ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1500–1514

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

© 2022 г. А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Рассмотрена периодическая краевая задача для интегро-дифференциального комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау. Его можно интерпретировать как обобщённый вариант уравнения, известного в ряде физических приложений под названием “нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау”. Изучены два естественных варианта такого уравнения, одно из них может быть включено в класс абстрактных параболических уравнений. В этом случае показана глобальная разрешимость начально-краевой задачи и, главное, доказано существование конечномерного глобального аттрактора. Изучен вопрос о структуре такого аттрактора и указана евклидова размерность его компонент. Анализ этих вопросов базируется на возможности получения явных формул для всех решений соответствующих начально-краевых задач. Рассмотрен также слабодиссипативный вариант уравнения, для которого показано существование бесконечномерного глобального аттрактора.

DOI: 10.31857/S0374064122110061, EDN: MAXXXR

Введение. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (КУГЛ) приобрело известность в математической физике благодаря широкому спектру приложений в современной физике [1]. Обычно его приводят в виде

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 + (a+ib)u_{xx},$$

где $u = u(t,x)$ – комплекснозначная функция, $a \geqslant 0$, $c, b \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ или $x \in [0,l]$, $l > 0$. Это уравнение следует дополнить соответствующими краевыми условиями. Для приложений представляют интерес частные варианты КУГЛ. Например, если $a = 0$, то уравнение называют слабодиссипативным вариантом КУГЛ или обобщённым кубическим уравнением Шрёдингера (см. [2], а также библиографию в ней). Если $c = b = 0$, $a > 0$, то получаем вариант уравнения, который принято называть вариационным КУГЛ (см., например, [1, 3, 4]).

Рассматривают и иные обобщённые варианты и модификации КУГЛ. Одним из таких следует считать следующее интегро-дифференциальное уравнение в частных производных:

$$u_t = u - (1+ic)uV(u) + (a+ib)u_{xx}, \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$, $V(u) = l^{-1}\int_0^l |u(t,x)|^2\,dx$, если $x \in [0,l]$. Уравнение (1) и некоторые его модификации получили название “нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау” (НУГЛ). Они были получены в качестве математических моделей при изучении ферромагнетизма (см., например, статьи [5, 6], а также списки литературы, приведённые в них).

В работах [7, 8] была рассмотрена периодическая краевая задача (КЗ) для уравнения (1) и его слабодиссипативного варианта, когда $a = 0$. Для обоих рассмотренных КЗ был изучен вопрос о существовании решений при всех $t > 0$, доказано существование глобального аттрактора и изучены его свойства.

Определение глобального аттрактора, инерциального многообразия для достаточно широкого класса нелинейных эволюционных уравнений с частными производными было предложено в работах [9, гл. 1; 10; 11, гл. 1]. В большом цикле статей эти вопросы были изучены для многих известных эволюционных уравнений, например, для уравнения Курамото–Сивашинского, Кана–Хиллиарда, других уравнений параболического типа [12, 13] (см. также библиографию из этих работ и монографий [9, 11]).

В данной работе будут рассмотрены аналогичные вопросы для нелокального уравнения, которое можно интерпретировать как модификацию (обобщение) интегро-дифференциального уравнения (1), которое естественно также называть НУГЛ.

Отметим также, что термин “нелокальное” уравнение иногда применяют к уравнениям иного вида, в которых присутствуют нелокальные члены. Например, уравнение с отклоняющимся аргументом, содержащим кроме $u(t,x)$ неизвестную функцию $u(t,x+h)$, $h\in\mathbb{R}$ (см., например, [14–16]). Для этих уравнений изучался иной круг вопросов.

Приведём два примера таких уравнений:

$$u_t+u=au_{xx}+K(1+\gamma\cos v),\quad u_t=au_{xx}+cv_x+b(v_x^2),$$

где $a,K,\gamma>0$, $c,h,b\in\mathbb{R}$, $u=u(t,x)$, $v=u(t,x+h)$. Содержательный случай предполагает, что коэффициенты b, h и c отличны от нуля.

