

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.984.54

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

© 2022 г. А. П. Солдатов

Приводятся достаточные условия, обеспечивающие справедливость основной теоремы Фаддеева–Марченко о восстановлении потенциала уравнения Штурма–Лиувилля на всей оси по заданным соотношениям между функциями Йоста. Эти условия сформулированы в терминах так называемого коэффициента отражения. В рамках теоретико-функционального подхода указанные соотношения записаны в форме краевой задачи для функций Йоста. Установлена однозначная разрешимость данной задачи и соответствующего ей сингулярного интегрального уравнения в соответствующих весовых классах Гёльдера. Как следствие, с помощью решения этой задачи получена явная формула для потенциала через уравнения Штурма–Лиувилля, альтернативная известной формуле Левитана–Фаддеева–Марченко.

DOI: 10.31857/S037406412211005X, EDN: MASQSN

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = k^2y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

на всей оси в классической постановке, когда вещественный коэффициент q удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|q(x)|dx < \infty.$$

Хорошо известно [1, гл. 6], что в классе функций, исчезающих на бесконечности, эта задача имеет дискретный спектр в конечном числе точек $\lambda = -\kappa_j^2$, $1 \leq j \leq n$, на отрицательной части вещественной оси $\lambda = k^2$, а непрерывный спектр заполняет положительную полуось. При этом все собственные значения $-\kappa_j^2$ являются простыми.

Введём так называемые функции Йоста $f_j(x, k)$, $j = 1, 2$, как решения уравнения (1.1) с заданными асимптотиками на бесконечности:

$$f_1(x, k) - e^{ikx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad f_2(x, k) - e^{-ikx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

Они определяются однозначно и представляются формулами

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A_1(x, t)e^{ikt} dt, \quad f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_x^\infty A_2(x, t)e^{-ikt} dt$$

с определёнными вещественными ядрами $A_j(x, t)$, причём интегралы сходятся абсолютно. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikx}[1 + g_1(x, k)], \quad g_1(x, k) = \int_0^\infty A_1(x, s+x)e^{iks} ds, \\ f_2(x, k) &= e^{-ikx}[1 + g_2(x, k)], \quad g_2(x, k) = \int_0^\infty A_2(x, x-s)e^{iks} ds, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где при каждом фиксированном x функции $B_1(s) = A_1(x, s+x)$ и $B_2(s) = A_2(x, x-s)$ суммируемы на полуоси $(0, \infty)$. В частности, $g_j(x, k)$ непрерывно продолжаются до функций $g_j(x, \zeta)$, аналитических в верхней полуплоскости $D_+ = \{\text{Im } \zeta > 0\}$ и исчезающих на бесконечности. По переменной x соответствующие функции $f_j(x, \zeta)$ удовлетворяют аналогичному (1.1) уравнению $-f_j'' + f_j = \zeta^2 f_j$.

При фиксированном вещественном $k \neq 0$ пары функций $\{f_j(x, k), \overline{f_j(x, k)}\}$ образуют две фундаментальные системы решений и, следовательно, связаны соотношением

$$f_1(x, k) = b(k)f_2(x, k) + a(k)\overline{f_2(x, k)} \quad (1.3)$$

с некоторыми коэффициентами $a(k)$, $b(k)$, обладающими свойствами (см., например, [1, гл. 6])

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad b(-k) = \overline{b(k)}, \quad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2, \quad (1.4a)$$

$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad b(k) = O(k^{-1}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (1.4b)$$

$$k[a(k) + b(k)] \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow 0. \quad (1.4c)$$

Кроме того, функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость D_+ , имеет простые нули в точках $\zeta = i\kappa_j$, $1 \leq j \leq n$, и за исключением их всюду отлична от нуля, причём

$$\tilde{a}(\zeta) = \zeta a(\zeta) \in C(B_1), \quad B_1 = \{|\zeta| \leq 1, \text{Im } \zeta \geq 0\}, \quad (1.5)$$

и $a(\zeta) \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

В явном виде $2ika(k) = (f_1'f_2 - f_2'f_1)(x, k)$, где в силу (1.1) вронскиан в правой части этого равенства не зависит от x . Поэтому аналогичное выражение справедливо и для аналитического продолжения

$$2i\zeta a(\zeta) = f_1'(x, \zeta)f_2(x, \zeta) - f_2'(x, \zeta)f_1(x, \zeta)$$

этой функции.

Очевидно, что функцию $a(\zeta)$ можно представить в виде

$$a(\zeta) = a_1(\zeta) \left(\frac{\zeta - i\kappa_1}{\zeta + i\kappa_1} \right) \cdots \left(\frac{\zeta - i\kappa_n}{\zeta + i\kappa_n} \right), \quad (1.6)$$

где функция $a_1(\zeta)$ всюду отлична от нуля. Следовательно, в верхней полуплоскости определена аналитическая функция $\ln a_1(\zeta)$, исчезающая на бесконечности и непрерывная в её замыкании (за исключением точки $\zeta = 0$).

Обратная задача теории рассеяния состоит в восстановлении коэффициента q уравнения Штурма–Лиувилля по заданному набору $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ положительных чисел и паре функций a , b со свойствами (1.4)–(1.6). Опишем центральный результат этой теории, развитой Л.Д. Фаддеевым [2, 3] и В.А. Марченко [4].

Основная теорема Фаддеева–Марченко. Пусть заданы: набор κ_j , $1 \leq j \leq n$, положительных чисел, пары функций $a(t)$, $b(t)$ со свойствами (1.4)–(1.6), непрерывные при $t \neq 0$, и наборы чисел $m_{j,1}$, $m_{j,2}$, для которых имеет место равенство $m_{j,1}m_{j,2} = -[a'(i\kappa_j)]^2$, $1 \leq j \leq n$. Пусть функции

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_{j,1}} e^{-\kappa_j x} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{b(-t)}{a(t)} e^{ixt} dt,$$

$$F_2(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_{j,2}} e^{\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{b(t)}{a(t)} e^{-ixt} dt \quad (1.7)$$

непрерывны, дифференцируемы и для любого $y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$F_1(x), F_1'(x), xF_1'(x) \in L^1(y, +\infty), \quad F_2(x), F_2'(x), xF_2'(x) \in L^1(-\infty, y). \quad (1.8)$$

Тогда ядра A_j в интегральном представлении (1.2) однозначно определяются как решения интегральных уравнений Гельфанда–Левитана

$$A_1(x, y) + F_1(x + y) + \int_x^\infty A_1(x, t)F_1(t + y) dt = 0, \quad y \geq x,$$

$$A_2(x, y) + F_2(x + y) + \int_{-\infty}^x A_2(x, t)F_2(t + y) dt = 0, \quad x \geq y,$$

а функции $f_j(x, t)$ удовлетворяют уравнению Штурма–Лиувилля с коэффициентом

$$q(x) = -2[A_1(x, x)]' = 2[A_2(x, x)]'. \quad (1.9)$$

Часто вместо коэффициента b используют отношение $r = b/a$, которое носит название *коэффициент отражения*. Из (1.4) видно, что он должен удовлетворять условиям

$$r(-t) = \overline{r(t)}, \quad |r(t)| < 1, \quad t \neq 0; \quad r(t) = O(t^{-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

$$|a(t)|^{-2} = 1 - |r(t)|^2. \quad (1.11)$$

Кроме того, в обозначениях (1.5) можем записать $t[a(t) + b(t)] = \tilde{a}(t)[1 + r(t)]$, так что при $\tilde{a}(0) = 0$ условие (1.4с) выполняется автоматически. С другой стороны, это условие приводит к пределу

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = -1 \quad \text{при } \tilde{a}(0) \neq 0.$$

Отметим, что при $\tilde{a}(0) = 0$ поведение $r(t)$ при $t \rightarrow 0$ до конца не выяснено.

