

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов

Рассмотрена специальная краевая задача для нелинейной параболической системы, предложенной Дж. Мюрреем и применяемой для описания популяционной динамики. Краевые условия задачи предполагают наличие у возможных решений нулевого фронта – линии, на которой искомые функции обращаются в нуль, и происходит вырождение параболического типа системы. Частным случаем подобных решений для одиночных вырождающихся уравнений можно назвать нелинейные тепловые (фильтрационные, диффузионные) волны, рассмотренные в работах Я.Б. Зельдовича, Г.И. Баренблатта, А.А. Самарского. В настоящей статье доказана теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения исследуемой задачи. В ходе доказательства построено решение в виде рядов Тейлора, записаны рекуррентные формулы коэффициентов, которые в дальнейшем могут быть использованы для верификации численных расчётов. Представлены некоторые точные решения системы, имеющие нулевой фронт. Отдельно рассмотрены примеры, иллюстрирующие поведение решения при отступлении от условий теоремы. В первом примере показана возможность существования решений исходной системы с двумя различными нулевыми фронтами. Второй пример – аналог известного контрпримера С.В. Ковалевской в рассмотренном случае.

DOI: 10.31857/S0374064122110036, EDN: LZWFJI

Введение. В статье исследуется одномерная система двух квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. Вырождение параболического типа происходит при равенстве нулю неизвестных функций. Уравнения при этом приобретают некоторые гиперболические свойства. Квазилинейные уравнения параболического типа [1, с. 473] и их системы достаточно часто используются при моделировании различных эволюционных процессов в теплофизике [2], механике сплошных сред [3, 4], математической биологии [5, 6] и др. Особое место среди них занимают уравнения и системы с вырождением [7], описывающие интересные (в том числе с точки зрения математики) нелинейные эффекты. Одним из таких эффектов может быть наличие нетривиальных решений, обращающихся в нуль на некоторой кривой, которая называется *нулевым фронтом*. Решения с нулевым фронтом, в частности, являются составной частью так называемых тепловых (фильтрационных, диффузионных) волн.

Точные решения с нулевым фронтом для описанных выше уравнений рассматривались Я.Б. Зельдовичем [8] в рамках исследования механизмов лучистой теплопроводности (тепловые волны), Г.И. Баренблаттом [9] при моделировании фильтрации политропного газа, проходящего через пористый грунт (волны фильтрации). В монографии акад. А.А. Самарского [2] представлены некоторые точные решения указанного типа, исследованы нелинейные эффекты, связанные с вырождением (при равенстве нулю искомой функции старшие производные обращаются в нуль, параболический тип вырождается, фронт движется с конечной скоростью). Добавим, что точные решения нелинейного уравнения теплопроводности (диффузии, фильтрации) также можно найти в справочнике [10], однако далеко не все из них имеют нулевой фронт.

В научной школе акад. А.Ф. Сидорова разработаны методы построения аналитических, точных и приближённых решений с нулевым фронтом, предложены постановки краевых задач, подразумевающих наличие такого фронта [11]. Особо выделим метод рядов, часто использующийся в гиперболических задачах [12] и адаптированный А.Ф. Сидоровым и его учениками для решения параболических задач с вырождением (характеристические [13] и специальные [14]

ряды). Рассмотрены задачи о построении решений с нулевым фронтом в одномерных [15, 16], симметричных [17, 18] и существенно не одномерных [19, 20] постановках. Доказаны теоремы существования и единственности аналитических решений таких задач, решения построены в виде степенных рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Сходимость последних доказывается методом мажорант с использованием теоремы Коши–Ковалевской. В работах [16, 17] построены точные решения, имеющие нулевой фронт, при этом исходная задача, как правило, сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (или системы [15]). Такой метод редукции нередко используется при построении точных решений (см., например, статьи [21, 22], а также справочник [10]). В ряде работ исследования дополнены численными расчётами, выполненными на основе метода граничных элементов [19, 23, 24].

