ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1471–1483

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.984

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ: СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ И АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

© 2022 г. И. С. Ломов

При минимальных условиях на исходные данные смешанной задачи для телеграфного уравнения двумя разными способами получено обобщённое решение в виде быстро сходящегося функционального ряда – аналога известной формулы Даламбера. Первый способ основан на секвенциальном методе: обобщённое решение задачи определяется как предел классических решений последовательности задач. Второй способ основан на аксиоматическом методе. Для построения обобщённого решения не привлекаются классические решения. Использована теория расходящихся рядов Л. Эйлера с дополненной системой аксиом. Особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии нелокального краевого условия, в котором присутствует значение функции во внутренней точке интервала. Оба способа построения обобщённого решения приводят к одному и тому же быстро сходящемуся (экспоненциально) функциональному ряду.

DOI: 10.31857/S0374064122110048, EDN: MABMSA

Введение. Ряд математических моделей, используемых в задачах теории звука, теории упругости, электромагнитных процессов и др., содержит так называемое телеграфное уравнение $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t)$, для которого ставится смешанная задача. В простейшем случае, когда потенциал $q(x)$ – постоянная величина, решение этой задачи можно записать в виде известной формулы Даламбера. В общем случае решение можно найти методом Фурье – в виде ряда, методом функции Грина – в виде интеграла, методом функции Римана – в виде обобщённой формулы Римана, либо применить итерационные или численные методы. Каждый из этих методов накладывает свои ограничения на исходные данные задачи. До недавнего времени считалось, что метод Фурье является одним из самых “затратных” методов в плане требований на параметры задачи. Это связано с необходимостью двукратного почленного дифференцирования рядов, представляющих решение, которые при этом сходятся медленно.

В данной статье рассмотрен случай, когда потенциал q может зависеть от двух переменных: $q = q(x,t)$, что не позволит применить метод разделения переменных для нахождения решения задачи. Тем не менее метод Фурье будет использован как инструмент для построения как классического, так и обобщённого решений задачи в виде быстро сходящегося ряда. Этот метод применяется только для построения решения смешанной задачи для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$.

Применим для построения обобщённого решения смешанной задачи два разработанных А.П. Хромовым метода: секвенциальный (см. работы [1–4]) и аксиоматический [5], преимущество которых перед методами, использованными ранее, в том, что на исходные данные задачи накладываются минимальные требования, обоснование результата требует минимального числа дополнительных утверждений, а решение даётся в виде быстро сходящегося функционального ряда. При разработке этих методов были привлечены идея А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье, связанных с дифференциальными операторами, и идея Л. Эйлера о работе с расходящимися рядами.

В работе [6] секвенциальный метод был использован для построения классического и обобщённого решений смешанной задачи с периодическими краевыми условиями для телеграфного уравнения с потенциалом $q = q(x)$, а в статье [7] – для построения решений смешанной задачи для этого же уравнения с нелокальными краевыми условиями Самарского–Ионкина.

1. Секвенциальный подход. Будем говорить, что функция $f(x,t)$ принадлежит классу Q, если для любого числа $T > 0$ $f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ – интегрируемая на множестве $Q_T = \{(x,t)\colon x \in [0,1],\ t \in [0,T]\} \equiv [0,1] \times [0,T]$ функция.

Рассмотрим в полуполосе $P = \{(x,t) : x \in (0,1),\ \ t \in (0,+\infty)\}$ задачу

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in P, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) + u(\alpha,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где q, φ – комплекснозначные функции; $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$; $q(x,t)$ такова, что найдётся функция $q_0(x) \in \mathcal{L}(0,1)$ и будет справедливо неравенство $|q(x,t)| \leqslant q_0(x)$; $q(x,t)u(x,t)$ принадлежит классу Q; число $\alpha \in (0,1)$.

1.1. Построение классического решения задачи (1)–(3).

Определение 1. Под *классическим решением (решением почти всюду)* задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $\overline{P} = [0,1] \times [0,\infty)$, причём функции $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$ соответственно, удовлетворяющую условиям (2), (3) и почти всюду по x и t уравнению (1).

Для существования классического решения задачи (1)–(3), очевидно, необходимо, чтобы начальная функция удовлетворяла условиям $\varphi(x) \in W_1^2(0,1)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) + \varphi(\alpha) = 0$. Будем считать далее, что эти условия выполнены.

Для того чтобы записать решение задачи (1)–(3) при $q = 0$ используем метод Фурье. Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля, связанный с задачей (1), (2):

$$L: \quad ly = -y''(x), \quad x \in (0,1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y(\alpha) = 0,$$

и запишем собственные функции оператора L и сопряжённого к нему оператора L^*, образующие биортогональную систему. Для упрощения записей рассмотрим случай простого спектра. В случае кратного спектра (например, при $\alpha = 1/3$) нужно занумеровать собственные значения с учётом кратности, форма записи изменится, но рассуждения и общая схема преобразований останутся прежними.

Обозначим через $v[\alpha] = v(\alpha+0) - v(\alpha-0)$ скачок функции $v(x)$ в точке $x = \alpha$. Оператор L^* имеет следующий вид:

$$L^*: \quad l^*v = -v''(x), x \in (0,1), \quad v(0) = v(1) = 0, \quad v[\alpha] = 0, \quad v'[\alpha] = -v'(1).$$

Оба оператора L и L^* действуют в пространстве $\mathcal{L}^2(0,1)$.

