ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1453–1460

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952+517.977

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. II

© 2022 г. В. И. Елкин

Рассматривается вопрос использования дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

DOI: 10.31857/S0374064122110024, EDN: LZVOCI

Введение. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t,y,p)=0,\quad \nu=\overline{1,l},$$

после приведения которой к специальному виду в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных, получим систему

$$\partial_k y^i = g^i_k(t,y,u),$$

где $\partial_k=\partial/\partial_{t^k}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$. В результате открывается возможность применения некоторых дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др. В статье [1] на основе понятия первого интеграла с помощью замены координат, в которую входят первые интегралы, была получена простая декомпозиция вида

$$\partial_k z^i=0,\quad i=\overline{1,q},\quad \partial_k z^j=h^j_k(t,x,u),\quad j=\overline{q+1,n}.$$

В данной работе рассматривается более общая декомпозиция, которая также имеет аналог в теории динамических систем с управлением под названием агрегирование (факторизация).

1. Агрегирование (факторизация) динамических систем с управлением. Напоминаем, что *динамической системой с управлением* называется система уравнений вида

$$\dot y^i=g^i(t,y,u),\quad i=\overline{1,n},\quad (t,y)\in M\subset\mathbb{R}^{n+1},\quad u\in U\subset\mathbb{R}^r. \tag{1}$$

Предполагается, что функции g^i, $\partial f^i/\partial y^j$, $\partial g^i/\partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно y называют фазовыми переменными (состояниями), u – управлениями (внешними воздействиями). Множество M называется фазовым пространством. Управления могут быть кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, в этом случае они называются допустимыми. Решением или фазовой траекторией системы (1) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (1).

Под *декомпозицией* управляемой системы (1) в этом пункте понимается приведение этой системы с помощью замены фазовых переменных $y\mapsto z=\varphi(t,y)$ к виду

$$\dot z^k=h^k(t,z^1,\ldots,z^m,u),\quad k=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\dot z^l=h^l(t,z^1,\ldots,z^n,u),\quad l=\overline{m+1,n}. \tag{3}$$

Представление (2), (3) характеризуется тем, что уравнения (2) образуют замкнутую систему, поэтому любое решение $z(t)$ системы (2), (3) может быть получено следующим образом. Сначала нужно найти решение $z^1(t), \ldots, z^m(t)$ системы (2) (соответствующее некоторому допустимому управлению $u(t)$), а затем, после подстановки $z^1(t), \ldots, z^m(t)$ в систему (3), которая становится замкнутой, найти оставшиеся функции $z^{m+1}(t), \ldots, z^n(t)$. Таким образом, декомпозиция (2), (3) позволяет свести процесс нахождения решения системы к нахождению решений для двух систем, фазовые пространства которых имеют размерности меньшие, чем n. Если существует такое представление, то говорят также, что система (1) допускает агрегирование порядка $n-m$. При этом среди функций

$$z^i = \varphi^i(t,y), \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

осуществляющих соответствующую замену фазовых координат

$$y \mapsto z = \varphi(t,y),$$

первые m функций называются *агрегатами*.

Для изучения возможностей такой декомпозиции в теории динамических систем применяется так называемый метод полных семейств векторных полей [2; 3; 4, с. 127]. Согласно этому методу отыскиваются условия, которым должны удовлетворять полные семейства векторных полей, для которых агрегаты (4) являются интегралами. Этот метод будем применять и для декомпозиции дифференциальных уравнений с частными производными далее в п. 2, где он будет подробно описан.

2. Декомпозиция дифференциальных уравнений с частными производными. Рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными специального вида, причём для упрощения и не ограничивая общности – “автономные”, т.е с правыми частями, не зависящими от аргументов t:

$$\partial_k y^i = g^i_k(y,u), \tag{5}$$
$$t \in I \subset \mathbb{R}^s, \quad y \in L \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^s,$$

где I, L, U – некоторые области. Речь пойдёт о декомпозиции системы (5) с помощью замены зависимых переменных y, точнее, о возможности преобразования системы с помощью замены переменных