В последнее время авторами предприняты усилия для распространения полученных ранее результатов на более сложные математические объекты. В частности, решения с нулевым фронтом удалось построить для нелинейной вырождающейся параболической системы, возникающей в математической биологии. Она отличается от реакционно-диффузионных систем [16] существенно более сложной взаимосвязью уравнений, что делает невозможным автоматическое перенесение ранее полученных результатов и накладывает свой отпечаток на построение решения, а также на доказательство сходимости. Настоящая статья обобщает и развивает результаты, полученные в статье [25], а именно, для системы более общего вида обоснована теорема существования и единственности аналитического решения с заданным нулевым фронтом; предложена конструктивная процедура построения решения в виде степенных рядов и доказана сходимость последних; представлены некоторые точные решения, имеющие нулевой фронт; рассмотрены примеры, иллюстрирующие поведение решения при отступлении от условий теоремы.

1. Постановка задачи. В монографии [26, с. 10] представлена нелинейная вырождающаяся система

$$u_t - [(\alpha_1 + \beta_1 v_x)u]_x = f(u, v), \quad v_t - [(\alpha_2 - \beta_2 u_x)v]_x = g(v, u), \quad \alpha_{1,2}, \beta_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

лежащая в основе двумерной модели “хищник–жертва” и представляющая собой обобщение хорошо известной модели Лотки–Вольтерры [27, с. 24]. Данная модель описывает популяционную динамику двух взаимодействующих видов – хищников v и жертв u . Константы α_1 и α_2 обозначают скорости движения жертв и хищников, соответственно, до начала их взаимодействия (т.е. пока хищники не заметили жертв и не начали преследование). С началом преследования скорости меняют значения на $\alpha_1 + \beta_1 v_x$ и $\alpha_2 - \beta_2 u_x$ (см. [26, с. 10, рис. 1.4.b]).

Замечание 1. Биологический смысл данной модели диктует следующие ограничения на константы: $\alpha_1 \alpha_2 \geq 0$ и $\beta_{1,2} > 0$. В данной статье будет предполагаться лишь, что $\beta_{1,2} \neq 0$. Этого достаточно для корректного проведения планируемых исследований. Случай $\beta_{1,2} = 0$ также встречается в литературе, однако при этом система (1) становится полупараболической системой первого порядка без вырождения.

Выполним в (1) дифференцирование и разрешим уравнения относительно u_t и v_t :

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + v_x u_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x) + g(v, u). \quad (2)$$

Пусть u, v – искомые функции, f, g – известные достаточно гладкие функции (в [25] они предполагаются степенными), причём $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Согласно монографии [26, с. 10, рис. 1.4.b] целесообразно рассматривать решения, имеющие нулевой фронт. Поэтому для системы (2) представляют интерес краевые условия

$$u(t, x)|_{x=a(t)}, \quad v(t, x)|_{x=b(t)} = 0. \quad (3)$$

Аналитическое исследование задачи (2), (3) представляется весьма сложным, поскольку метод характеристических рядов для раскрытия особенностей здесь, по-видимому, неприменим. Отметим, что авторам неизвестны результаты аналитического исследования даже более простой задачи с условиями вида (3) для системы “реакция–диффузия”

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2/\sigma + F(u, v), \quad v_t = vv_{xx} + v_x^2/\delta + G(v, u), \quad \sigma, \delta > 0. \quad (4)$$

В связи с этим в качестве первого шага исследований рассмотрим случай, когда нулевые фронты для искомых функций совпадают. Пусть $a(t) = b(t)$ и краевые условия имеют вид

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \quad (5)$$

Считаем, что нулевой фронт обеих искомых функций здесь определяется достаточно гладкой кривой $x = a(t)$, такой, что $a'(0) \neq 0$. Подобный пример при $\alpha_1 = \alpha_2$ рассмотрен в монографии [26, с. 11], где фронт предполагался линейным: $x = -\alpha_1 t$. Данная ситуация (совпадающий фронт) может возникнуть, когда хищники полностью “покрывают” жертв, делая невозможным продвижение переднего фронта последних дальше своего. Общий случай задачи (2), (3), когда каждая из функций u и v имеет свой фронт, на данном этапе исследований не рассматривается.