Рассмотрим спектральную задачу для оператора L:

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y(\alpha) = 0.$$

Обозначим $\lambda = \varrho^2$, $\operatorname{Re}\varrho \geqslant 0$, тогда уравнение принимает вид $y''(x) + \varrho^2 y(x) = 0$. Решив задачу, получим две последовательности чисел ϱ_n и собственных функций u_n:

$$\varrho_{1n} = \frac{2\pi n}{1+\alpha}, \quad n \geqslant 1, \quad u_{1n}(x) = \sin(\varrho_{1n}x);$$

$$\varrho_{2n} = \frac{\pi + 2\pi n}{1-\alpha}, \quad n \geqslant 0, \quad u_{2n}(x) = \sin(\varrho_{2n}x).$$

Собственные функции оператора L^*, соответствующие числам ϱ_{in}, имеют различный вид в зависимости от числа α. Запишем их для случая $\varrho_{in} \neq \pi/2 + \pi n$, $i = 1,2$, $n \geqslant 0$ (это условие нарушается, например, при $\alpha = 1/3$):

$$v_{1n}(x) = \begin{cases} c_{1n}\sin(\varrho_{1n}x), & x \in [0,\alpha], \\ c_{1n}\dfrac{\cos(\varrho_{1n}\alpha)}{2(-1)^n\cos(\varrho_{1n}(1-\alpha)/2)}(\sin(\varrho_{1n}x) - \operatorname{tg}\varrho_{1n}\cos(\varrho_{1n}x)), & x \in (\alpha,1], \end{cases}$$

$$v_{2n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \alpha], \\ c_{2n}(\sin(\varrho_{2n}x) - \operatorname{tg} \varrho_{2n} \cos(\varrho_{2n}x)), & x \in (\alpha, 1]. \end{cases}$$

Постоянные c_{1n} и c_{2n} подбираются так, чтобы при всех n выполнялись равенства $(u_{in}, v_{in}) = 1$, $i = 1, 2$.

Нам потребуется далее задача, получаемая из задачи (1)–(3) при замене уравнения (1) на неоднородное уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in P, \tag{4}$$

где $f(x,t)$ – функция из класса Q.

Обозначим через $Z(x,t;\varphi)$ формальное решение задачи (1)–(3). В работе [8] показано, что решение задачи (4), (2), (3) можно найти по формуле

$$u(x,t) = Z(x,t;\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta; f(x,\tau))\, d\eta. \tag{5}$$

Представим функцию $Z(x,t;\varphi)$ в виде

$$Z(x,t;\varphi) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{6}$$

где $u_{01}(x,t)$ – решение задачи (1)–(3) при $q(x,t) = 0$. Применим метод Фурье и найдём формальное решение $u_{01}(x,t)$ в виде следующего ряда:

$$u_{01}(x,t) = (\varphi, v_{20})u_{20}(x)\cos\varrho_{20}t + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi, v_{1n})u_{1n}(x)\cos(\varrho_{1n}t) + (\varphi, v_{2n})u_{2n}(x)\cos(\varrho_{2n}t)] =$$

$$= (\varphi, v_{20})\sin\varrho_{20}x\cos\varrho_{20}t + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi, v_{1n})\sin(\varrho_{1n}x)\cos(\varrho_{1n}t) + (\varphi, v_{2n})\sin(\varrho_{2n}x)\cos(\varrho_{2n}t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg\{(\varphi, v_{20})\sin(\varrho_{20}(x+t)) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi, v_{1n})\sin(\varrho_{1n}(x+t)) + (\varphi, v_{2n})\sin(\varrho_{2n}(x+t))] +$$

$$+ (\varphi, v_{20})\sin(\varrho_{20}(x-t)) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi, v_{1n})\sin(\varrho_{1n}(x-t)) + (\varphi, v_{2n})\sin(\varrho_{2n}(x-t))]\Bigg\}. \tag{7}$$

Запишем разложение функции $\varphi(x)$ в ряд по системе функций $\{u_{in}(x), v_{in}(x)\}_{i=1,2}$:

$$(\varphi, v_{20})u_{20}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi, v_{1n})u_{1n}(x) + (\varphi, v_{2n})u_{2n}(x)] =$$

$$= (\varphi, v_{20})\sin(\varrho_{20}x) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi, v_{1n})\sin(\varrho_{1n}x) + (\varphi, v_{2n})\sin(\varrho_{2n}x)] = \widetilde{\varphi}(x), \tag{8}$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, функция $\widetilde{\varphi}(x)$ определена на всей числовой прямой и является продолжением функции $\varphi(x)$. Далее получим аналитические соотношения, позволяющие продолжить функцию $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю числовую прямую. Эти соотношения нам потребуются в дальнейших построениях.

Сравнивая разложения (7) и (8), заключаем, что справедливо следующее представление:

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \quad x \in [0,1], \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Правая часть равенства (9) определена при любых $(x,t) \in (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, и далее функцию $u_{01}(x,t)$ из (9) будем обозначать через $a_0(x,t)$.