Очевидно, что в равенстве (1.11) можно a заменить на функцию a_1 , фигурирующую в формуле (1.6). В частности, для граничного значения $\ln a_1^+(t)$, $t \in \mathbb{R}$, аналитической функции $\ln a_1(\zeta)$ имеем соотношение $-2 \ln a_1^+ = \ln(1 - |r|^2)$. Поэтому эту функцию с точностью до мнимой постоянной можем восстановить по формуле Шварца [5, с. 117]

$$-2 \ln a_1(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln[1 - |r(t)|^2] dt}{t - \zeta}, \quad z \in D_+. \quad (1.12)$$

2. Достаточные условия основной теоремы. Возникает вопрос, для каких коэффициентов отражения $r(k)$ и построенных по ним коэффициентов a и b функции (1.7) удовлетворяют условиям (1.8) основной теоремы. Этот вопрос подробно исследовался Б.М. Левитаном [6], результаты его можно уточнить и дополнить, основываясь на классических свойствах интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{t - \zeta}, \quad \zeta \in D_{\pm}, \quad (2.1)$$

определяющего аналитическую функцию в полуплоскостях $D_{\pm} = \{\pm \operatorname{Im} \zeta > 0\}$, и сингулярного интеграла Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Последний интеграл с граничными значениями $(I\varphi)^{\pm}$ функции $I\varphi$ связан формулами Сохоцкого–Племеля

$$2(I\varphi)^{\pm} = \pm \varphi + S\varphi. \quad (2.3)$$

Пусть $C^\mu(G)$, $0 < \mu < 1$, означает класс Гёльдера на замкнутом множестве $G \subseteq \mathbb{C}$. Напомним, что он состоит из всех функций $\varphi(z)$, $z \in G$, для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu, \quad (2.4)$$

где

$$|\varphi|_0 = \sup_{z \in G} |\varphi(z)|, \quad [\varphi]_\mu = \sup_{z_1, z_2 \in G} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}.$$

Полунорма $[\varphi]_\mu$ имеет смысл и для $\mu = 0$, в этом случае она означает колебание функции φ . Очевидное равенство

$$\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} = |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|^{1-\mu/\nu} \left(\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\nu} \right)^{\mu/\nu}$$

приводит к интерполяционному неравенству

$$[\varphi]_\nu \leq [\varphi]_0^{1-\mu/\nu} [\varphi]_\mu^{\mu/\nu}, \quad 0 < \mu < \nu. \quad (2.5)$$

Из него, в частности, следует вложение банаховых пространств $C^\nu(G) \subseteq C^\mu(G)$. Если множество G ограничено, то с учётом теоремы Асколи это вложение является компактным.

Для неограниченных множеств G вводят также пространство функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем μ по отношению к метрике сферы Римана $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Это условие можно выразить в форме

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq \frac{C|z_1 - z_2|^\mu}{(1 + |z_1|)^\mu (1 + |z_2|)^\mu}, \quad z_1, z_2 \in G, \quad (2.6)$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Оно равносильно тому, что $\varphi(z)$ вместе с функцией $\varphi(1/z)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любых компактных подмножествах, соответственно, $\overline{G}$ и $\tilde{G} = \{z, 1/z \in \overline{G}\}$. Этот класс обозначим $H(G)$, его элементы φ , очевидно, допускают предел $\varphi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Условие $\varphi(\infty) = 0$ выделяет в нем класс, который обозначим $\dot{H}(G)$.

Исходя из весовой функции $\rho_\lambda(z) = (1 + |z|^2)^{\lambda/2}$ с вещественным показателем λ , $C_\lambda^\mu(G, \infty)$ – весовое пространство функций $\varphi(z)$, для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\rho_{-\lambda}\varphi|_0 + [\rho_{\mu-\lambda}\varphi]_\mu. \quad (2.7)$$

В случае, когда G является некоторой замкнутой областью, пространство $C^{n,\mu}(G)$ дифференцируемых функций, все производные которого до n -го порядка включительно принадлежат $C^\mu(G)$, можно определить индуктивно условиями $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(G)$, где под φ' понимается пара частных производных. По аналогии пространство $C_\lambda^{n,\mu}(G, \infty)$ вводится индуктивно условиями

$$\varphi \in C_\lambda^{n-1,\mu}, \quad \varphi' \in C_{\lambda-1}^{n-1,\mu}. \quad (2.8)$$

Все эти пространства являются частным случаем аналогичных пространств с более общими весовыми функциями, введенных и изученных в работе [8]. В частности, умножение, как билинейное отображение, ограничено $C_{\lambda'}^{n,\mu} \times C_{\lambda''}^{n,\mu} \rightarrow C_{\lambda'+\lambda''}^{n,\mu}$, пространство $C_0^{n,\mu}$ является банаховой алгеброй по умножению, и оператор $\varphi \rightarrow \rho_\delta \varphi$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C_\lambda^{n,\mu} \rightarrow C_{\lambda+\delta}^{n,\mu}$. Кроме того, семейство банаховых пространств $(C_\lambda^{n,\mu})$ монотонно убывает (в смысле вложений банаховых пространств) по параметру μ и монотонно возрастает по λ . При этом для функций φ , заданных на множестве G и исчезающих на бесконечности, условие (2.6) равносильно принадлежности φ пространству $C_{-\mu}^\mu(G, \infty)$. В частности, имеют место вложение $C_\lambda^\mu \subseteq C_{-\varepsilon}^\varepsilon$ при $0 < \varepsilon \leq \min(\mu, -\lambda)$ и равенство

$$\dot{H}(G) = \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} C_{-\varepsilon}^\varepsilon(G, \infty). \quad (2.9)$$

Отметим ещё вложение банаховых пространств

$$C^\mu(G) \subseteq C_\mu^\mu(G, \infty), \quad (2.10)$$

которое непосредственно следует из определения (2.7), так как

$$C^\mu(G) \subseteq C_\mu^\mu(G, \infty) = \{\varphi : [\varphi]_\mu < \infty\}.$$

В дальнейшем роль множества G будут играть в основном прямая $\mathbb{R}$ и полуплоскости $D_\pm$. В первом случае под φ' в (2.8) понимается обычная производная, а во втором случае под $C_\lambda^{n,\mu}$ понимается пространство аналитических в $D_\pm$ функций. Особо остановимся на пространстве $C_0^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$.

Лемма 2.1. (a) Пусть $\varphi \in C_0^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$ и функция f аналитична в окрестности некоторого компакта K , содержащего множество значений φ . Тогда суперпозиция $f \circ \varphi \in C_0^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$.

(b) Пусть последовательность функций φ_m , $m = 1, 2, \dots$, ограничена в $C_0^\nu(\mathbb{R}, \infty)$, и $\sup$ -нормы $|\varphi_m|_0 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

(c) Для любой функции $\varphi \in C_\alpha^\nu(\mathbb{R}, \infty)$, $\alpha < 0$, существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ с компактным носителем, которая при $0 < \mu < \nu$ сходится к φ по норме пространства $C_0^\mu(\mathbb{R}, \infty)$.

