы (10). Действительно, из правого неравенства (17) в силу произвола i, s и $l > 1$ имеем оценку

$$\int\limits_{t_0}^{t} \beta_j(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} b_j(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{\eta_t} [\beta_j(\tau) - b_j(\tau)]\,d\tau + 4l|\alpha_0|[s + m_t(i,l)], \tag{19}$$

в которой момент η_t и величина $m_t(i,l)$ определяются равенствами

$$\eta_t = T_{3l+i-2}, \quad m_t(i,l) = \begin{cases} k_3(l-1), & i=1, \\ k_{i-1}(l), & i=2,3. \end{cases}$$

Так как справедливы неравенства

$$t \geqslant t_{2s} \geqslant \theta^{2s} T_{3l+i-1} \geqslant \theta^{2[s+m_t(i,l)]} T_{3l+i-2} = \theta^{2[s+m_t(i,l)]} \eta_t(i,l)$$

и $m_t(i,l) \to +\infty$ (при $t \to \infty$ и $l \to \infty$), то из (19) верхним предельным переходом получаем первую необходимую оценку

$$\lambda[Y_j] \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \lambda_j(t), \quad j=1,2.$$

Аналогичным образом получаем и второе противоположное неравенство, устанавливающее необходимое равенство (18).

При вычислении характеристических показателей $\lambda[Y_j]$ построенных решений $Y_j(t)$ по формулам (18) (и функциям $b_j(t)$) воспользуемся следующим очевидным утверждением.

Утверждение. *Характеристический показатель* $\lambda[Y]$ *нетривиального решения*

$$Y(t) = \exp\biggl(\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau)\,d\tau\biggr), \quad t \geqslant t_0,$$

скалярного уравнения $\dot y = b(t)y$, $y \in \mathbb{R}^1$, $t \geqslant t_0$, *с кусочно-постоянным ограниченным коэффициентом*

$$b(t) = b_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \geqslant 0,$$

вычисляется по последовательности $\{t_k\} \uparrow \infty$ *по формуле*

$$\lambda[Y] = \varlimsup_{k\to\infty} t_k^{-1} \int\limits_{t_0}^{t_k} b(\tau)\,d\tau.$$

Его справедливость следует из знакопостоянства или тождественного равенства нулю производной $\lambda'(t)$ характеристической функции $\lambda(t) \equiv t^{-1}\ln|Y(t)|$ решения $Y(t)$ рассматриваемого уравнения на всяком интервале (t_k, t_{k+1}).

В соответствии с этим утверждением такой последовательностью для вычисления характеристических показателей $\lambda[Y_j]$ решений $Y_j(t)$, $j=1,2$, по функциям $b_j(t)$ (см. формулы (18)) является последовательность

$$\{t_s(i,l)\}, \quad s = \overline{0, 2k_i(l)}, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

По этой последовательности с учётом определений функций $b_j(t)$ и построенных α_i и θ_i вычислим (а в некоторых случаях оценим) на промежутках $[T_{3l+i-1}, T_{3l+i})$ интегральные средние

$$J_{ij}(t_s, t_{s+2}) \equiv (t_{s+2}-t_s)^{-1} \int\limits_{t_s}^{t_{s+2}} b_j(\tau)\,d\tau, \quad s = \overline{2, 2k_i(l)-2}, \quad i,j=1,2, \quad l \in \mathbb{N},$$

для членов $t_s = t_s(i,l)$ указанной последовательности с чётными и нечётными номерами s, что позволит вычислить показатели решений $Y_j(t)$. Для $i=1$ и чётных s имеем равенство

$$J_{11}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\alpha_2(t_{s+1}-t_s) + \lambda_1(t_{s+2}-t_{s+1})}{t_{s+2}-t_s} = \frac{\alpha_2 + \theta\lambda_1}{1+\theta} = \mu_1,$$

$$J_{12}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\lambda_1 + \theta\alpha_2}{1+\theta} < J_{11}(t_s, t_{s+2}) = \mu_1 \leqslant \mu_2,$$

а для нечётных $s = \overline{3, 2k_1(l) - 3}$ – равенства

$$J_{11}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\lambda_1 + \theta\alpha_2}{1+\theta} < \frac{\alpha_2 + \theta\lambda_1}{1+\theta} = \mu_1, \quad J_{12}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\alpha_2 + \theta\lambda_1}{1+\theta} = \mu_1 \leqslant \mu_2.$$

На следующем промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$, соответствующем значению $i = 2$, вычислим аналогичные интегральные средние $J_{2j}(t_s, t_{s+2})$ с моментами $t_s = t_s(2, l)$ и чётными и нечётными номерами $s = \overline{2, 2k_2(l) - 2}$. Для $j = 2$ и чётных s имеем с учётом значений α_1 и θ_2 равенства

$$J_{22}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\alpha_1(t_{s+1} - t_s) + \lambda_2(t_{s+2} - t_{s+1})}{t_{s+2} - t_s} =$$

$$= \frac{(\theta - 1)\alpha_1 + \theta(\theta_2 - 1)\lambda_2}{\theta\theta_2 - 1} = \frac{\theta(\theta_2 - \theta)\lambda_2 + \theta^2\mu_1 - \mu_2}{\theta\theta_2 - 1} = \mu_2.$$

Для нечётных $s \in \{3, 2k_2(l) - 3\}$ имеем значение

$$J_{22}(t_s, t_{s+2}) = \frac{(\theta - 1)\lambda_2 + \theta(\theta_2 - 1)\alpha_1}{\theta\theta_2 - 1},$$

очевидно, строго меньшее значения J_{22}, вычисленного выше при чётных s, т.е. меньшее числа μ_2.