Найдём аналитические соотношения для продолжения функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на числовую прямую $\mathbb{R}$. Подставим функцию $u_{01}(x,t)$, представленную в виде (9), в краевые условия (2). Получим следующие два соотношения:

$$\widetilde{\varphi}(x) = -\widetilde{\varphi}(-x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

т.е. функция $\widetilde{\varphi}(x)$ нечётная, и

$$\widetilde{\varphi}(1+x) = -\widetilde{\varphi}(1-x) - \widetilde{\varphi}(\alpha+x) - \widetilde{\varphi}(\alpha-x), \quad x \geqslant 0. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) позволяют продолжить функцию $\varphi(x)$ на всю числовую прямую. Действительно, продолжим $\varphi(x)$ на $[-1,0)$ нечётным образом. Пусть $x \in [0,1-\alpha]$, из (11) получим значения $\widetilde{\varphi}(x)$ для $x \in [1,2-\alpha]$. Продолжим $\widetilde{\varphi}(x)$ нечётно на $[\alpha-2,-1)$, рассмотрим $x \in$ $\in [1-\alpha,2-2\alpha]$, из (11) получим $\widetilde{\varphi}(x)$ на $[2-\alpha,3-2\alpha]$, а следовательно, на $[0,3-2\alpha]$ и т.д. На n-м шаге доходим до точки $x = n-1-n\alpha = n(1-\alpha)+1 \to +\infty$, $n \to +\infty$, так как $1-\alpha > 0$. В итоге определим функцию $\widetilde{\varphi}(x)$ на всей прямой.

Замечание. Описанная выше схема применима для получения продолжения функции $\varphi(x)$ на всю числовую прямую в случае любого конечного числа внутренних точек в краевом условии (2).

Предложенный алгоритм построения продолжения $\widetilde{\varphi}(x)$ известной функции $\varphi(x)$ позволяет утверждать следующее.

Лемма 1. *Функция $\widetilde{\varphi}(x)$ определяется однозначно по $\varphi(x)$.*

Лемма 2. *Операция продолжения $\widetilde{\varphi}(x)$ линейна, т.е.*

$$\widetilde{\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)} = \alpha\widetilde{\varphi}_1(x) + \beta\widetilde{\varphi}_2(x), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Обе операции в формулировке леммы нечётны, получены с использованием равенства (11). На отрезке $[0,1]$ они обе есть $\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)$. Поэтому из леммы 1 следует утверждение леммы 2.

Ниже потребуется следующая оценка интеграла от функции $\widetilde{\varphi}(x)$.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$ и $\widetilde{\varphi}(x)$ – продолжение функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю прямую, полученное с помощью равенств (10) и (11). Зафиксируем произвольное число $T \geqslant 2$, пусть m – наименьшее натуральное число такое, что $T \leqslant m$. Справедливо следующее неравенство:*

$$\int\limits_{-m}^{m+1} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant c_T\|\varphi\|_1,$$

где $\|\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx$, $c_T > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от числа T.

Доказательство. В силу равенства (10) $\int_{-1}^1 |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx = 2\|\varphi\|_1$. Рассмотрим $x \in [1,2-\alpha]$ и оценим интеграл от функции $\widetilde{\varphi}(x)$, использовав равенства (10), (11), по этому отрезку:

$$\int\limits_1^{2-\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx = \int\limits_0^{1-\alpha} |\widetilde{\varphi}(y+1)|\,dy = \int\limits_0^{1-\alpha} |\widetilde{\varphi}(1-y) + \widetilde{\varphi}(\alpha+y) + \widetilde{\varphi}(\alpha-y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{1-\alpha} |\widetilde{\varphi}(1-y)|\,dy + \int\limits_0^{1-\alpha} |\widetilde{\varphi}(\alpha+y)|\,dy + \int\limits_0^{1-\alpha} |\widetilde{\varphi}(\alpha-y)|\,dy =$$

$$= 2\int\limits_\alpha^1 |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx + \int\limits_{2\alpha-1}^{\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant 2\|\varphi\|_1 + \int\limits_{-1}^1 |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx = 4\|\varphi\|_1.$$

Таким образом, установлены неравенства

$$\int\limits_{1}^{2-\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant 4\|\varphi\|_1, \quad \int\limits_{-1}^{2-\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant 6\|\varphi\|_1, \quad \int\limits_{-2+\alpha}^{2-\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant 10\|\varphi\|_1.$$

Далее действуем по этой же схеме. Рассмотрим $x \in [2-\alpha, 3-2\alpha]$. Используя равенство (11) и последние полученные оценки, устанавливаем справедливость неравенств

$$\int\limits_{2-\alpha}^{3-2\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant 12\|\varphi\|_1, \quad \int\limits_{-2+\alpha}^{3-2\alpha} |\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \leqslant 22\|\varphi\|_1.$$

Полагая $x \in [3-2\alpha, 4-3\alpha]$, получаем требуемые оценки интегралов и т.д. За конечное число шагов достигнем любого заранее зафиксированного числа m и установим оценку леммы 3 с некоторой постоянной c_T, зависящей от m. Лемма доказана.