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

к виду

$$\dot z^l = h^l(z^1,\ldots,z^m,u), \quad l=\overline{1,m}, \tag{7}$$

$$\dot z^i = h^i(z^1,\ldots,z^n,u), \quad i=\overline{m+1,n}. \tag{8}$$

Если такое представление возможно, то будем говорить, что система (5) допускает декомпозицию по зависимым переменным порядка $n-m$, причём первые m функций в замене переменных (6)

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i=\overline{1,m}, \tag{9}$$

называются агрегатами. Далее рассматривается применение метода полных семейств для исследования возможности декомпозиции (7), (8) для систем (5). *Полным семейством* векторных полей или операторов называется семейство полей*)

$$Z_a = b^i_a(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a=\overline{1,p}, \tag{10}$$

если:

1) $\operatorname{rank}\|b^i_a(y)\| = p$, т.е. векторы $Z_a(y)$, $a=\overline{1,p}$, линейно независимы в каждой точке $y \in M$ или, как ещё говорят, линейно несвязаны в области M;

*) По повторяющемуся индексу здесь и далее проводится суммирование.

2) выполняются равенства

$$[Z_a, Z_c] = h^d_{ac}(y) Z_d, \quad a, c, d = \overline{1, p},$$

т.е. все коммутаторы $[Z_a, Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h^d_{ac}(y)$ через остальные поля семейства.

Гладкая функция $\Phi(y)$, $y \in M$, называется *интегралом поля* Z_a или *корнем оператора* Z_a, если

$$Z_a(\Phi(y)) = b^i_a(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y^i} = 0.$$

Теорема 1 [5, с. 12]. *Полное семейство (10), $p < n$, имеет в окрестности каждой точки $m = n - p$ функционально независимых интегралов (полный набор)*

$$\Phi^k(y), \quad \operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n-m}} = n - m, \tag{11}$$

причём любой интеграл $\Phi(y)$ функционально выражается через полный набор

$$\Phi(y) = F(\Phi^1(y), \ldots, \Phi^m(y)).$$

Теорема 2 [5, с. 20]. *Пусть в области M заданы независимые функции (11). Тогда в окрестности каждой точки M найдётся полное семейство (10), $p = n - m$, для которого функции (11) составляют полный набор интегралов.*

Доказательство. Рассмотрим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\xi^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{12}$$

относительно компонент векторного поля $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i$. Для любой точки y найдётся окрестность, в которой некоторый минор m-го порядка матрицы системы уравнений (12) отличен от нуля. Фундаментальная система решений в этой окрестности определяет линейно несвязанное семейство векторных полей (10), для которого функции (11) являются интегралами. Любое поле $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i$, удовлетворяющее (12), должно линейно выражаться через поля (10). В частности, так как коммутаторы $[\xi_a, \xi_b]$ в силу свойства

$$[\xi, \eta](\Phi) = \xi(\eta(\Phi)) - \eta(\xi(\Phi)) \tag{13}$$

удовлетворяют (12), справедливо свойство 2) семейства (10). Следовательно, построенное семейство (10) является полным. Функции (11) составляют максимальный набор независимых интегралов семейства (10), поскольку в противном случае получилось бы противоречие с теоремой 1. Теорема доказана.

Переходим к условиям существования декомпозиции (7), (8). Введём в рассмотрение операторы полного дифференцирования системы (5) по переменным t^l (без явного дифференцирования по t^l в силу “автономности”)

$$X_l = g^i_l(y, u) \partial/\partial y^i, \quad l = \overline{1, s}. \tag{14}$$

Замена зависимых переменных (6) в системе (5) осуществляется следующим образом: нужно подействовать операторами (14) на функции (6)

$$X_l(\varphi^i(y)) = g^j_l(y, u) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j}, \quad i = \overline{1, n},$$

и выразить функционально полученные функции через (6):

$$g_l^j(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^n(y),u), \quad i=\overline{1,n}, \tag{15}$$

Функции $h^i(z^1,\ldots,z^n,u)$ являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (7), (8) возникает, когда первые m функций (15) функционально выражаются только через агрегаты (9), т.е.

$$g_l^j(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y),u), \quad i=\overline{1,m}. \tag{16}$$

Непосредственное применение этого условия не даёт конструктивного метода нахождения агрегатов и проверки возможности декомпозиции. Поэтому применяется опосредованный подход, когда сначала с помощью решения некоторых систем дифференциальных уравнений отыскиваются полные семейства векторных полей, для которых агрегаты являются интегралами, а затем находятся агрегаты, т.е. интегралы этих семейств. При этом совместность упомянутых систем дифференциальных уравнений определяет возможность декомпозиции.