Параболичность первого уравнения системы (2) определяется группой старших производных v_{xx} . Однако вырождение параболического типа происходит при равенстве нулю (например, на линии фронта) другой функции – u . Кроме того, уравнение разрешено относительно u_t , что весьма характерно для эволюционных уравнений – весь процесс отслеживается относительно производной по времени. То же самое имеет место и для второго уравнения.

Для сравнения обратимся к системе типа “реакция–диффузия” (4), рассмотренной в статье [16]. Здесь при $F = F(u)$, $G = G(v)$ имеем два независимых одномерных уравнения типа нелинейной теплопроводности [2, с. 17] (фильтрации [11, с. 258]). Таким образом, исследование аналитической разрешимости задачи (2), (5) будет иметь ряд отличий от проводимых ранее. В дальнейшем это будет показано при построении решения в виде рядов и доказательстве их сходимости.

В завершении этого пункта добавим, что выполнение равенства $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ гарантирует существование хотя бы одного аналитического решения задачи (2), (5) – тривиального. В следующем пункте будет доказано существование и единственность нетривиального аналитического решения. Под аналитической (в точке) здесь и далее понимается функция, совпадающая в некоторой окрестности (точки) со своим тейлоровским разложением.

2. Теорема существования. Для задачи (2), (5) справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия:

- 1) $a(t)$ и f, g – аналитические функции в точках $t = 0$ и $(0, 0)$ соответственно;
- 2) $a'(0) + \alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2$, $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

Тогда задача (2), (5) имеет единственное нетривиальное аналитическое решение в окрестности кривой $x = a(t)$.

Доказательство. Доказательство проведём в два этапа: на первом этапе построим решение задачи в виде формальных рядов Тейлора по степеням $x - a(t)$, на втором докажем их сходимость с помощью метода мажорант. При этом получим конструктивные формулы решения с возможностью их использования для верификации численных расчётов, а также для оценки радиуса сходимости.

Для удобства введём новую переменную $z = x - a(t)$. Задача (2), (5) примет вид

$$u_t = (\alpha_1 + a')u_z + \beta_1(uv_{zz} + v_z u_z) + f(u, v), \quad v_t = (\alpha_2 + a')v_z - \beta_2(vu_{zz} + u_z v_z) + g(v, u), \quad (6)$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (7)$$

Отметим, что такая замена глобально невырождена.

Решение задачи (6), (7) построим в виде рядов Тейлора

$$u(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad v(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n} \Big|_{z=0}. \quad (8)$$

Определим коэффициенты рядов. Из краевого условия (7) следует тождество $u_0, v_0 \equiv 0$. Положив в (6) $z = 0$, получим систему

$$(\alpha_1 + a')u_1 + \beta_1 v_1 u_1 = 0, \quad (\alpha_2 + a')v_1 - \beta_2 u_1 v_1 = 0, \quad (9)$$

из которой несложно выразить коэффициенты u_1, v_1 .

Замечание 2. Рассмотрим систему (9). При $\alpha_{1,2} + a' \neq 0$ тождество $u_1 \equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется тождество $v_1 \equiv 0$. Неравенство же $\alpha_{1,2} + a' \neq 0$ всегда справедливо в некоторой окрестности $t = 0$, так как по условию теоремы $a(t)$ – аналитическая функция, причём $a'(0) \neq -\alpha_{1,2}$. Отсюда следует, что система (9) имеет лишь два решения: $u_1, v_1 \equiv 0$ и

$$v_1 = -\frac{\alpha_1 + a'}{\beta_1}, \quad u_1 = \frac{\alpha_2 + a'}{\beta_2}. \quad (10)$$

В дальнейшем будем предполагать выполнение равенств (10), так как случай $u_1, v_1 \equiv 0$ приводит к тривиальному решению задачи (см. ниже).