Воспользовавшись полученным выше представлением

$$\mu_2 = \frac{(\theta - 1)\alpha_1 + \theta(\theta_2 - 1)\lambda_2}{\theta\theta_2 - 1},$$

оценим теперь интегральное среднее $J_{21}(t_s, t_{s+2})$ с нечётными номерами $s \in \{3, \ldots, 2k_2(l) - 3\}$:

$$J_{21}(t_s, t_{s+2}) = \frac{(\theta_2 - 1)\alpha_1 + (\theta - 1)\theta_2\alpha_2}{\theta\theta_2 - 1} = \frac{(\theta_2 - \theta)(\alpha_1 - \lambda_2)}{\theta\theta_2 - 1} + \mu_2 =$$

$$= \frac{\theta_2(\mu_2 - \lambda_2) + \theta\lambda_2}{\theta - 1} = \frac{\theta(\mu_1 - \lambda_2) + \theta\lambda_2 - \mu_2}{\theta - 1} = \frac{\theta\mu_1 - \mu_2}{\theta - 1} \leqslant \mu_1.$$

Вычисляемые по чётным номерам $s \in \{2, \ldots, 2k_2(l) - 2\}$ значения

$$J_{21}(t_s, t_{s+2}) = \frac{(\theta - 1)\lambda_2 + \theta(\theta_2 - 1)\alpha_1}{\theta\theta_2 - 1},$$

очевидно, строго меньше аналогичных значений, вычисленных выше по нечётным номерам s, т.е. строго меньше μ_1. Поэтому в силу того, что вычисленные выше интегральные средние $J_{ij}(t_s, t_{s+2})$ в каждом отдельном случае принимают одно и то же значение при всех рассматриваемых s, а также ввиду неравенств $\alpha_i < \mu_1$, $i = 1, 2$, $\alpha_3 < \mu_2$ и свойства $T_{3l+i-1}/T_{3l+i} \to 0$ при $l \to \infty$, $i = \overline{1, 3}$, справедливы необходимые равенства $\lambda[Y_j] = \mu_j$, $j = 1, 2$, причём показатель решения $Y_j(t)$ реализуется, например, по последовательности $\{T_{3l+j}\}$, $j = 1, 2$.

Двумерный кусочно-постоянный вариант теоремы доказан.

3. Трёхмерный случай. Для построения необходимых исходной и возмущённой линейных систем используем их двумерные аналоги из п. 2 – линейные системы (1_2) и (10), дополнив их соответствующим образом. Исходную линейную систему возьмём в виде

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[A_2(t)a_3(t)]x \equiv A_3(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant t_0, \qquad (1_3)$$

с кусочно-постоянной функцией

$$a_3(t) = \begin{cases} 0, & t \in I_k^0(3, l), \quad k = \overline{0, k_3(l) - 1}, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \lambda_3, & t \in I_2(3, l), \quad l \in \mathbb{N}, \\ \alpha_3, & t \in [T_{3l}, T_{3l+2}) \bigcup I_0(3, l), \quad l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Очевидно, что система (1_3) имеет необходимые характеристические показатели $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Основываясь на двумерной возмущённой системе (10), в качестве необходимой возмущённой трёхмерной системы рассмотрим следующую:

$$\dot{y} = A_3(t)y + Q_3(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant t_0, \tag{20}$$

с кусочно-постоянной 3×3-матрицей

$$Q_3(t) = \begin{cases} \operatorname{diag}[Q_2(t), 0], & t \in [T_{3l}, T_{3l+2}), \quad l \in \mathbb{N}, \\ -\operatorname{diag}[0, Q_2'(t)], & t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \quad l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Определение матрицы Q_2' второго порядка на промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ идентично определению (11_1)–(11_3) матрицы $Q_2(t)$ на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ с заменой индекса $i=2$ на $i=3$. При этом знак минус в определении матрицы $Q_3(t)$ обеспечивает на промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ совпадение направлений поворотов на угол $\pi/2$ в пространстве y_2Oy_3 решений $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ системы (20) с направлением поворотов на тот же угол в пространстве $y_1 0 y_2$ и на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ системы (10).