Вернёмся к представлению (6) функции Z. Имея в виду, решением каких задач являются функции $Z(x,t;\varphi)$ и $u_{01}(x,t)$, функцию $u_1(x,t)$ будем искать как решение следующей неоднородной смешанной задачи с нулевой начальной функцией:

$$u_{1tt}(x,t) = u_{1xx}(x,t) - q(x,t)u_1(x,t) + f_0(x,t), \quad (x,t) \in P, \tag{12}$$

$$u_1(0,t) = 0, \quad u_1(1,t) + u_1(\alpha,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{13}$$

$$u_1(x,0) = 0, \quad u_{1t}(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{14}$$

где $f_0(x,t) = -q(x,t)a_0(x,t)$. Используем формулу (5) и получим представление решения $u_1(x,t)$ задачи (12)–(14):

$$u_1(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta;f_0(x,\tau))\,d\eta. \tag{15}$$

Представим функцию $Z(x,\eta;f_0(x,\tau))$ в следующем виде:

$$Z(x,\eta;f_0(x,\tau)) = Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau)) + Z_1(x,\eta;f_0(x,\tau)),$$

где $Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau))$ есть $Z(x,\eta;f_0(x,\tau))$ при $q(x,t)=0$. Но функция $Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau))$ в силу (9) определяется по формуле

$$Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau)) = \frac{1}{2}[\widetilde{f}_0(x+\eta,\tau) + \widetilde{f}_0(x-\eta,\tau)],$$

где $\widetilde{f}_0(\eta,\tau)$ при каждом значении τ есть продолжение функции $f_0(\eta,\tau)$ с отрезка $\eta \in [0,1]$ на числовую прямую по формулам (10), (11).

Правая часть (15) с функцией Z_0 вместо функции Z определена теперь при любых $(x,t) \in \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$. Обозначим её через $a_1(x,t)$ и получим

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_0(\eta,\tau)\,d\eta.$$

На следующем шаге для функции $u_2(x,t)$ решаем задачу, аналогичную (12)–(14), где вместо $f_0(x,t)$ следует записать $f_1(x,t) = -q(x,t)a_1(x,t)$. Продолжив эти преобразования, получим решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{16}$$

здесь

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \tag{17}$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{18}$$

где $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) = -q(\eta,\tau)a_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$, $n \geqslant 0$, при каждом τ; далее $\widetilde{f}_n(\eta,\tau)$ по переменной η продолжается на всю числовую прямую по формулам (10), (11), как и функция $\widetilde{\varphi}(x)$; $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = -\widetilde{q(\eta,\tau)a_n}(\eta,\tau)$.

Отметим, что если потенциал $q(x,t) = 0$, то ряд (16) превращается в обычную формулу Даламбера, что даёт основание назвать ряд (16) *обобщённой формулой Даламбера.*

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и выполнялись условия $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) + \varphi(\alpha) = 0$. Это решение даётся формулой (16).*

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме, изложенной в статьях [6] и [4].

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, то ряд $A(x,t)$ (16) сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в прямоугольнике Q_T при любом фиксированном числе $T > 0$.*

Доказательство. Из оценки общего члена ряда (16) непосредственно вытекает справедливость теоремы.

Лемма 4. *Пусть функция $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, T – произвольное фиксированное положительное число. Тогда справедливы оценки*

$$\|a_n(x,t)\|_{Q_T} \leqslant c_T^{n+1}\|q_0\|_1^n\|\varphi\|_1\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где c_T – постоянная из неравенства в лемме 3.

Доказательство. Заметим, что для $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,t]$ имеют место следующие вложения:

$$[x-t+\tau, x+t-\tau] \subseteq [x-t, x+t] \subseteq [-t, t+1] \subseteq [-T, T+1].$$

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 1$, тогда с учётом оценки леммы 3 справедливо неравенство

$$|a_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |q(\eta,\widetilde{\tau)a_0}(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant c_T\int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |q(\eta,\tau)a_0(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_T}{2}\int\limits_0^1 q_0(\eta)\,d\eta \int\limits_0^T (|\widetilde{\varphi}(\eta+\tau)| + |\widetilde{\varphi}(\eta-\tau)|)\,d\tau = \frac{c_T}{2}\int\limits_0^1 q_0(\eta)\,d\eta \int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} |\widetilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c_T\|q_0\|_1 \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi \leqslant c_T^2\|q_0\|_1\|\varphi\|_1,$$

причём равномерно по $(x,t) \in Q_T$. Пусть $n \geqslant 2$. Тогда имеем

$$|a_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant c_T\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 q_0(\eta)|a_{n-1}(\eta,\tau)|\,d\eta =$$

$$= c_T \int\limits_0^1 q_0(\eta)\, d\eta \int\limits_0^t |a_{n-1}(\eta,\tau)|\, d\tau \tag{20}$$

равномерно по $x \in [0,1]$ для каждого $t \geqslant 0$. Функции $a_n(x,t)$, $n \geqslant 1$, непрерывны в Q_T. Завершаем доказательство леммы по индукции. Как промежуточную получаем из формулы (20) оценку

$$|a_n(x,t)| \leqslant c_T^{n+1} \|q_0\|_1^n \|\varphi\|_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geqslant 2, \quad x \in [0,1], \quad t \geqslant 0.$$

Лемма доказана. Теорема 2 доказана.

1.2. Построение обобщённого решения задачи (1)–(3).