Теорема 3. *Система (5) тогда и только тогда локально приводится к виду (7), (8) с помощью замены переменных (6), когда существует такое полное семейство (10),* $p=n-m<n$, *что*

$$[X_l,Z_a] = \mu_{la}^b(y,u)Z_b, \quad l=\overline{1,r}, \quad a,b=\overline{1,p}, \tag{17}$$

причём агрегаты (9) составляют полный набор интегралов семейства (10).

Доказательство. Необходимость. Для агрегатов (9) по теореме 2 существует полное семейство (10). Подействуем коммутаторами $[X_l,Z_a]$ на эти функции, используя свойство коммутатора (13). Получим

$$[X_l,Z_a](\varphi^i(y)) = X_l(Z_a(\varphi^i(y))) - Z_a(X_l(\varphi^i(y))) = 0. \tag{18}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ согласно формуле (16) функционально выражаются через полный набор интегралов семейства (10) и поэтому также являются интегралами этого семейства. В доказательстве теоремы 2 отмечено, что условие (18) влечёт за собой выполнение условия (17).

Достаточность. Для семейства (10) возьмём полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,n-p}$, и рассмотрим выражения (18). Из (18) вытекает, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ являются интегралами семейства (10) и по теореме 1 функционально выражаются через полный набор интегралов и, следовательно, $\varphi^i(y)$ являются агрегатами для системы (5). Теорема доказана.

Выражения (18) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$X_l(b_a^i) = Z_a(g^i) + \mu_{la}^b(y,u)b_c^i, \quad i=\overline{1,n}, \quad a,c=\overline{1,p}, \quad u\in U, \tag{19}$$

относительно неизвестных компонент семейства (10). В (19) выражения X_l, Z_a представляют собой действия полей X_l, Z_a на функции $b_a^i(y)$, $f^i(y,u)$ как операторов. После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,n-p}$, полного семейства (10), что, согласно [5, с. 12], сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых частей фактор-системы следует функции $g^j(y,u)\partial\varphi^k/\partial y^j$ выразить функционально через функции $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,n-p}$, т.е. представить их в виде

$$g^j(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^p(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y),u).$$

Построенные функции h^k и определяют искомую фактор-систему

$$\dot z^k = h^k(z,u), \quad k=\overline{1,m}.$$

Система (19) содержит помимо переменных $b_a^i(y)$ неизвестные параметрические переменные $\mu_{la}^b(y,u)$. Последнее обстоятельство усложняет дело. Кроме того, нужно добавить условие полноты $[Z_b, Z_a] = \kappa_{ba}^c(y)Z_c$ семейства (10), которое тоже представляет собой систему дифференциальных уравнений, причём с неизвестными параметрическими переменными $\kappa_{ba}^c(y)$. Рассмотрим метод исключения параметрических переменных с помощью использования якобиевых семейств. Сначала докажем одно утверждение, которое связывает полные семейства и их интегралы.

Для того чтобы исключить функции μ_{ua}^c из системы (19), следует задать некоторое свойство, которым должны обладать агрегаты (9). Это свойство заключается в определённом расположении базисного минора в якобиевой матрице $\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|$.

Теорема 4. *Пусть (10) – полное семейство векторных полей, (11) – полный набор интегралов этого семейства, а I – некоторое подмножество из p элементов множества индексов $\{1,\dots,n\}$, $\overline{I} = \{1,\dots,n\}\setminus I$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $|\xi_a^i|_{a=\overline{1,p}}^{i\in I} \neq 0$;

б) $\left|\dfrac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}\right|_{i\in\overline{I}}^{k=\overline{1,m}} \neq 0$.