Доказательство. (a) Рассмотрим сначала случай $n = 0$. На компакте K функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

с некоторой постоянной $L > 0$. Поэтому применительно к введённой выше полунорме $\{\varphi\}_\mu$ имеем очевидную оценку $\{f \circ \varphi\}_\mu \leq L\{\varphi\}_\mu$, так что $f \circ \varphi \in C_0^\mu$.

В общем случае воспользуемся индукцией по n . Тогда согласно (2.8) функции $f \circ \varphi$ и $\rho_1 f' \circ \varphi$ принадлежат пространству $C_0^{n-1,\mu}$. Поэтому в правой части равенства

$$\rho_1(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)(\rho_1 \varphi')$$

оба сомножителя принадлежат $C_0^{n-1,\mu}$, так что по определению $f \circ \varphi \in C_0^{n,\mu}$.

(b) Нетрудно видеть, что аналогичное (2.4) равенство

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu, \quad \{\varphi\}_\mu = \sup_{t_1, t_2 \in G} \frac{\rho_\mu(t_1)|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C_0^\mu(\mathbb{R}, \infty)$. Поэтому имеет место аналогичное (2.5) интерполяционное неравенство

$$\{\varphi\}_\nu \leq [\varphi]_0^{1-\mu/\nu} \{\varphi\}_\nu^{\mu/\nu}, \quad 0 < \mu < \nu,$$

из которого утверждение леммы получается непосредственно.

(c) Предположим сначала, что функция $\varphi \in C^{n,\nu}$ имеет компактный носитель. Введём срезающую функцию $\chi(t) \in C^\infty$, тождественно равную единице при $|t| \leq 1$ и нулю при $|t| \geq 2$. Утверждается, что последовательность

$$\varphi_m(t) = \chi(t/m)\varphi(t), \quad m = 1, 2, \dots,$$

сходится к φ в C_0^μ .

В самом деле эта последовательность, очевидно, ограничена в C_0^ν и $|\varphi - \varphi_m|_0 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому на основании (b) последовательность $\varphi_m \rightarrow \varphi$ по норме пространства C_0^μ .

Итак, без ограничения общности можно считать, что функция $\varphi \in C^\nu$ имеет компактный носитель. В этом случае воспользуемся стандартной конструкцией свёртки с усредняющим ядром. Пусть неотрицательная функция $h \in C^\infty$ имеет компактный носитель и интеграл от

неё по всей прямой равен единице. Тогда по отношению к $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}h(\varepsilon^{-1}t)$, $0 < \varepsilon < 1$, функции

$$\varphi_\varepsilon(t_0) = \int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(t_0 - t)\varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t_0 - \varepsilon t) dt$$

являются бесконечно дифференцируемыми и имеют компактный носитель, причём в этом равенстве можно φ заменить на $\varphi^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$. При достаточно малых ε носитель функции $\varphi - \varphi_\varepsilon$ лежит внутри некоторого отрезка прямой. Поэтому на основании (2.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\varphi - \varphi_\varepsilon \rightarrow 0$ по норме пространства $C^\mu(I)$, что завершает доказательство (с) и леммы.

Исходя из отрицательного нецелого весового порядка λ , введём пространство $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_\pm, \infty)$ как конечномерное расширение $C_\lambda^\mu(\overline{D}_\pm, \infty)$ многочленами переменной $u = (\zeta \pm i)^{-1}$. Очевидно, что при $-1 < \lambda < 0$ оно совпадает с $C_\lambda^\mu(\overline{D}_\pm, \infty)$, а при $-2 < \lambda < -1$ его элементы однозначно представляются в виде

$$\phi(\zeta) = \alpha(\zeta \pm i)^{-1} + \phi_0(\zeta), \quad \phi_0 \in C_\lambda^{n,\mu}(\overline{D}_\pm, \infty),$$

с некоторым $\alpha \in \mathbb{C}$. Аналогично при $-3 < \lambda < -2$ элементы этого пространства однозначно представляются в виде

$$\phi(\zeta) = \alpha(\zeta \pm i)^{-1} + \beta(\zeta \pm i)^{-2} + \phi_0(\zeta), \quad \phi_0 \in C_\lambda^\mu(\overline{D}_\pm, \infty),$$

с некоторыми $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и т.д.

В общем случае пространство $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_\pm, \infty)$ при $-s - 1 < \lambda < -s$ является расширением $C_\lambda^\mu(\overline{D}_\pm, \infty)$ на s измерений.

Аналогичное расширение $\tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$ можем ввести по отношению к многочленам переменной $v = t/(t^2 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$, или, что равносильно, по отношению к многочленам переменной $u = (t \pm i)^{-1}$.

Наконец, соответствующие пространства $\tilde{C}_\lambda^{n,\mu}$ дифференцируемых функций определяются индуктивно аналогичными (2.8) условиями

$$\varphi \in \tilde{C}_\lambda^{n-1,\mu}, \quad \varphi' \in \tilde{C}_{\lambda-1}^{n-1,\mu}.$$

Из определений видно, что операция $\phi \rightarrow \phi^\pm$ действует $\tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\mathbb{D}_\pm, \infty) \rightarrow \tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$.

Обратимся к интегралу типа Коши (2.1) и связанному с ним сингулярному интегралу (2.2).

Теорема 2.1. Для любого нецелого отрицательного λ оператор I ограничен и обратим $\tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty) \rightarrow \tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\overline{D}_\pm, \infty)$, причём для кусочно-аналитической функции ϕ , принадлежащей $\tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\overline{D}_\pm, \infty)$ в полуплоскостях $D_\pm$, равенство $\phi^+ - \phi^- = \varphi$ равносильно $\phi = I\varphi$.

Сингулярный оператор S ограничен в $\tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$ и совпадает со своим обратным, т.е. $S^2 = 1$, где 1 означает единичный оператор.

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор I ограничен:

$$C_\lambda^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty) \rightarrow \tilde{C}_\lambda^{n,\mu}(\overline{D}_\pm, \infty).$$

Для определённости исследуем случай верхней полуплоскости и рассмотрим сначала случай $-1 < \lambda < 0$, когда волну в обозначениях пространств можно опустить. Для $n = 0$ это утверждение установлено в работе [8], при этом, как легко видеть, для $\phi \in C_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty)$ справедлива формула Коши

$$\phi(\zeta) = (I\phi^+)(\zeta), \quad \zeta \in D_+. \quad (2.11)$$

Пусть $\varphi \in C_\lambda^{n,\mu}$, $n \geq 1$, тогда интегрированием по частям получим равенство

$$(I\varphi)'(\zeta) = (I\varphi')(\zeta), \quad \zeta \in D_+.$$

Поскольку

$$\frac{1}{t-\zeta} + \frac{1}{\zeta+i} = \frac{t+i}{\zeta+i} \frac{1}{t-\zeta}, \quad \zeta \in D_+, \quad (2.12)$$

и интеграл от φ' по $\mathbb{R}$ равен нулю, имеем

$$(\zeta+i)(I\varphi)'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(t+i)\varphi'(t) dt}{t-\zeta}.$$

На основании формулы Сохоцкого–Племеля с учётом соотношения $[(I\varphi)^+] = [(I\varphi)']^+$, вытекающего из (2.13), получим соответствующее равенство и для сингулярного интеграла:

$$(t_0+i)(S\varphi)'(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(t+i)\varphi'(t) dt}{t-t_0}.$$

Таким образом, по отношению к операции $(\mathcal{D}\phi)(\zeta) = (\zeta+i)\phi'(\zeta)$ и аналогичной операции на прямой имеем равенства $\mathcal{D}I = I\mathcal{D}$, $\mathcal{D}S = S\mathcal{D}$. Так как соотношения (2.8) можем записать в форме $\phi, \mathcal{D}\phi \in C_{\lambda}^{n-1,\mu}(\overline{D}_+, \infty)$ и аналогично для пространств на прямой, отсюда по индукции приходим к справедливости теоремы и для пространства $C_{\lambda}^{n,\mu}$, $-1 < \lambda < 0$.