Определение 2. Пусть последовательность $\{u_h(x,t)\}$ классических решений задачи (1)–(3), отвечающих начальным функциям $\{\varphi_h(x)\}$, сходится по норме пространства $\mathcal{L}(Q_T)$ к функции $u(x,t)$. Функцию $u(x,t)$ назовём *обобщённым решением* задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Если функция $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, а функции $\varphi_h(x)$, $h \geqslant 1$, удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$, то соответствующие начальным функциям φ_h классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3) сходятся по норме $\mathcal{L}(Q_T)$ к $A(x,t)$, т.е. в этом случае $u(x,t) = A(x,t)$ и ряд (16) является обобщённым решением задачи (1)–(3).*

Таким образом, из теорем 1 и 3 следует, что один и тот же ряд $A(x,t)$, быстро сходящийся, является классическим или обобщённым решением задачи (1)–(3) в зависимости от гладкости функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть начальная функция $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$. Пусть начальные функции $\varphi_h(x)$, $h \geqslant 1$, удовлетворяют условиям теоремы 1, им соответствуют классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3), и $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$. Обозначим ряд (16), отвечающий функции $u_h(x,t)$, через $A_h(x,t)$. Для функции $\varphi(x)$ построим ряд (16) $A(x,t)$, который в соответствии с теоремой 2 сходится абсолютно и равномерно в любом прямоугольнике Q_T. Рассмотрим разность этих рядов

$$u_h(x,t) - u(x,t) = A_h(x,t) - A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{nh}(x,t) - a_n(x,t)],$$

где

$$a_{0h}(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}_h(x+t) + \widetilde{\varphi}_h(x-t)], \quad a_{nh}(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1,h}(\eta,\tau)\, d\eta,$$

$n \geqslant 1$. Используя схему доказательства леммы 4, оценим эту разность. Покажем, что имеют место следующие неравенства:

$$|a_{nh}(x,t) - a_n(x,t)| \leqslant c_T^{n+1} \|q_0\|_1^n \|\varphi_h - \varphi\|_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad h, n \geqslant 1, \tag{21}$$

$(x,t) \in Q$, c_T – постоянная из оценки леммы 3.

Пусть $n = 1$. Используем оценку леммы 3. Равномерно по $(x,t) \in Q$ справедливы следующие преобразования:

$$|a_{1h}(x,t) - a_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |q(\eta,\tau)\widetilde{a_{0h}}(\eta,\tau) - q(\eta,\tau)\widetilde{a_0}(\eta,\tau)|\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |q(\eta,\tau)a_{0h}(\eta,\tau)\widetilde{\ } - q(\eta,\tau)a_0(\eta,\tau)|\, d\eta \leqslant c_T \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |q_0(\eta)||a_{0h}(\eta,\tau) - a_0(\eta,\tau)|\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c_T \frac{1}{2} \int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\, d\eta \int\limits_0^T (|\widetilde{\varphi}_h(x+t) - \widetilde{\varphi}(x+t)| + |\widetilde{\varphi}_h(x-t) - \widetilde{\varphi}(x-t)|)\, d\tau =$$

$$= \frac{C_T}{2} \int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\, d\eta \int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} |\widetilde{\varphi}_h(\xi) - \widetilde{\varphi}(\xi)|\, d\xi \leqslant c_T \|q_0\|_1 \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{\varphi}_h(\xi) - \widetilde{\varphi}(\xi)|\, d\xi \leqslant c_T^2 \|q_0\|_1 \|\varphi_h - \varphi\|_1.$$

Получили оценку (21) при $n = 1$.

Пусть $n \geqslant 2$. Применив оценку леммы 3, устанавливаем соотношения

$$|a_{nh}(x,t) - a_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |f_{n-1,h}(\eta,\widetilde{\tau) - f}_{n-1}(\eta,\tau)|\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c_T \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |q_0(\eta)||a_{n-1,h}(\eta,\tau) - a_{n-1}(\eta,\tau)|\, d\eta = c_T \int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\, d\eta \int\limits_0^t |a_{n-1,h}(\eta,\tau) - a_{n-1}(\eta,\tau)|\, d\tau.$$

Продолжим эти преобразования для случая $n = 2$

$$|a_{2h}(x,t) - a_2(x,t)| \leqslant c_T \int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\, d\eta \int\limits_0^t |a_{1,h}(\eta,\tau) - a_1(\eta,\tau)|\, d\tau \leqslant c_T^3 \|q_0\|_1^2 \|\varphi_h - \varphi\|_1 t$$

равномерно по $x \in [0,1]$ для каждого значения $t \geqslant 0$. Далее действуем по индукции и устанавливаем оценки (21).

Применим неравенства (21) для получения оценки разности рядов. Для всех $(x,t) \in Q_T$ справедливо соотношение

$$|A_h(x,t) - A(x,t)| \leqslant |a_{0h}(x,t) - a_0(x,t)| + \|\varphi_h - \varphi\|_1 \sum_{n=1}^{\infty} c_T^{n+1} \|q_0\|_1^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= |a_{0h}(x,t) - a_0(x,t)| + c_T^2 \|q_0\|_1 e^{c_T \|q_0\|_1 t} \|\varphi_h - \varphi\|_1.$$

Далее, применив оценку леммы 3 и использовав обозначение $\|\cdot\|_{1,Q_T} \equiv \|\cdot\|_{\mathcal{L}(Q_T)}$, получим

$$\|a_{0h}(x,t) - a_0(x,t)\|_{1,Q_T} \leqslant \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-T}^{x+T} |\varphi_h(\widetilde{y) - \varphi}(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-T}^{T+1} |\varphi_h(\widetilde{y) - \varphi}(y)|\, dy \leqslant c_T \|\varphi_h - \varphi\|_1, \quad h \geqslant 1.$$

Таким образом, для разности рядов имеем оценку

$$\|A_h(x,t) - A(x,t)\|_{1,Q_T} \leqslant c_T(1 + c_T \|q_0\|_1 T e^{c_T \|q_0\|_1 T}) \|\varphi_h - \varphi\|_1, \quad h \geqslant 1,$$

из которой следует, что если $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$, то и $\|A_h(x,t) - A(x,t)\|_{1,Q_T} \to 0$ при $h \to \infty$, т.е. $\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{1,Q_T} \to 0$ при $h \to \infty$. Теорема доказана.