Чтобы найти u_2, v_2 , необходимо продифференцировать оба уравнения системы (6) по z и положить $z = 0$. Первое уравнение запишется в виде

$$u'_1 = (\alpha_1 + a')u_2 + \beta_1(u_1v_2 + v_2u_1 + v_1u_2) + f_1,$$

в котором $f_1 = [f(u, v)]_z|_{z=0}$. Так как $(\alpha_1 + a')u_2 + \beta_1v_1u_2 = 0$, то из данного равенства можно выразить коэффициент $v_2 = (u'_1 - f_1)/(2\beta_1u_1)$. В то же время из тождества $u_1, v_1 \equiv 0$ следует, что $v_2 \equiv 0$.

Используя обозначение $g_1 = [g(v, u)]_z|_{z=0}$, повторим те же рассуждения для второго уравнения системы и получим формулы

$$v_2 = \frac{u'_1 - f_1}{2\beta_1u_1} = \frac{a'' - f_1\beta_2}{2\beta_1(\alpha_2 + a')}, \quad u_2 = \frac{v'_1 - g_1}{-2\beta_2v_1} = -\frac{a'' + g_1\beta_1}{2\beta_2(\alpha_1 + a')}. \quad (11)$$

Остальные коэффициенты определяются аналогично, возрастает лишь порядок дифференцирования. Применив к каждому уравнению системы (6) оператор $\partial^n[\cdot]/\partial z^n|_{z=0}$, получим равенства

$$\begin{aligned} u'_n &= (\alpha_1 + a')u_{n+1} + \beta_1 \left(\sum_{k=0}^n C_n^k u_k v_{n+2-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k v_{k+1} u_{n+1-k} \right) + f_n, \\ v'_n &= (\alpha_2 + a')v_{n+1} - \beta_2 \left(\sum_{k=0}^n C_n^k v_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k u_{k+1} v_{n+1-k} \right) + g_n, \end{aligned} \quad (12)$$

в которых использованы обозначения

$$f_n = \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad g_n = \frac{\partial^n g(v, u)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}.$$

С помощью рекуррентной формулы (12) индукцией по n можно показать, что тождество $u_1, v_1 \equiv 0$ приводит к равенству нулю всех коэффициентов.

Выразим из формул (12) коэффициенты v_{n+1} и u_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{\beta_2}{\beta_1(\alpha_2 + a')(1+n)} \left[u'_n - \beta_1 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u_k v_{n+2-k} - f_n \right], \\ u_{n+1} &= \frac{\beta_1}{\beta_2(\alpha_1 + a')(1+n)} \left[v'_n + \beta_2 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) v_k u_{n+2-k} - g_n \right], \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Замечание 3. Процедура построения решения наглядно демонстрирует взаимосвязь уравнений системы (6). При дифференцировании первого уравнения, разрешённого относительно u_t , находится коэффициент v_{n+1} , который выражается, в том числе, через коэффициенты ряда Тейлора функции u . То же самое можно сказать и о втором уравнении.

Решение задачи (6), (7) построено в виде рядов (8) с коэффициентами $u_0, v_0 \equiv 0$, (10), (11) и (13). Первый этап доказательства завершен.

Второй этап доказательства разберём кратко. Сходимость рядов докажем методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи сделаем в системе (6) замену

$$u(t, z) = u_1 z + z^2 U(t, z), \quad v(t, z) = v_1 z + z^2 V(t, z),$$

которая представляет собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (8). При такой замене отпадает необходимость рассматривать краевое условие (7), так как оно выполняется автоматически.

После приведения подобных членов и деления на z задачу (6), (7) можно свести к системе

$$\begin{aligned} 4V + 5zV_z + z^2V_{zz} &= \xi_0(t) + z\xi_1(t, U, V, U_t) + z^2\xi_2(t, U, V, U_z, V_z) + z^3\xi_3(z, t, U, V, U_z, V_z, V_{zz}), \\ 4U + 5zU_z + z^2U_{zz} &= \eta_0(t) + z\eta_1(t, V, U, V_t) + z^2\eta_2(t, V, U, V_z, U_z) + z^3\eta_3(z, t, V, U, V_z, U_z, U_{zz}). \end{aligned} \quad (14)$$

В левых частях уравнений (14) собраны слагаемые, относительно которых могут быть выражены коэффициенты наивысшего порядка. Здесь также проявляют себя специфические свойства системы, описанные в замечании 3.