При $-2 < \lambda < -1$ равенство (2.12) показывает, что

$$(\zeta+i)(I\varphi)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt + (I\varphi_0)(\zeta)$$

с функцией $\varphi_0(t) = (t+i)\varphi(t) \in C_{\lambda+1}^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$. Остаётся заметить, что по доказанному выше оператор I ограничен: $C_{\lambda+1}^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty) \rightarrow C_{\lambda+1}^{n,\mu}(\overline{D}_+, \infty)$.

Пусть далее $-3 < \lambda < -2$. Тогда согласно (2.12) можем записать

$$\frac{t+i}{\zeta+i} \frac{1}{t-\zeta} + \frac{t+i}{(\zeta+i)^2} = \left(\frac{t+i}{\zeta+i} \right)^2 \frac{1}{t-\zeta},$$

так что

$$\frac{1}{t-\zeta} + \frac{1}{\zeta+i} + \frac{t+i}{(\zeta+i)^2} = \left(\frac{t+i}{\zeta+i} \right)^2 \frac{1}{t-\zeta}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям отсюда приходим к ограниченности оператора I для рассматриваемого случая весовых порядков λ .

Продолжая этот процесс, приходим к справедливости рассматриваемого утверждения для всех нецелых отрицательных λ . С другой стороны, формулу Коши (2.11) можно применить к многочленам переменной $u = (\zeta+i)^{-1}$, что в соответствии с определением приводит к ограниченности оператора $I : \tilde{C}_{\lambda}^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty) \rightarrow \tilde{C}_{\lambda}^{n,\mu}(\overline{D}_+, \infty)$.

Пусть далее $\phi \in \tilde{C}_{\lambda}^{n,\mu}(\widehat{D}, \infty)$. Применяя к функции $\phi_0 = \phi - I(\phi^+ - \phi^-)$ формулы Сохоцкого–Племеля (2.3), получаем равенство $\phi_0^+ = \phi_0^-$, поэтому функция ϕ_0 аналитична на всей плоскости и исчезает на бесконечности, что возможно только для $\phi_0 = 0$.

Тем самым первая часть теоремы установлена. Утверждение об ограниченности оператора S в пространстве $\tilde{C}_{\lambda}^{n,\mu}(\mathbb{R}, \infty)$ вытекает из первой части теоремы и формул (2.3). Равенство $S^2 = 1$ доказывается обычным образом (см. [7, с. 115]), записывая для $\phi = I\varphi$ формулу Коши (2.11) и снова пользуясь (2.3).

Обратимся к описанию коэффициентов отражения $r(k)$, обеспечивающих справедливость основной теоремы.

Теорема 2.2. Пусть функция $r(t)$ со свойствами (1.10) принадлежит классу $C_{\delta-\nu}^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty)$, $0 < \nu < 1$, $-3 < \delta < -2$, и подчинена одному из следующих двух предположений:

(i) $|r(0)| < 1$;
(ii) $r(0) = -1$, $(|r|^2)''(0) \neq 0$, причём функция $r_0(t) = t^{-2}[1 - |r(t)|^2]$ принадлежит классу $C^{2,\nu}$ в окрестности $t = 0$.

Тогда функции a , определяемая формулами (1.6), (1.12), и $b = ra$ удовлетворяют всем условиям (1.4), (1.5), причём

$$a^{-1} - 1 \in \tilde{C}_\delta^\nu(\overline{D}_+, \infty), \quad (2.13)$$

а функции F_1 , F_2 , определяемые формулами (1.7), удовлетворяют условиям (1.8) основной теоремы.

Доказательство. Для каждого из двух предположений (i), (ii) рассуждения проведём отдельно.

(i) В этом случае функцию $\ln(1 - |r|^2)$ можно представить в виде $|r|^2 h(|r|^2)$, где $h(s) = s^{-1} \ln(1 - s)$, $|s| < 1$. Поскольку $|r(t)|^2 = r(t)\overline{r(t)} \in C_{2\delta-2\nu}^{2,\nu} \subseteq C_0^{2,\nu}$, то на основании леммы 2.1 (a) заключаем, что $h(|r|^2) \in C_0^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty)$ и, следовательно,

$$\ln(1 - |r|^2) \in C_{2\delta-2\nu}^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty) \subseteq C_\delta^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty). \quad (2.14)$$

Поэтому в силу (1.12) и теоремы 2.1 функция $\ln a_1 \in \tilde{C}_\delta^{2,\nu}(\overline{D}_+, \infty)$. С учётом леммы 2.1 (a), как и выше, отсюда выводим, что

$$e^{\pm \ln a_1} - 1 \in \tilde{C}_\delta^{2,\nu}(\overline{D}_+, \infty)$$

и, следовательно,

$$a - 1 \in \tilde{C}_\delta^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty), \quad a^{-1} - 1 \in \tilde{C}_\delta^{2,\nu}(\overline{D}_+, \infty).$$

Обратимся к проверке условия (1.8) основной теоремы. Для первых слагаемых в правой части (1.7) это условие, очевидно, выполнено. Поэтому его достаточно проверить для преобразования Фурье функций

$$r(t) = b(t)/a(t), \quad \tilde{r}(t) = b(-t)/a(t),$$

фигурирующих в (1.7).

Обозначим через $M(\mathbb{R})$ образ пространства $L^1(\mathbb{R})$ при преобразовании Фурье. Тогда с учётом хорошо известных свойств достаточно убедиться в том, что все функции $r(t)$, $r'(t)$, $tr(t)$ и $\tilde{r}(t)$, $\tilde{r}'(t)$, $t\tilde{r}(t)$ принадлежат $M(\mathbb{R})$. Воспользуемся тем, что класс дифференцируемых функций, которые вместе со своей производной принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, содержится в $M(\mathbb{R})$. Поэтому дело сводится к доказательству того, что

$$\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), t\varphi(t), t\varphi'(t) \in M(\mathbb{R}) \quad (2.15)$$

для каждой из функций $\varphi = r, \tilde{r}$.

Для $\varphi = r \in C_{\delta-\nu}^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty)$ с учётом неравенства $\delta < -3/2$ эти условия очевидным образом выполнены. Что касается функции $\varphi = \tilde{r}$, то в силу (1.4a) и (1.6), (1.12) можем записать $\tilde{r}(t) = c_0(t)\overline{r(t)}$ с коэффициентом

$$c_0(t) = \frac{\overline{a(t)}}{a(t)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{t + i\kappa_j}{t - i\kappa_j} \right)^2 e^{-2i \arg a_1(t)}.$$

Из (1.12) и формулы Сохоцкого–Племеля следует, что $2 \arg a_1 = iS[\ln(1 - |r|^2)]$. Поэтому на основании (2.14) и теоремы 2.1

$$\arg a_1(t) \in \tilde{C}_\delta^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty) \subseteq C_\delta^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty).$$

С учётом леммы 2.1 (a) отсюда следует, что $c_0 \in C_0^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty)$ и, значит, $\tilde{r} = c_0 \overline{r} \in C_\delta^{2,\nu}(\mathbb{R}, \infty)$. Поэтому соотношения (2.15) имеют место и для $\varphi = \tilde{r}$.