2. Аксиоматический подход. Рассмотрим последовательно четыре смешанные задачи, найдём их решения. Первые три из этих задач исследуем для того чтобы построить обобщённое решение четвёртой задачи – задачи (1)–(3).

2.1. Рассмотрим задачу (1)–(3) с потенциалом $q(x,t)=0$:

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in P,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)+u(\alpha,t)=0,\quad t\geqslant 0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in[0,1],$$

где $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$. Формальное решение $u(x,t)$ этой задачи представлено формулой (7). Классическое решение задачи определяем так же, как в первой части.

Приведём теорему единственности классического решения рассматриваемой задачи.

Теорема 4. *Если $u(x,t)$ – классическое решение задачи (1)–(3) с $q(x,t)=0$ и с условием принадлежности $u_{tt}(x,t)$ классу Q, то оно единственно и находится по формуле (7), в которой ряды справа при любом фиксированном $t>0$ сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$.*

Доказательство теоремы проводится по схеме, изложенной в работе [3], и не зависит от конкретного вида краевых условий.

Определим как понимается смешанная задача при минимальных требованиях на начальную функцию. Заметим, что указанный ряд (7) имеет смысл для любой функции $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является *формальным решением* исследуемой задачи, но понимаемой теперь *чисто формально*. Эту задачу будем называть *обобщённой смешанной задачей*. Найти решение обобщённой смешанной задачи – значит найти "сумму", вообще говоря, расходящегося ряда. "Сумма" означает, что это сумма именно расходящегося (в общем случае) ряда (см. [9, с. 101; 10, с. 6, 19]). В данном случае найти решение рассматриваемой обобщённой смешанной задачи – значит найти "сумму" расходящегося ряда (7).

Помимо трёх аксиом о расходящихся рядах [10, с. 19], следуя А.П. Хромову, будем пользоваться ещё следующим правилом интегрирования расходящегося ряда:

$$\int\sum=\sum\int, \tag{22}$$

где $\int$ – определённый интеграл.

Ряд (7) представим в виде

$$u(x,t)=\sum_{+}+\sum_{-}, \tag{23}$$

где $\sum_{\pm}=\sum_{n=1}^{\infty}(\ldots)(x\pm t)$. Сравнивая разложения (8) и (23), заключаем, что для нахождения "суммы" ряда (7) нужно найти "сумму" ряда (8).

Пусть "сумма" ряда (8) при $x\in[0,1]$ есть некоторая функция $g(x)\in\mathcal{L}(0,1)$. Тогда в соответствии с правилом (22) получим

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta=(\varphi,v_{20})\int_0^x\sin(\varrho_{20}\eta)\,d\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[(\varphi,v_{1n})\int_0^x\sin(\varrho_{1n}\eta)\,d\eta+$$
$$+(\varphi,v_{2n})\int_0^x\sin(\varrho_{2n}\eta)\,d\eta\Bigg],\quad x\in[0,1]. \tag{24}$$

Имеет место следующее обобщение на рассматриваемую систему $\{u_n(x)\}$ теоремы Лебега о почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 5. *Пусть задана функция $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, имеющая ряд (8) своим биортогональным разложением по системе $\{u_n(x)\}$. Если отрезок $[A,B]\subseteq[0,1]$, то справедливо равенство*

$$\int_A^B\varphi(\eta)\,d\eta=(\varphi,v_{20})\int_A^B\sin(\varrho_{20}\eta)\,d\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B[(\varphi,v_{1n})\sin(\varrho_{1n}\eta)+(\varphi,v_{2n})\sin(\varrho_{2n}\eta)]\,d\eta.$$

Таким образом, биортогональный ряд (8) можно почленно интегрировать, полученный ряд сходится и его сумма равна $\int_A^B \varphi(\eta)\,d\eta$. При этом сам ряд (8) может и не сходиться.

Доказательство теоремы 5 проводится по схеме, изложенной в работе [11, с. 320–321].

Согласно теореме 5 суммой ряда (24) (обычной суммой) является функция $\int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$. Но тогда $\int_0^x g(\eta)\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$, т.е. справедливо равенство $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду на отрезке $[0,1]$, тем самым найдена "сумма" ряда (8), который может быть и расходящимся.

Формальный ряд (8) определён для всех значений $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\widetilde{\varphi}(x)$ "сумму" ряда (8) для всех значений $x \in \mathbb{R}$. В силу (8) и (23) заключаем, что "сумма" $u(x,t)$ ряда (7) есть функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)]. \tag{25}$$

Доказана

Теорема 6. *Решением обобщённой смешанной задачи (1)–(3) с $q(x,t) = 0$ является функция $u(x,t)$ из класса Q, определяемая по формуле (25).*

Алгоритм продолжения функции $\widetilde{\varphi}(x)$ с отрезка $[0,1]$, где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, на всю числовую прямую определён формулами (10), (11).