Вид функций $\xi_i, \eta_i, i = 0, 1, 2, 3$, не приводится в силу крайней громоздкости, отметим лишь, что все они будут аналитическими по своим переменным (в начале координат). Отсюда следует, что для них можно подобрать мажоранты.

При выполнении мажорантных оценок

$$U|_{z=0}, V|_{z=0} \ll W_0, \quad U_z|_{z=0}, V_z|_{z=0} \ll W_1, \quad \xi_0(t), \eta_0(t) \ll \psi_0(t),$$

$$\xi_1(t, U, V, U_t), \eta_1(t, V, U, V_t) \ll \psi_1(t, W, W, W_t),$$

$$\xi_2(t, U, V, U_z, V_z), \eta_2(t, V, U, V_z, U_z) \ll \psi_2(t, W, W, W_z, W_z),$$

$$\xi_3(z, t, U, V, U_z, V_z, V_{zz}), \eta_3(z, t, V, U, V_z, U_z, U_{zz}) \ll \psi_3(z, t, W, W, W_z, W_z, W_{zz})$$

решение задачи

$$W_{zz} = \frac{\partial \psi_1(t, W, W, W_t)}{\partial z} + \psi_2(t, W, W, W_z, W_z) + z\psi_3(z, t, W, W, W_z, W_z, W_{zz}), \quad (15)$$

$$W(t, z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t, z)|_{z=0} = W_1(t) \quad (16)$$

мажорирует решение системы (14). В этом можно убедиться, построив решения в виде рядов Тейлора

$$U(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{z^n}{n!}, \quad V(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}, \quad W(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{z^n}{n!},$$

$$U_n = \left. \frac{\partial^n U}{\partial z^n} \right|_{z=0}, \quad V_n = \left. \frac{\partial^n V}{\partial z^n} \right|_{z=0}, \quad W_n = \left. \frac{\partial^n W}{\partial z^n} \right|_{z=0}.$$

Задачу (15), (16) можно привести к задаче вида Ковалевской, продифференцировав уравнение (15) по z , разрешив его относительно W_{zzz} и добавив третье краевое условие $W_{zz}(t, 0) = W_2(t)$. Все входные данные являются аналитическими, следовательно, согласно теореме Коши–Ковалевской, полученная задача имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана.

3. Точные решения. Приведём некоторые точные решения. Под точными решениями авторы в данном случае понимают решения задачи, которые представимы в виде суперпозиции элементарных функций, квадратур, или же их построение сведено к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Пусть в задаче (6), (7) фронт описывается линейной функцией $a(t) = \gamma t$, $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$u_t = (\alpha_1 + \gamma)u_z + \beta_1(uv_{zz} + v_z u_z) + f(u, v), \quad v_t = (\alpha_2 + \gamma)v_z - \beta_2(vu_{zz} + u_z v_z) + g(v, u), \quad (17)$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (18)$$

Если задача (17), (18) удовлетворяет условиям теоремы, то, очевидно, имеет единственное нетривиальное аналитическое решение. Покажем, что это решение не зависит от переменной t , и задача допускает редукцию к задаче Коши для системы двух ОДУ второго порядка.

Исследуем коэффициенты рядов (8) в рассматриваемом случае. В силу линейности фронта первые коэффициенты постоянны и для них справедливы формулы

$$u_0, v_0 \equiv 0, \quad v_1 = -\frac{\alpha_1 + \gamma}{\beta_1}, \quad u_1 = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2}, \quad v_2 = -\frac{f_1 \beta_2}{2\beta_1(\alpha_2 + \gamma)}, \quad u_2 = -\frac{g_1 \beta_1}{2\beta_2(\alpha_1 + \gamma)}.$$

Замечание 4. Здесь выбраны ненулевые коэффициенты u_1 и v_1 , так как в противном случае получим тривиальное решение $u, v \equiv 0$.