(ii) В этом случае для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция

$$g(t) = \ln[1 - |r(t)|^2] - 2 \ln |t| \in C^{2,\nu}[-2\varepsilon, 2\varepsilon]. \quad (2.16)$$

Рассмотрим внутри полукруга $B_\varepsilon = \{|z| \leq \varepsilon, \operatorname{Re} \zeta \geq 0\}$ аналитическую функцию

$$\psi(\zeta) = \ln \zeta - \frac{1}{\pi i} \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\ln |t| dt}{t - \zeta}.$$

В силу формулы Сохоцкого–Племеля для её граничного значения имеем выражение

$$\psi^+(t_0) = i \arg t_0 - \frac{1}{\pi i} \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\ln |t| dt}{t - t_0}.$$

Таким образом, $\operatorname{Re} \psi^+ = 0$ и, следовательно, функция ψ аналитически продолжается внутрь круга $\{|\zeta| < \varepsilon\}$. Совместно с (1.12), (2.16) отсюда следует, что

$$-2 \ln a_1(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{|t| \geq 2\varepsilon} \frac{\ln[1 - |r(t)|^2] dt}{t - \zeta} + \frac{1}{\pi i} \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{g(t) dt}{t - \zeta} + 2 \ln z - 2\psi(\zeta),$$

так что с учётом теоремы 2.1

$$\ln a_1(\zeta) + \ln \zeta \in C^{2,\nu}(B_\varepsilon). \quad (2.17)$$

В частности, отсюда следует справедливость (1.5) с $\tilde{a}(0) \neq 0$.

Запишем плотность $\ln(1 - |r|^2)$ в виде суммы $\varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_0(t) = 0$ при $|t| \geq \varepsilon/2$ и $\varphi_1 \in C_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty)$. Тогда на основании теоремы 2.1 в дополнение к (2.17) получим, что

$$\ln a_1(\zeta) \in \tilde{C}_\delta^\nu(B'_\varepsilon, \infty)$$

во внешности полукруга $B'_\varepsilon = \{|\zeta| \geq \varepsilon, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$. В результате приходим к справедливости всех утверждений первой части теоремы, включая соотношение (2.13).

Что касается условий (1.8), то они проверяются совершенно аналогично случаю (i).

3. Теоретико-функциональный подход. При выполнении условий основной теоремы обратная задача Штурма–Лиувилля однозначно разрешима и её решение может быть получено из интегрального уравнения Гельфанда–Левитана. Однако хорошо известен и теоретико-функциональный подход [9] к описанию этого решения, основанный на задаче Маркушевича для функций Йоста.

Пусть функция $r(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 с построенными по ней коэффициентами a , b . Тогда в обозначениях (1.2) основное соотношение (1.3) между функциями Йоста перейдёт в равенство

$$a^{-1}(t)g_1(x, t) = c(t)g_2(x, t) + \overline{g_2(x, t)} + h_0(x, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

с коэффициентом $c(x, t) = e^{-2ixt}r(t)$ и правой частью $h_0(x, t) = 1 - a^{-1}(t) + e^{-2ixt}r(t)$. Эти соотношения можно рассматривать как краевое условие для пары аналитических в области D_+ функций $g_j(\zeta) = g_j(x, \zeta)$, $j = 1, 2$.

Заметим, что в силу (2.10) при фиксированном x осциллирующий множитель $e(t) = e^{-2ixt}$ принадлежит $C_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty)$ и, следовательно, с учётом (2.13) функции

$$c(x, t) = e^{-2ixt}r(t) \in C_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty), \quad h_0(x, t) \in \tilde{C}_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty). \quad (3.2)$$

Опуская временно в обозначениях зависимость от x и полагая, что

$$\phi_1(\zeta) = a^{-1}(z)g_1(\zeta), \quad \phi_2(\zeta) = g_2(\zeta), \quad (3.3)$$

соотношения (3.1) для граничных значений ϕ_j^+ перейдут в равенство

$$\phi_1^+ = c\phi_2^+ + \overline{\phi_2^+} + h_0. \quad (3.4)$$

Полученную краевую задачу можно записать в форме задачи Маркушевича

$$\psi^+ - \psi^- = c\overline{\psi^-} + h_0 \quad (3.5)$$

по отношению к кусочно-аналитической функции

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \phi_1(\zeta), & \zeta \in D_+, \\ \overline{\phi_2(\zeta)}, & \zeta \in D_-. \end{cases}$$

Удобно этот термин использовать и для исходной задачи (3.4). В соответствии с (3.2) её решение $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ будем искать в классе

$$\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty), \quad 0 < \mu < \nu, \quad \delta < \lambda < -2. \quad (3.6)$$

Поскольку $\tilde{C}_\delta^\nu \subseteq C_{-\nu}^\nu$, в соответствии с (2.9) коэффициент c и правая часть h задачи принадлежат и классу $\dot{H}(\mathbb{R})$. Как установлено в статье [10], задача (3.4) однозначно разрешима в этом классе, однако его использование не даёт возможности восстановить потенциал q уравнения (1.1).

Заметим, что в случае, когда коэффициент c по модулю не превосходит некоторого числа, строго меньшего единицы, однозначная разрешимость задачи (3.4) в классе $\dot{H}(\mathbb{R})$ была установлена Б.В. Боярским [11]. Поэтому основной вклад работы [10] в теорию этой задачи состоял в том, что в случае нарушения неравенства $|c(t)| < 1$ в единственной точке $t = 0$ при дополнительном условии $(|c|)''(0) \neq 0$ задача Маркушевича может быть эквивалентно редуцирована к аналогичной задаче с некоторым новым коэффициентом $\tilde{c}(t)$, который уже по модулю меньше единицы для всех t . Эту редукцию можно осуществить и в рамках пространства $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty)$. В основе лежит следующая

Лемма 3.1. Пусть функция $c(t) \in C(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $t = 0$, стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет условиям

$$|c(0)| = 1, \quad |c(t)| < 1, \quad t \neq 0; \quad (|c|)''(0) \neq 0. \quad (3.7)$$

Тогда для любого натурального числа m существует такое $\alpha > 0$, что функция $\tilde{c}(t) = c(t) - \alpha c(0)(1 - it)^{-m}$ по модулю меньше единицы для всех t .