Доказательство. Пусть выполняется условие а). Рассмотрим семейство полей η_b, $b \in I$, которое получается из исходного семейства линейным невырожденным преобразованием: $\eta_b = \mu_b^a(y)\xi_a$, $b \in I$. Здесь функции μ_b^a составляют матрицу, обратную к матрице $\|\xi_a^i\|_{a=\overline{1,p}}^{i\in I}$. Построенное семейство полей будет иметь вид

$$\eta_b = \frac{\partial}{\partial y^b} + \eta_b^c(y)\frac{\partial}{\partial y^c}, \quad b \in I, \quad c \in \overline{I}, \tag{20}$$

где η_b^c – некоторые функции. Очевидно, что функции φ^k являются интегралами и полей η_b, т.е.

$$\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^b} = -\eta_b^c\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^c}.$$

Отсюда вытекает, что выполняется условие б).

Пусть теперь выполняется условие б). Рассмотрим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестного векторного поля $\xi = \xi^i(y)\partial/\partial y^i$:

$$\xi^i\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i} = 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Очевидно, что поля ξ_a, $a = \overline{1,p}$, образуют фундаментальную систему решений этой системы уравнений. С другой стороны, нетрудно видеть, что существует фундаментальная система решений вида (20). Два семейства (10) и (20) должны быть связаны линейным невырожденным преобразованием. Отсюда вытекает справедливость условия а). Теорема доказана.

Предположим, что для искомых агрегатов (9) выполняется условие

$$\left|\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}\right|_{i=\overline{p+1,n}}^{k=\overline{1,m}} \neq 0, \quad p = n - m. \tag{21}$$

Справедлива

Теорема 5. *Для того чтобы система (1) допускала (локальную) факторизацию порядка $p = n - m$, характеризующуюся свойством (21), необходимо и достаточно, чтобы была совместной система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $b_a^l(y)$:*

$$X_l(b_a^l) = Z_a(f^l) - b_c^l Z_a(f^c), \tag{22}$$

$$Z_a(b_c^l) = Z_c(b_a^l), \tag{23}$$

где

$$Z_a = \frac{\partial}{\partial y^a} + b_a^l(y)\frac{\partial}{\partial y^l}, \quad u \in U, \quad a, c = \overline{1,p}, \quad l = \overline{p+1,n}. \tag{24}$$

Доказательство. Необходимость. Если система (1) допускает факторизацию со свойством (21), то, согласно доказательству теоремы 4, существует семейство вида (24). Семейство (24) должно удовлетворять соотношениям (17). Запишем эти соотношения покомпонентно:

$$\xi_u(\delta_a^i) - Z_a(f^i) = h_a^c \delta_c^i, \tag{25}$$

$$\xi_\beta(b_a^l) - Z_a(f^l) = h_a^c b_c^l, \tag{26}$$

где $i, a, c = \overline{1,p}$, $l = \overline{p+1,n}$, δ_a^i – символ Кронекера. Из (25) имеем $h_a^i = -Z_a(f^i)$. Подставив h_a^i в (26), получим (22). Равенства (23) представляют собой условие полноты семейства (24). Действительно, согласно доказательству теоремы 1, семейство (24) является полным тогда и только тогда, когда оно якобиево, т.е. $[Z_a, Z_c] = 0$, $a, c = \overline{1,p}$, что равносильно равенствам (23).

Достаточность. Если совместна система (22), (23), то семейство полей (24) является полным. Далее, положив $h_a^i = -Z_a(f^i)$, из (22) получим (25), (26), откуда вытекает (17). Следовательно, система (1) допускает факторизацию порядка p. Свойство (21) вытекает из вида семейства (24). Теорема доказана.

Уравнения (22) представляют собой систему уравнений относительно b_a^l без параметрических переменных.

При ином расположении базисного минора в матрице $\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|$ условия факторизации (22), (23) преобразуются очевидным образом. Итак, задача решения системы дифференциальных уравнений (19) с параметрическими переменными сведена к задаче решения нескольких систем дифференциальных уравнений вида (22) без параметрических переменных. Решение системы (22), т.е. набор компонент семейства полей (24), следует подставить для проверки в уравнения (23), представляющие собой условия полноты семейства (24). Лишь те решения системы (22), которые одновременно являются и решениями системы (23), определяют семейство, порождающее факторизацию порядка p.

Система такого вида является частным случаем так называемых уравнений в частных производных с одинаковой главной частью

$$a_k^j(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = b_k^i(x,y), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,r}. \tag{27}$$

Функции a_k^j, b_k^i гладкие в области $V \times U$, где $V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание. Системы (27) для $r = 1$ рассматривались в работе [4, с. 146]. Другой частный случай систем вида

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = b_j^i(x,y), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{28}$$

также хорошо известен (см., например, [4, с. 10]). Для проверки совместности следует рассмотреть равенство смешанных производных

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^s} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^s \partial x^j}$$

в силу (28).