С помощью формулы (13) индукцией по n можно доказать, что все остальные коэффициенты также являются константами:

$$v_{n+1} = \frac{-\beta_2}{\beta_1(\alpha_2 + \gamma)(1+n)} \left[\beta_1 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u_k v_{n+2-k} + f_n \right],$$

$$u_{n+1} = \frac{\beta_1}{\beta_2(\alpha_1 + \gamma)(1+n)} \left[\beta_2 \sum_{k=2}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) v_k u_{n+2-k} - g_n \right], \quad n \geq 2.$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Утверждение. Задача (6), (7) при $a(t) = \gamma t$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha_{1,2} + \gamma \neq 0$, $f(0, 0) = g(0, 0)$ может быть сведена к задаче Коши для системы ОДУ

$$\beta_1(uv'' + v'u') + (\alpha_1 + \gamma)u' + f(u, v) = 0, \quad -\beta_2(vu'' + u'v') + (\alpha_2 + \gamma)v' + g(v, u) = 0, \quad (19)$$

$$u(0) = v(0) = 0, \quad v'(0) = -\frac{\alpha_1 + \gamma}{\beta_1}, \quad u'(0) = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2}, \quad (20)$$

имеющей единственное нетривиальное аналитическое решение.

Система (19) наследует все характерные особенности исходной системы, в частности, оба уравнения не разрешимы относительно старшей производной. Для корректной постановки задачи Коши помимо преобразованного условия (7) добавлено значение первых производных (коэффициенты $u_1 = (\alpha_2 + \gamma)/\beta_2$ и $v_1 = -(\alpha_1 + \gamma)/\beta_1$). Существование нетривиального аналитического решения $v(z)$, $u(z)$ задачи (19), (20) следует из доказанной теоремы.

Замечание 5. При выборе $f, g \equiv 0$ для всех $n \geq 2$ имеет место равенство $v_n, u_n = 0$. При этом решение, также как и фронт, линейно:

$$v(z) = -\frac{\alpha_1 + \gamma}{\beta_1} z, \quad u(z) = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2} z.$$

4. Примеры. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие поведение решения при отступлении от условий теоремы. В первом примере показана возможность существования решений системы (2) с двумя различными нулевыми фронтами. Второй пример – аналог известного контрпримера С.В. Ковалевской.

Пример 1. Рассмотрим систему (2) при $f, g \equiv 0$:

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + v_x u_x), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x). \quad (21)$$

Пусть каждая из неизвестных функций имеет свой фронт, заданный линейной функцией, т.е.

$$u(t, x)|_{x=a_1 t} = v(t, x)|_{x=a_2 t} = 0, \quad a_{1,2} \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Решение построим в виде плоскостей $u = A_1 t + B_1 x$, $u = A_2 t + B_2 x$, где $A_{1,2}, B_{1,2} \in \mathbb{R}$. Подставив эти конструкции в (22), получим равенства

$$A_1 + B_1 a_1 = 0, \quad A_2 + B_2 a_2 = 0. \quad (23)$$

Из (21) и (23) следуют формулы

$$u = \frac{a_2 + \alpha_2}{\beta_2}(x - a_1 t), \quad v = \frac{a_1 + \alpha_1}{\beta_1}(x - a_2 t). \quad (24)$$

При $a_2 > a_1$ функции u и v положительны в области

$$t \geq 0, \quad a_1 t < x < a_2 t. \quad (25)$$

Таким образом, задача (21), (22) имеет в области (25) аналитическое решение в виде двух диффузионных волн (24) с разными линейными фронтами.

Как уже упоминалось, общий случай, когда функции u и v имеют различные фронты, требует развёрнутого исследования. Очевидно, что обобщение полученных в этой статье результатов представляет собой нетривиальную задачу. Построение данного примера – первый пробный шаг в её решении.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$u_t = \beta(uv_{xx} + v_x u_x), \quad v_t = -\beta(vu_{xx} + u_x v_x), \quad (26)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x). \quad (27)$$

Здесь (26) – это система (2) при $\beta_{1,2} = \beta$, $\alpha_{1,2} = 0$, $f, g \equiv 0$. Краевые условия (27) записаны относительно переменной t .