2.2. Рассмотрим следующую обобщённую смешанную задачу:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in P, \tag{26}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) + u(\alpha,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{27}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{28}$$

где $f(x,t)$ – функция класса Q.

Формальное решение задачи (26)–(28) методом Фурье определяется по формуле

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \Bigg\{ \frac{1}{\varrho_{20}}(f, v_{20}) \sin(\varrho_{20}x) \sin(\varrho_{20}(t-\tau)) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\varrho_{1n}}(f, v_{1n}) \sin(\varrho_{1n}x) \sin(\varrho_{1n}(t-\tau)) + \frac{1}{\varrho_{2n}}(f, v_{2n}) \sin(\varrho_{2n}x) \sin(\varrho_{2n}(t-\tau)) \right] \Bigg\} d\tau.$$

В этом соотношении выполним преобразование

$$\frac{1}{\varrho} \sin(\varrho x) \sin(\varrho(t-\tau)) = -\frac{1}{2\varrho}(\cos(\varrho(x+t-\tau)) - \cos(\varrho(x-t+\tau))) = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin(\varrho\eta)\,d\eta$$

и получим равенство

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \Bigg\{ (f, v_{20}) \sin(\varrho_{20}\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} [(f, v_{1n}) \sin(\varrho_{1n}\eta) +$$

$$+ (f, v_{2n}) \sin(\varrho_{2n}\eta)] \Bigg\} d\eta = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{29}$$

в котором выражение в фигурных скобках, как это следует из формулы (8), имеет "сумму" $\widetilde{f}(\eta,\tau)$, где $\widetilde{f}(\eta,\tau)$ – продолжение функции $f(\eta,\tau)$ по η с $[0,1]$ на всю числовую прямую по тем же формулам (10), (11), что и функция $\varphi(x)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Решение $u(x,t)$ обобщённой смешанной задачи (26)–(28) есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{30}$$

Зафиксируем произвольное число $T>0$. Из формулы (30), использовав неравенство леммы 3, получим

$$|u(x,t)|\leqslant\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\widetilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant c_T\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|f(\eta,\tau)|\,d\eta=c_T\|f(x,t)\|_{1,Q_T},$$

откуда следует оценка $\|u(x,t)\|_{1,Q_T}\leqslant c_TT\|f(x,t)\|_{1,Q_T}$, $c_T=\mathrm{const}>0$, которая подтверждает, что $u(x,t)$ является функцией класса Q.

2.3. Рассмотрим обобщённую смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad (x,t)\in P, \tag{26}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)+u(\alpha,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{27}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in[0,1], \tag{31}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q, $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$.

Формальное решение задачи (26), (27), (31) по методу Фурье есть $u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ – ряд (7), а $u_1(x,t)$ – ряд (29). Поэтому, исходя из пп. 2.1, 2.2, получаем

Теорема 8. *Обобщённая смешанная задача (26), (27), (31) имеет решение из класса Q, определяемое по формуле*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)]+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta.$$

2.4. Используем результат пп. 2.1–2.3 для решения задачи (1)–(3).

Из теоремы 8 следует, что нахождение решения задачи (1)–(3) в классе Q сводится к нахождению в этом классе решения интегрального уравнения

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)]-\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}q(\eta,\widetilde{\tau)u(\eta,\tau)}\,d\eta, \tag{32}$$

где $q(\eta,\widetilde{\tau)u(\eta,\tau)}$ – продолжение по η на всю числовую прямую с отрезка $[0,1]$ при каждом τ функции $q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ по тем же формулам (10), (11), что и функция $\varphi(x)$.

Интегральное уравнение (32) имеет единственное решение в классе Q, получаемое по методу последовательных подстановок. Это решение $u(x,t)$ даётся формулой (16), где функции $a_n(x,t)$, $n\geqslant 0$, определяются формулами (17), (18).

Теорема 9. *При $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$ задача (1)–(3) имеет обобщённое решение, которое представляется формулами (16)–(18).*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$Bf=-\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}q(\eta,\widetilde{\tau)f(\eta,\tau)}\,d\eta,$$

где $f(x,t)\in C(Q_T)$, продолжение подынтегральной функции построено по формулам (10), (11).

Лемма 5. *Для линейного ограниченного в пространстве $C(Q_T)$ оператора B справедлива оценка*

$$\|Bf\|_{C(Q_T)} \leqslant c_T T \|q_0\|_1 \|f(x,t)\|_{C(Q_T)},$$

где c_T – постоянная из неравенства леммы 3.

Доказательство. Линейность оператора B следует из леммы 2. Докажем его ограниченность. Как и в доказательстве леммы 4, имеем

$$|Bf| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |q(\eta,\tau)\widetilde{f(\eta,\tau)}|\, d\eta \leqslant c_T \cdot T \cdot \|q_0\|_1 \|f(x,t)\|_{C(Q_T)},$$

откуда следует требуемая оценка и ограниченность оператора B. Лемма доказана.