Если эти уравнения тождественно выполняются, то система (27) вполне интегрируема. В противном случае получаем систему конечных уравнений, устанавливающих условия на y, как функций от x. Если каждое из этих уравнений продифференцировать по x^i и заменить производные $\partial y^i/\partial x^i$ их значениями из (28), то данные уравнения либо будут следствиями полученных уравнений, либо составят новую систему. Продолжив этот процесс, получим ряд систем, которые должны быть совместны, если уравнения (28) имеют решения. В противном

случае решений у системы (28) нет. Данные рассуждения и выводы можно применять и тогда, когда заданы какие-либо дополнительные функциональные соотношения между переменными y и x:

$$\eta^\alpha(y,x)=0, \quad \alpha=\overline{1,q}.$$

В работе [7] автором получен алгоритм проверки совместности и нахождения решений систем уравнений (27).

Наконец, рассмотрим один весьма общий случай систем, когда можно проверить совместность системы (22), (23), не решая предварительно (22). Данный случай собственно и называется случаем системы, находящейся в общем положении. Это такие системы, у которых отсутствуют нетривиальные первые интегралы. Вопрос о существовании первых интегралов был рассмотрен в статье [1]. Термин системы, находящейся в общем положении, был введён для динамических систем с управлением [8, с. 149]

$$\dot{y}^i=f^i(y,u), \quad i=\overline{1,n}, \quad y\in M\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^r. \tag{29}$$

В определённом смысле почти все системы вида (29) находятся в общем положении [8, с. 149].

Напомним алгоритм нахождения первых интегралов для системы (5) [1], который заключается в процессе пополнения. Операторы полного дифференцирования (14) после подстановки в них всевозможных постоянных $u\in U$ дают ассоциированное семейство векторных полей в M, компоненты которых зависят от Y. Далее нужно выделить в ассоциированном семействе максимальное число линейно несвязанных векторных полей, объединить эти поля и пополнить в области изменения переменных M. Процесс пополнения заключается в постепенном добавлении коммутаторов до тех пор, пока все новые коммутаторы не будут линейно выражаться через уже полученные. Если число полей s в полученном полном семействе меньше числа переменных n, то нетривиальные первые интегралы существуют, причём число функционально независимых интегралов равно $n-s$. Таким образом, нетривиальные первые интегралы отсутствуют, если $s=n$, т.е. полученное полное семейство состоит из n линейно несвязанных полей. Следовательно, матрица из компонент этого семейства является квадратной размерности $n\times n$ невырожденной матрицей. Теперь заметим, что ассоциированные поля удовлетворяют соотношениям (17). Прямым вычислением подтверждается, что коммутаторы этих полей также удовлетворяют (17), а следовательно, и поля построенного полного семейства, которые также удовлетворяют и соотношениям (22), так как эти соотношения являются следствиями соотношений (17). Для построенного полного семейства соотношения (22) характеризуются следующим обстоятельством: левую часть можно трактовать как умножение невырожденной матрицы на производные от b_a^l. В результате эти производные можно выразить через остальные члены уравнений и уравнения преобразуются в систему вида (28). После подстановки производных в равенство (23) эти дифференциальные связи заменяются на конечные связи.

Согласно замечанию, в этом случае при проведении алгоритма исследования на совместность системы (22) дополнительные дифференциальные связи типа (23) можно заменить на конечные связи и рассматривать их в рамках проведения данного алгоритма.

Заключение. Рассмотрена возможность применения методов теории управления в теории уравнений с частными производными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00625).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елкин В.И.* Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. I // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1474–1482.
2. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. I. Группы, характеризующие динамические системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 862–872.

3. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. II. Фазовые организационные структуры // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 5. С. 1093–1103.
4. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М., 2003.
5. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
7. *Елкин В.И.* Общее решение систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1389–1398.
8. *Лобри К.* Динамические полисистемы и теория управления // Математические методы в теории систем. М., 1979. С. 134–173.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 12.05.2022 г.
После доработки 12.05.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.