Доказательство опирается на рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 2 в работе [10]. Не ограничивая общности, можно считать $c(0) = 1$. Утверждается, что для некоторых положительных ε_1 и ε_2 выполнено неравенство

$$|c(t) - \alpha c(0)(1 - it)^{-m}| < 1 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha \leq \varepsilon_1, \quad 0 < |t| \leq \varepsilon_2. \quad (3.8)$$

В самом деле, опять же не ограничивая общности, можно считать $c(0) = 1$. Поскольку функция $|c|^2 = c\bar{c}$ в точке $t = 0$ достигает максимума, равного единице, с учётом (3.7) имеем соотношения

$$(c\bar{c})'(0) = 2\operatorname{Re} c'(0) = 0, \quad (c\bar{c})''(0) = -2a < 0. \quad (3.9)$$

Запишем теперь

$$|c(t) - \alpha(1 - it)^{-m}|^2 = |c(t)|^2 - 2\alpha\gamma(t) + \alpha^2(1 + t^2)^{-m},$$

где $\gamma(t) = \operatorname{Re} [c(t)(1+it)^{-m}]$. С учётом (3.9) имеем соотношения $|c(t)|^2 = 1 - at^2 + o(t^2)$ и

$$\gamma(t) = 1 + b_1 t^2 + o(t^2), \quad (1+t^2)^{-m} = 1 + b_2 t^2 + o(t^2)$$

с некоторыми постоянными b_1, b_2 . Поэтому

$$|c(t) - \alpha(1-it)^{-m}|^2 = (1-\alpha)^2 - (a_1 - 2\alpha a_2 - \alpha^2 a_3)t^2 + t^2 \gamma_0(t),$$

где $\gamma_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Выбирая ε_1 из условия $|2ab_1 + \alpha^2 b_2| \leq a/2$ при $\alpha \leq \varepsilon_1$, приходим к справедливости (3.8) для достаточно малого ε_2 .

Зафиксируем теперь ε_2 и выберем ε_1 столь малым, что имеет место неравенство

$$|\rho(t) - \alpha\rho(0)(1-it)^{-m}| < 1 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha \leq \varepsilon_1, \quad |t| \geq \varepsilon_2.$$

Тогда утверждение леммы будет выполнено при $0 < \alpha \leq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Теорема 3.1. Пусть коэффициент $c(t)$ принадлежит классу $C_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty)$ с некоторым $\delta < 0$ и удовлетворяет условию (3.7). Тогда задача (3.4) однозначно разрешима в пространстве $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty)$, где $0 < \mu < \nu$, $\delta < \lambda < 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что оператор задачи (3.4), действующий по формуле $\phi = (\phi_1, \phi_2) \rightarrow \phi_1^+ - c\phi_2^- - \overline{\phi_2}^+$, является фредгольмовым $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty) \rightarrow \tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$, и его индекс равен нулю. С этой целью воспользуемся стандартной редукцией задачи (3.4) к матричной задаче линейного сопряжения, продолжая функции $\phi_j(\zeta)$ в нижнюю полуплоскость D_- по формуле $\phi_j(z) = \overline{\phi_j(\bar{z})}$, $z \in D_-$, и добавляя к (3.4) комплексно-сопряжённое равенство. Тогда для пары $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ кусочно-аналитических функций получим краевую задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ = C\phi^- + h, \tag{3.10}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 - |c|^2 \\ 1 & -\bar{c} \end{pmatrix}, \quad h_1 = h_0 - c\bar{h}_0, \quad h_2 = -\bar{h}_0.$$

Заметим, что матрица C и правая часть h этой задачи удовлетворяют условию

$$\overline{C} = C^{-1}, \quad h + C\bar{h} = 0, \tag{3.11}$$

поэтому вместе с ϕ решением этой задачи служит и вектор-функция $\phi^*(\zeta) = \overline{\phi(\bar{\zeta})}$. Таким образом, в предположении, что $\phi = \phi_*$ по отношению к $\mathbb{R}$ -линейной операции $\phi_*(\zeta) = \overline{\phi(\bar{\zeta})}$, задача (3.10) эквивалентна (3.4).

Введём в пространстве $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty)$ аналитических в области $D = D_+ \cup D_-$ вектор-функций $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ подпространство $(\tilde{C}_\lambda^\mu)_\mathbb{R}$, линейное над полем $\mathbb{R}$, выделяемое условием $\phi = \phi_*$. Тот же символ $(\tilde{C}_\lambda^\mu)_\mathbb{R}$ сохраним и для класса вектор-функций $h = (h_1, h_2) \in \tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$, выделяемого условием $h + C\bar{h} = 0$ (различие в использовании этих обозначений будет видно из контекста). В обоих случаях имеем разложение каждого из этих двух $\mathbb{C}$ -линейных пространств в прямую сумму подпространств

$$\tilde{C}_\lambda^\mu = (\tilde{C}_\lambda^\mu)_\mathbb{R} \oplus i(\tilde{C}_\lambda^\mu)_\mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим оператор $L\phi = \phi^+ - C\phi^-$ задачи линейного сопряжения (3.10), линейный над полем $\mathbb{C}$. В силу свойства (3.11) коэффициента C этот оператор связан с операцией $\phi \rightarrow \phi_*(\zeta) = \overline{\phi(\bar{\zeta})}$ соотношением $(L\phi_*) = -\overline{L\phi}$. Таким образом, оператор L инвариантен в соответствующих подпространствах $(\tilde{C}_\lambda^\mu)_\mathbb{R}$ и его сужение обозначим как $L_\mathbb{R}$. В силу (3.12) операторы L и $L_\mathbb{R}$ обладают свойством фредгольмовости одновременно и их индексы (над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ соответственно) совпадают. Как было отмечено, в классе $(\tilde{C}_\lambda^\mu)_\mathbb{R}$ задача (3.10)

эквивалентна задаче (3.4), поэтому утверждение о фредгольмовости достаточно установить по отношению к первой из них.

В силу теоремы 2.1 вектор-функция $\phi \in \tilde{C}_\lambda^\mu$ единственным образом представима в виде $\phi = I\varphi$ с $\varphi = \phi^+ - \phi^-$. Поэтому задача (3.10) эквивалентна сингулярному интегральному уравнению $N\varphi = g$ в пространстве $\tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$ с оператором

$$2N = (1 + S) + C(1 - S), \quad (3.13)$$

где C рассматривается как оператор умножения $\varphi \rightarrow C\varphi$. Таким образом, дело сводится к аналогичному утверждению для оператора N , который согласно теореме 2.1 ограничен в этом пространстве.

Положим для краткости $X = \tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$ и покажем, что

$$CS \sim SC, \quad (3.14)$$

где эквивалентность означает равенство с точностью до оператора, компактного в пространстве X . Из выражения (3.10) видно, что матрицу C можно представить в виде суммы

$$C = E + C^0, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

с соответствующей матрицей $C^0 \in C_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty)$. На основании леммы 2.1 (с), применённой к $\rho_{-\lambda}G^0 \in C_\alpha^\nu(\mathbb{R}, \infty)$ с весовым порядком $\alpha = \delta - \lambda < 0$, существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций C_m^0 с компактным носителем, сходящаяся при $m \rightarrow \infty$ к C^0 по норме пространства $C_\lambda^\mu(\mathbb{R})$. Остаётся заметить, что для $C_m = E + C_m^0$ аналогичное соотношение (3.14) очевидно и последовательность $C_m \rightarrow C$ по операторной норме пространства X .

Очевидно также, что соотношение (3.14) справедливо и для матрицы G^{-1} , которая определяется тем же выражением по отношению к комплексно-сопряжённой функции $\bar{c}$. С учётом равенства $S^2 = 1$ теоремы 2.1 отсюда приходим к соотношению

$$RN \sim NR \sim 1,$$

где R определяется заменой в (3.13) коэффициента G на G^{-1} . Следовательно, операторы N и R фредгольмовы и их индексы противоположны.