Рассмотрим ряд $A_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x,t)$, где $a_n(x,t) = Ba_{n-1}$, $n \geqslant 1$, и $a_0(x,t) = [\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)]/2$. Заметим, что функции $a_n(x,t)$ имеют вид (18), и ряд $A_1(x,t)$ есть ряд (16) $A(x,t)$ без слагаемого $a_0(x,t)$. Из теоремы 2 следует, что ряд $A_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике Q_T.

Докажем, что уравнение (32) имеет решение $u(x,t) = A(x,t) = a_0(x,t) + A_1(x,t)$, получаемое с помощью метода последовательных подстановок.

Уравнение (32) имеет вид $u = a_0 + Bu$. Положим $v(x,t) = u(x,t) - a_0(x,t)$, тогда $v = Bu = Bv + Ba_0 = Bv + a_1$, и для $v(x,t)$ получаем интегральное уравнение

$$v(x,t) = a_1(x,t) + Bv(x,t). \tag{33}$$

Так как $a_1(x,t) \in C(Q_T)$, то уравнение (33) рассматриваем в пространстве $C(Q_T)$. Методом последовательных подстановок из (33) получаем ряд $A_1(x,t)$: $v_0 = 0$, $v_n = a_1 + Bv_{n-1}$, $v_1 = a_1$, $v_2 = a_1 + Ba_1 = a_1 + a_2$, $v_3 = a_1 + a_2 + a_3$ и т.д. Поскольку B – линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$ и $BA_1(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x,t)$, то $A_1(x,t)$ – решение уравнения (33).

Докажем, что уравнение (33) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x,t)$ есть ещё другое решение $w(x,t)$ этого уравнения. Тогда $z(x,t) = A_1(x,t) - w(x,t)$ – решение уравнения $z(x,t) = Bz(x,t)$, а значит, и уравнения $z(x,t) = B^n z(x,t)$ при любом натуральном n.

Запишем оценку (19) леммы 4 в другой форме. Поскольку $a_n(x,t) = Ba_{n-1} = B^2 a_{n-2} = \ldots = B^{n-1}a_1(x,t) = B^n a_0(x,t)$, то из доказательства леммы 4 следует, что

$$|a_n(x,t)| \leqslant c_T \int\limits_0^1 |q_0(\eta_1)|\, d\eta_1 \int\limits_0^t |a_{n-1}(\eta_1,\tau_1)|\, d\tau_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_T^2 \int\limits_0^1 |q_0(\eta_1)|\, d\eta_1 \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^1 |q_0(\eta_2)|\, d\eta_2 \int\limits_0^{\tau_1} |a_{n-2}(\eta_2,\tau_2)|\, d\tau_2\right] d\tau_1 \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant c_T^{n-1} \int\limits_0^1 |q_0(\eta_1)|\, d\eta_1 \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^{\tau_{n-2}} |a_1(\eta_{n-1},\tau_{n-1})|\, d\tau_{n-1} \cdots d\tau_1 \leqslant c_T^{n-1} \|q_0\|^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|a_1(x,t)\|_{C(Q_t)},$$

где $Q_t = [0,1] \times [0,t]$. Таким образом, установлена оценка

$$\|a_n\|_{C(Q_T)} = \|B^{n-1}a_1\|_{C(Q_T)} \leqslant c_T^{n-1} \|q_0\|_1^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \|a_1\|_{C(Q_T)}, \tag{34}$$

которая остаётся верной, если в качестве $a_1(x,t)$ взять любую функцию из пространства $C(Q_T)$, например, функцию $z(x,t)$. Тогда из оценки (34) следует неравенство

$$\|z(x,t)\|_{C(Q_T)} = \|B^{n-1}z\|_{C(Q_T)} \leqslant \|z\|_{C(Q_T)} c_T^{n-1} \|q_0\|_1^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем, что $z(x,t) = 0$, и тем самым единственным решением уравнения (33) является ряд $A_1(x,t)$, а уравнения (32) – ряд $A(x,t)$. Теорема 9 доказана.

Как доказано в теореме 2, при $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$ ряд (16) $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в прямоугольнике Q_T для любого $T > 0$.

Таким образом, во второй части статьи предложен отличный от рассмотренного в первой части метод построения обобщённого решения задачи (1)–(3). При этом оба решения определяются рядом (16).

Замечание. Отметим, что в работе [12] с помощью функции Римана получены формулы классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости (обобщённые формулы Римана).

Автор признателен А.П. Хромову за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 138–140.
2. *Хромов А.П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1795–1809.
3. *Хромов А.П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 717–731.
4. *Хромов А.П., Корнев В.В.* Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 2. С. 286–300.
5. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения // Соврем. проблемы теории функций и их приложения. Саратов, 2022. Вып. 21. С. 319–324.
6. *Ломов И.С.* Обобщённая формула Даламбера для телеграфного уравнения // Итоги науки и техники. Соврем. математика и её приложения. Тематич. обзоры. 2021. Т. 199. С. 66–79.
7. *Ломов И.С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 37–42.
8. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Соврем. проблемы теории функций и их приложения: материалы междунар. Саратовской зимней школы. Саратов, 2020. С. 433–439.
9. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.; Л., 1949.
10. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 2006.
11. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1957.
12. *Ломовцев Ф.Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. № 1. С. 18–38.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.06.2022 г.
После доработки 19.06.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.