Сравнивая определения двумерной системы (10) на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ и двумерной независимой подсистемы

$$\dot{y} = \operatorname{diag}[a_2(t), a_3(t)]y - Q_2'(t)y, \quad y = (y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \tag{21}$$

системы (20) на промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$, приходим к выводу об их эквивалентности. При этом в случае $i=3$ числа λ_3 и Q_3, функции $a_2(t)$ и $a_3(t)$ и матрица $-Q_2'(t)$ полностью аналогичны числам λ_2 и θ_2, функциям $a_1(t)$ и $a_2(t)$ и матрице $Q_2(t)$ в случае $i=2$. Повторяя построения решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ системы (10) на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ и рассуждения по вычислению их показателей при построении решений $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ подсистемы (21) и затем вычисляя (оценивая) их "временны́е" показатели, получаем соотношения

$$\lambda[Y_3] = \frac{(\theta-1)\alpha_3 + \theta(\theta_3 - 1)\lambda_3}{\theta\theta_3 - 1} = \mu_3, \quad t^{-1}\ln\|Y_2(t)\| \leqslant \mu_2, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}).$$

Распространив приведённые построения индукцией на всю полуось $[t_0, +\infty)$ по параметру $l \in \mathbb{N}$, получим необходимые равенства $\lambda_i(A_3 + Q_3) = \mu_i$, $i = \overline{1,3}$ (заметим, что решение $Y_1(t)$ системы (10) является и решением системы (20)).

Трёхмерный кусочно-постоянный вариант теоремы доказан.

4. Бесконечная дифференцируемость и n-мерный случай. Для чётного $n \geqslant 4$ и параметров $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0$ по доказанному двумерному варианту теоремы существуют $n/2$ двумерных систем-блоков: исходных $\dot{x} = A_j(t)x$ с ограниченными кусочно-постоянными на полуоси $[t_0, +\infty)$ матрицами $A_j(t)$ и показателями $0 < \lambda_{2j-1} \leqslant \lambda_{2j}$, $j = \overline{1, n/2}$, и возмущённых $\dot{y} = A_j(t)y + Q_j(t)y$ с показателями $\mu_{2j-1} \leqslant \mu_{2j} < 0$, $j = \overline{1, n/2}$, и кусочно-постоянной матрицей $Q_j(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Это доказывает теорему в кусочно-постоянном варианте и при чётном n. В случае нечётного $n \geqslant 5$ поступаем точно также, только один из блоков окажется трёхмерным.

Для завершения доказательства теоремы необходимо по уже определённым кусочно-постоянным матрицам $A(t)$ системы (1_n) (с показателями $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$) и $Q(t)$ системы (4_n) (с показателями $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0$) построить такие бесконечно дифференцируемые ограниченные матрицы $\tilde{A}(t)$ и $\tilde{Q}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, чтобы системы (1_n) и (4_n) с этими матрицами в качестве коэффициентов имели прежние показатели:

$$\lambda_i(\tilde{A}) = \lambda_i, \quad \lambda_i(\tilde{A} + \tilde{Q}) = \mu_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для превращения, например, кусочно-постоянной функции $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^1$ с единственной (изолированной) точкой разрыва $t_0 \in (t_1, t_2)$ воспользуемся на очень малом по длине $\varepsilon(t_0) = \exp(-t_0^2)$ интервале (t_1, t_2) сглаживающей функцией Гелбаума–Олмстеда [8, с. 54]

$$e_{\alpha\beta}(t, t_1, t_2) = \alpha + (\beta - \alpha)\exp\{-(t - t_1)^{-2}\exp[-(t - t_2)^{-2}]\}, \quad t \in (t_1, t_2),$$

$f(t_1)=\alpha,\ \ f(t_2)=\beta,$ принимающей на концах интервала значения α и β и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка. Применив этот процесс сглаживания в любой точке разрыва (а они все изолированы и расположены на полуоси достаточно редко) каждого элемента указанных матриц, получим необходимые ограниченные бесконечно-дифференцируемые матрицы $\tilde{A}(t)$ и $\tilde{Q}(t)\to 0,\ \ t\to\infty,$ для которых в силу равенства $\varepsilon(t)=\exp(-t^2),\ \ t\geqslant t_0,$ выполнено условие

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}[\|A(\tau)-\tilde{A}(\tau)\|+\|Q(\tau)-\tilde{Q}(\tau)\|]e^{M\tau}\,d\tau<+\infty$$

для достаточно большого $M>0.$ Поэтому согласно [9] на полуоси $[t_0,+\infty]$ будут асимптотически эквивалентными (приводимыми): система (1_n) – системе $\dot{x}=\tilde{A}(t)x,\ \ x\in\mathbb{R}^n,$ а система (4_n) – системе $\dot{y}=\tilde{A}(t)y+\tilde{Q}(t)y,\ \ y\in\mathbb{R}^n$ (с сохранением прежних показателей). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728.
2. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
3. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
4. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.
5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.
6. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Существование антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные при исчезающих на бесконечности линейных возмущениях // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 863–864.
7. *Миллионщиков В.М.* О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 4. С. 749–750.
8. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
9. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.07.2022 г.
После доработки 25.07.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.