Построим решение задачи (26), (27) в виде рядов

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad u_n(x) = \left. \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right|_{t=0}, \quad v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad v_n(x) = \left. \frac{\partial^n v}{\partial t^n} \right|_{t=0}. \quad (28)$$

Процедуру, описанную в предыдущем пункте, повторим относительно переменной t . Коэффициенты $u_0(x)$, $v_0(x)$ известны, остальные коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta(u_0 v_0'' + v_0' u_0'), \quad v_1 = -\beta(v_0 u_0'' + u_0' v_0'), \quad \dots \\ \dots, \quad u_{n+1} &= \beta \sum_{k=0}^n C_n^k (u_k v_{n-k}'' + v_k' u_{n-k}'), \quad v_{n+1} = -\beta \sum_{k=0}^n C_n^k (v_k u_{n-k}'' + u_k' v_{n-k}'). \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть теперь $u_0(x) = -v_0(x)$. В силу формул (29) индукцией по n несложно показать, что $u(t, x) = -v(t, x)$.

Наличие у рядов (28) ненулевого радиуса сходимости зависит от начальных данных. Для примера рассмотрим случай степенных функций $u_0(x) = -x^l$, $v_0(x) = x^l$, где $l \in \mathbb{N}$. При $l = 1$ ряды (28) являются полиномами первой степени, решение существует для всех $t, x \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$u(t, x) = -x - \beta t, \quad v(t, x) = x + \beta t.$$

В случае $l = 2$ коэффициенты могут быть записаны в явном виде $u_n = -\beta^n 6^n n! x^2$, $v_n = \beta^n 6^n n! x^2$. Эти формулы превращают ряды (28) в геометрические прогрессии, сходящиеся при $x \in \mathbb{R}$ и $t < 1/|6\beta|$ к функциям

$$u(t, x) = -\frac{x^2}{1 - 6\beta t}, \quad v(t, x) = \frac{x^2}{1 - 6\beta t}.$$

Расходимость же можно наблюдать при начальных данных $u_0(x) = -x^l$, $v_0(x) = x^l$, где $l \geq 3$. В частности, при $l = 3$ ряды (28) запишутся в виде

$$u(t, x) = -x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n b_n}{n!} (xt)^n, \quad v(t, x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n b_n}{n!} (xt)^n. \quad (30)$$

Коэффициент b_n определяется рекуррентно по формуле

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 15, \quad b_2 = 630, \quad \dots, \quad b_{n+1} = (n+5) \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}.$$

Несложно показать, что последовательность b_{n+1} строго возрастает.

Пользуясь формулой Даламбера, определим радиус R сходимости суммы в формулах (30):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n \beta^n}{n!} \frac{(n+1)!}{b_{n+1} \beta^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)b_n}{|\beta|(n+5) \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}}.$$

Так как справедлива оценка

$$0 \leq \frac{b_n}{\sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}} \leq \frac{b_n}{C_n^0 (n+3) b_0 b_n} \equiv \frac{1}{n+3},$$

то по признаку существования предела последовательности имеем равенство

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)b_n}{|\beta|(n+5) \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}} = \frac{1}{|\beta|} \cdot 0 = 0.$$

Получили, что $R = 0$ и ряды (30) сходятся лишь при $xt = 0$. Остальные случаи при $l \geq 4$ рассматриваются аналогично.

Таким образом, при рассмотрении начальной задачи для системы (2) её аналитическая разрешимость обусловлена выбором краевых условий. Сходимость рядов (28) зависит от того, будет ли рост коэффициентов u_n , v_n выше факториального. Иначе говоря, задание начальных условий для рассмотренной системы в общем случае невозможно. Данный пример представляет собой аналог известного контрпримера к теореме Коши–Ковалевской [28, с. 163]. Добавим, что случай $a'(0) + \alpha_i = 0$, $i = 1, 2$, также не подпадающий под действие теоремы, представляет отдельный интерес и требует детального рассмотрения. Например, при $a'(t) \equiv \text{const}$ (см. п. 3) решение, по-видимому, будет содержать произвольную функцию.