Пусть для $0 \leq r \leq 1$ матрица $C_r(t)$ определяется как в (3.10) заменой $c(t)$ на $rc(t)$. Тогда оператор $N(r)$, полученный заменой G на G_r в (3.13), также фредгольмов и непрерывно зависит от r по операторной норме. Поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов [12, гл. 7] его индекс не зависит от r . Но при $r = 0$ оператор $2N(0) = (1 + S) + E(1 - S)$ обратим и, следовательно, индекс оператора $N(1) = N$ равен нулю.

Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что однородная задача (3.4) имеет в пространстве C_λ^μ только нулевое решение. В силу леммы 3.1 эту задачу всегда можно свести к случаю, когда

$$|c|_0 = \max_{\mathbb{R}} |c(t)| < 1. \quad (3.15)$$

В самом деле, пусть $|c(0)| = 1$ и натуральное число $m > -\lambda$. Тогда замена

$$\tilde{\phi}_1(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \alpha c(0)(1 - i\zeta)^{-m}, \quad \tilde{\phi}_2(\zeta) = \phi_2(\zeta)$$

не выводит из класса $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty)$ и сводит задачу (3.4) к аналогичной задаче с коэффициентом

$$\tilde{c}(t) = c(t) - \alpha c(0)(1 - it)^{-m} \in C_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty),$$

который на основании леммы 3.1 уже по модулю меньше единицы для всех t .

Как было отмечено выше, задача (3.4) однозначно разрешима в классе $\mathring{H}(G)$, который в силу (2.9) содержит класс $\tilde{C}_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty)$. Поэтому на основании фредгольмовости задачи в пространстве $\tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty)$ и равенства нулю индекса отсюда будет следовать и её однозначная разрешимость в этом пространстве. Однако нетрудно дать и прямое доказательство её однозначной разрешимости.

С этой целью рассмотрим вариант (3.5), (3.6) данной задачи, который аналогично предыдущему рассуждению редуцируется к эквивалентному сингулярному уравнению $N_0\varphi = h$ относительно плотности $\varphi = \psi^+ - \psi^-$ с оператором

$$N_0\varphi = \varphi - c\overline{S_+\varphi} = \varphi + cS_-\overline{\varphi},$$

где для краткости положили $2S_\pm = 1 \pm S$. Как было установлено выше, задача (3.5) фредгольмова в пространствах C_λ^μ , $-1 < \lambda < 0$, и её индекс равен нулю, так что этим свойством обладает и оператор N_0 .

Введём далее на прямой $\mathbb{R}$ банахово пространство $L_\lambda^2(\mathbb{R}, \infty)$ с конечной нормой

$$|\varphi| = \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_{-2\lambda-1}(t) |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Как обычно, функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, отождествляются.

Очевидно, что $L_\lambda^2(\mathbb{R}, \infty) = L^2(\mathbb{R})$ при $\lambda = -1/2$ и равенство

$$|\varphi| = \left(\int_{|t| \leq 1} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{|t| \geq 1} |t|^{-2\lambda-1} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

определяет эквивалентную норму. Тогда семейство банаховых пространств $L_\lambda^2(\mathbb{R}, \infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, монотонно возрастает по λ (относительно вложений). Очевидно также, что L_0^2 является L^2 -пространством относительно меры $\rho_{-1}(t) dt$, так что имеет место неравенство Гёльдера

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)\psi(t)\rho_{-1}(t) dt| \leq |\varphi|_{L_0^2} |\psi|_{L_0^2}.$$

Поэтому билинейная форма

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\psi(t) dt$$

ограничена на произведении $L_\lambda^2 \times L_{-\lambda-1}^2$. Отметим, что при $-1 < \lambda < 0$ весовой порядок $-\lambda - 1$ меняется в том же интервале.

Относительно введённой $\mathbb{R}$ -линейной формы операторы $J\varphi = \overline{\varphi}$ и S имеют самосопряжённые $J^* = J$ и $S^* = -S$. Поэтому сопряжённым к N_0 в (3.18) служит оператор

$$N_0^*\psi = \psi - S_-(\overline{c\psi}). \quad (3.16)$$

Совершенно аналогично случаю гёльдеровых пространств убеждаемся, что соотношение $cS \sim Sc$ справедливо и по отношению к пространству L_λ^2 , поэтому

$$(cJS_+)^2 \sim cS_-JcJS_+ = cS_-\overline{c}S_+ \sim 0.$$

Следовательно, оператор $1 + cJS_+$ служит регуляризатором к $N_0 = 1 - cJS_+$, так что оба они являются фредгольмовыми. Заменяя здесь множитель c на rc , $1 \leq r \leq 1$, убеждаемся, что их индексы равны нулю.

То же самое верно и по отношению к сопряжённому оператору (3.16). По определению фредгольмовости уравнение $N_0\varphi = h$ разрешимо в пространстве L_λ^2 тогда и только тогда, когда $\langle h, \psi \rangle = 0$ для всех решений $\psi \in L_{-\lambda-1}^2$ однородного уравнения $N_0^*\psi = 0$.

Полагая

$$s(\lambda) = \dim[\ker(N_0|L_\lambda^2)], \quad s^*(\lambda) = \dim[\ker(N_0^*|L_\lambda^2)],$$

равенство $\text{ind}(N_0|L_\lambda^2) = 0$ в терминах размерности можем выразить в форме $0 = s(\lambda) - s^*(-\lambda - 1)$. Поскольку целочисленная функция $s(\lambda)$ монотонно возрастает, а $s^*(-\lambda - 1)$ монотонно убывает по λ , то это возможно только тогда, когда эти функции постоянны. Но при $\lambda = -1/2$ оператор N_0 обратим в пространстве $L_{-1/2}^2 = L^2(\mathbb{R})$. Хорошо известно (см. [13, гл. 3]), что оператор S как преобразование Гильберта имеет в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ норму, равную единице, так что и норма оператора S_+ не превосходит единицы. Но тогда на основании (3.15) норма оператора cJS_+ не превосходит $|c|_0$, так что оператор N_0 действительно обратим.

Таким образом, $s(\lambda) = 0$ для всех λ в интервале $(-1, 0)$. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > 0$ пространство C_0^μ содержится в L_ε^2 и, значит, $C_\lambda^\mu \subseteq L_{\lambda+\varepsilon}^2$. Поэтому ядро $\ker(N_0|C_\lambda^\mu)$ также нулевое и, следовательно, оператор M обратим и в пространстве $C_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$, что завершает доказательство теоремы.

Напомним, что коэффициент $c(x, t) = e^{-2ixt}r(t)$ и правая часть $h(x, t)$ исходной задачи (3.4) зависят от параметра $x \in \mathbb{R}$. Возникает вопрос о характере зависимости от x её решения $\phi(x, t)$.

Лемма 3.2. Пусть коэффициент $c(x, t)$ задачи (3.4) и её правая часть $h_0(x, t)$ зависят от $x \in \mathbb{R}$ и непрерывно дифференцируемы по этой переменной, а по переменной t удовлетворяют условиям

$$c(x, t) \in C_\delta^\nu(\mathbb{R}, \infty), \quad \frac{\partial c}{\partial x} \in C_{\delta+1}^\nu(\mathbb{R}, \infty), \quad \delta < -1,$$

$$h_0(x, t) \in \tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty), \quad \frac{\partial h_0}{\partial x} \in \tilde{C}_{\lambda+1}^\mu(\mathbb{R}, \infty), \quad \delta < \lambda < -1, \quad 0 < \mu < \nu. \quad (3.17)$$

Тогда и решение $\phi(x, t)$ задачи (3.4) обладает соответствующими свойствами:

$$\phi(x, t) \in \tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \in \tilde{C}_{\lambda+1}^\mu(\overline{D}_+, \infty). \quad (3.18)$$

Доказательство. Положим для краткости $X = \tilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+, \infty)$, $Y = \tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$, и пусть X_1, Y_1 имеют аналогичный смысл по отношению к $\lambda + 1$. В принятых предположениях задачу (3.4) можем рассматривать как в пространстве X , так и в X_1 , причём согласно теореме 3.1 эта задача однозначно разрешима в пространствах X и X_1 . Обозначим через $M(x)$ оператор этой задачи, действующий $X \times X \rightarrow Y$, он принадлежит банахову пространству $\mathcal{L}(X \times X, Y)$ и обратим. При этом операторное отображение $x \rightarrow M(x)$ непрерывно $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X \times X, Y)$ и непрерывно дифференцируемо $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X_1 \times X_1, Y_1)$. Хорошо известно, что тогда аналогичным свойством обладает и отображение $x \rightarrow M^{-1}(x)$ [14, с. 278; 15, гл. 7], т.е. оно непрерывно $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(Y, X \times X)$ и непрерывно дифференцируемо $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(Y_1, X_1 \times X_1)$. При этом производная этого отображения вычисляется по формуле

$$[M^{-1}(x)]' = -M^{-1}(x)M'(x)M^{-1}(x).$$

В соответствии с (3.17) отсюда заключаем, что отображение $x \rightarrow \phi(x, t) = M^{-1}(x)h_0(x, t)$ непрерывно $\mathbb{R} \rightarrow Y \times Y$ и непрерывно дифференцируемо $\mathbb{R} \rightarrow Y_1 \times Y_1$, причём

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = [M^{-1}(x)]'h_0 + M^{-1}(x)\frac{\partial h_0}{\partial x}.$$

Тем самым соотношения (3.18) установлены.

4. Восстановление потенциала q . Теорема 3.1 совместно с леммой 3.2, применённые к задаче (3.1), позволяют восстановить потенциал q уравнения (1.1) по функциям Йоста.

Теорема 4.1. В условиях теоремы 2.2 задача (3.1) для пары $g = (g_1, g_2)$ видоизменённых функций Йоста, фигурирующих в (1.2), однозначно разрешима в классе (3.6). Эти функции представимы в виде

$$g_j(x, t) = \frac{\alpha_j(x)}{t+i} + \frac{\beta_j(x)}{(t+i)^2} + g_j^0(x, t), \quad g_j^0 \in C_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty), \quad (4.1)$$

где $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ и $g_j^0(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по x , причём

$$\frac{\partial g_j^0}{\partial x} \in C_{\lambda+1}^\mu(\mathbb{R}, \infty), \quad j = 1, 2, \quad (4.2)$$

и определяют потенциал q уравнения (1.1) по формуле

$$q(x) = -\alpha_1'(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_1^0}{\partial x}(x, t) dt = \alpha_2'(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_2^0}{\partial x}(x, t) dt.$$

Заметим, что согласно условию на λ в (3.6) интегралы в последней формуле имеют смысл.

Доказательство. Напомним, что с помощью подстановки (3.3) задача (3.1) записана в форме (3.4). По теореме 3.2 эта задача имеет единственное решение ϕ в классе (3.6). Однако в случае предположения (ii) теоремы 2.2 функция $a^{-1}(z)$ имеет в точке $z = 0$ нуль первого порядка, так что этим же свойством обладает и $\phi_1(z) = a^{-1}(z)f_1^0(z)$. В рассматриваемом случае $r(0) = -1$ и, следовательно, правая часть $h_0(t) = 1 - a^{-1}(t) + e^{-2ixt}r(t)$ также имеет нуль первого порядка в точке $t = 0$. Утверждается, что аналогичным свойством обладает и вторая компонента ϕ_2 решения задачи (3.4).

Введём функцию $\tilde{h}(t) = t^{-1}h(t) \in \tilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R}, \infty)$ и рассмотрим решение $\tilde{\phi}$ задачи (3.4) с правой частью $\tilde{h}$ в том же классе (3.6). Тогда обе функции $\phi(z)$ и $z\tilde{\phi}(z)$ являются решениями задачи (3.4) и, значит, совпадают, что и требовалось доказать. Заметим попутно, что эта тонкость в работе [10] была упущена.

Итак, существует решение $g = (g_1, g_2)$ задачи (3.1), которое принадлежит классу (3.6). В частности, на граничной вещественной оси оно представимо в виде (4.1). На основании леммы 3.2 можем также утверждать, что функции $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ и $g_j^0(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по x , причём справедливо соотношение (4.2).

Соотношения (1.2) для этих функций в области D_+ представляют собой преобразование Лапласа

$$g_j(x, \zeta) = \int_0^\infty B_j(x, s) e^{i\zeta s} ds, \quad B_j(x, s) = \begin{cases} A_1(x, x+s), & j=1, \\ A_2(x, x-s), & j=2, \end{cases}$$

от функций $B_j(x, s)$ на полуоси, которые восстанавливаются обратным преобразованием Фурье:

$$B_j(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_j(x, t) e^{-ist} dt, \quad s > 0. \quad (4.3)$$

Поскольку (см. [16, с. 269])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ist} dt}{t+i} = e^{-s}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ist} dt}{(t+i)^2} = -se^{-s}, \quad s > 0,$$

подстановка (4.2) в (4.3) приводит к выражению

$$2B_j(x, s) = e^{-s}[2\alpha_j(x) - \beta_j(x)s] + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} g_j^0(x, t) e^{-ist} dt, \quad s > 0.$$

В силу условия на λ в (3.6) это равенство можно дифференцировать под знаком интеграла, так что

$$[B_j(x, 0)]' = [A_j(x, x)]' = \alpha_j'(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_j^0}{\partial x}(x, t)(x, t) dt, \quad s > 0.$$

Поскольку по теореме 2.2 можем воспользоваться основной теоремой Фаддеева–Марченко, формула (1.9) приводит к выражению потенциала

$$q(x) = (-1)^j \left[2\alpha_j'(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_j^0}{\partial x}(x, t)(x, t) dt \right], \quad j = 1, 2,$$

через видоизменённые функции Йоста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
2. Фаддеев Л.Д. Свойства S -матрицы одномерного уравнения Шрёдингера // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. 1974. Т. 3. С. 93–180.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций. М., 1984.
6. Левитан Б.М. Достаточные условия разрешимости обратной задачи теории рассеяния на всей прямой // Мат. сб. 1979. Т. 108 (150). № 3. С. 350–357.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 63. С. 1–179.
9. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейной среде // Журн. эксп. и теор. физики. 1971. Т. 61. С. 118–134.
10. Жура Н.А., Солдатов А.П. О представлении решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1027–1037.
11. Боярский Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщ. АН ГрССР. 1960. Т. 25. № 4. С. 385–390.
12. Пале Р. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М., 1970.
13. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
14. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1991.
15. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., 1969.

Федеральный исследовательский центр РАН
“Информатика и управление”, г. Москва,
Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 11.06.2022 г.
После доработки 11.06.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.