Заключение. Настоящей работой авторы продолжают цикл исследований аналитической разрешимости задач о построении решений с нулевым фронтом для нелинейных вырождающихся параболических уравнений и систем. Рассмотренный здесь математический объект примечателен тем, что существенно отличается от исследовавшихся ранее реакционно-диффузионных систем наличием более сложных нелинейностей.

Сказанное выше делает невозможным автоматическое перенесение полученных результатов на указанный случай и привносит в построение решения и доказательство теоремы существования определённые сложности, которые авторам удалось успешно преодолеть. Так, в статье доказана теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения задачи с заданным нулевым фронтом для системы уравнений типа “хищник–жертва”. В ходе доказательства, которое носит конструктивный характер, построено решение в виде рядов Тейлора. Предложенные рекуррентные формулы коэффициентов могут быть использованы для верификации численных расчётов, выполненных, например, на основе метода граничных элементов (см. [19, 23, 24]). Отдельно рассмотрен случай линейного фронта, для которого удаётся найти точное решение, построение которого сводится к интегрированию задачи Коши для ОДУ. Подробно разобраны два примера.

Хотя рассматриваемая система возникает в математической биологии [26], прикладное значение найденных решений неочевидно, поскольку получить значимые результаты для наиболее содержательного случая при наличии двух различных нулевых фронтов пока не удалось. Построен только единичный пример. Тем не менее отрезки полученных рядов могут быть использованы для тестирования численных алгоритмов решения данной задачи, основанных на методе коллокаций [24] или граничных элементов [23].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект “Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа” № 121041300058-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.
3. *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford, 2007.
4. *Cuesta C.M., Pop I.S.* Numerical schemes for a pseudo-parabolic Burgers equation: discontinuous data and long-time behaviour // J. of Comput. and Appl. Math. 2009. V. 224. P. 269–283.
5. *Perthame B.* Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. New York, 2015.
6. *Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B.* Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition // J. of Appl. Math. and Comput. 2021. № 1. P. 1–26.
7. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. New York, 1993.
8. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.
9. *Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., 1984.
10. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton; London; New York, 2011.
11. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М., 2001.
12. *Казаков А.Л.* Обобщённая задача Коши с данными на двух и трёх поверхностях для квазилинейной системы с особенностями в коэффициентах перед производными // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 530.
13. *Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.* Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 1993. V. 8. Iss. 2. P. 101–125.
14. *Филимонов М.Ю.* Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 801–808.
15. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислит. технологии. 2012. Т. 17. № 1. С. 57–68.
16. *Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A.* Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. V. 12. № 6. P. 999.
17. *Казаков А.Л., Орлов Св.С., Орлов С.С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 544–560.
18. *Казаков А.Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068.
19. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.* Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 119–129.
20. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21. № 2 (74). С. 56–65.
21. *Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И.* Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 3. С. 309–316.

22. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reductions and exact solutions of Lotka–Volterra and more complex reaction–diffusion systems with delays // *Appl. Math. Lett.* 2022. V. 125. P. 107731.
23. *Казаков А.Л., Нефедова О.А., Сневак Л.Ф.* Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2019. Т. 59. № 6. С. 1047–1062.
24. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Сневак Л.Ф.* Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2021. Т. 24. № 4 (88). С. 64–78.
25. *Кузнецов П.А.* Аналитические диффузионные волны в нелинейной параболической модели “хищник–жертва” // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2022. Т. 28. № 2. С. 158–167.
26. *Murray J.D.* *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.* Interdisciplinary Applied Mathematics. V. 18. New York, 2003.
27. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2012.
28. *Козлов В.В.* Софья Ковалевская: математик и человек // *Успехи мат. наук.* 2000. Т. 55. Вып. 6 (336). С. 159–172.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 23.06.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.