1. Постановка задачи. Далее будем изучать интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, которое следует называть обобщённым комплексным нелокальным уравнением Гинзбурга–Ландау или просто НУГЛ:

$$u_t=\gamma u-(\alpha+ic)uV(u)+(a+ib)u_{xx}-(d+ig)u_{xxxx}, \tag{2}$$

где $u(t,x)$ – комплекснозначная функция, $c,a,b,d,g\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\gamma=\pm1$ или 0, и нужный вариант γ будет выбираться в процессе анализа уравнения (2). Основной вариант предполагает, что $d>0$ или $d=0$, $a>0$. Если $d=g=0$, то получим известное уравнение (1) (см. [5, 6]). Если $d^2+g^2\neq0$, то уравнение (2) в некоторых случаях может быть проинтерпретировано как модельное уравнение для некоторых задач теории упругой устойчивости [17, 18].

Как и во многих работах (см., например, [1, 5, 6]), дополним уравнение (2) периодическими краевыми условиями

$$u(t,x+2\pi)=u(t,x). \tag{3}$$

Краевая задача (2), (3) записана в нормированном виде и, в частности, этим объясняется, что период по пространственной переменной равен 2π, а нормировка $u\to\mu u$, $\mu>0$, позволяет далее считать, что $\alpha=1$. В уравнении (2) $V(u)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|u(t,x)|^2\,dx$.

Особый вариант, который заслуживает отдельного изучения, возникает при $d=a=0$. Тогда обычно уравнение (2) называют слабодиссипативной версией обобщённого уравнения Гинзбурга–Ландау. Отметим, что краевые условия (3) могут быть заменены на другие. Например, возможен вариант однородных краевых условий вида

$$u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0 \tag{4}$$

или

$$u_x(t,0)=u_x(t,\pi)=u_{xxx}(t,0)=u_{xxx}(t,\pi)=0. \tag{5}$$

В данной работе сосредоточим внимание на варианте КЗ с периодическими краевыми условиями (3).

Дополним КЗ (2), (3) начальным условием

$$u(0,x)=f(x). \tag{6}$$

В первой части статьи будет показано, что начально-краевая задача (2), (3), (6) при $d>0$ и соответствующем выборе $f(x)$ имеет “классическое” решение, если $t>0$, а также что КЗ (2), (3) имеет глобальный аттрактор A. При $d>0$ он имеет конечную евклидову размерность ($\dim A<\infty$), а при $d=a=0$ – бесконечную размерность. Подчеркнём также что при $d>0$ КЗ (2), (3) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определения из работ [19; 20, с. 92], а при $a=d=0$ КЗ может быть проинтерпретирована как “гиперболическая” (см. [21, 22]). Основная часть работы посвящена анализу КЗ (2), (3) при $d>0$. Слабодиссипативный вариант будет рассмотрен отдельно в п. 4.

2. О глобальной разрешимости начально-краевой задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу (2), (3), (6), решения которой можно представить в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(inx), \tag{7}$$

где коэффициенты Фурье $u_n(t)$ определены равенствами

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t,x)\exp(-inx)\,dx.$$

Очевидно, что в силу равенства Парсеваля $V(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|u_n(t)|^2$ начально-краевая задача (2), (3), (6) может быть записана в виде бесконечной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_n' = (a_n + ib_n)u_n - (1+ic)V(u)u_n, \tag{8}$$

где $a_n = \gamma - an^2 - dn^4$, $b_n = -bn^2 - gn^4$, $n \in \mathbb{Z}$. Система (8) дополняется начальными условиями

$$u_n(0) = f_n, \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)\,dx. \tag{9}$$

Сразу отметим, что равенства $f_k = 0$, где $k \in \mathbb{Z}_*$ ($\mathbb{Z}_*$ – некоторое подмножество целых чисел $\mathbb{Z}$), выделяют линейное подпространство, которое инвариантно для решений системы дифференциальных уравнений (8).

Положим

$$u_n(t) = \rho_n(t)\exp(i\varphi_n(t)), \quad f_n = r_n\exp(i\psi_n), \tag{10}$$

где $\rho_n(t), r_n \geqslant 0$, $\varphi_n(t), \psi_n \in \mathbb{R}$. В результате получим две последовательности задач Коши:

$$\rho_n' = a_n\rho_n - \rho_n V, \tag{11}$$

$$\rho_n(0) = r_n, \tag{12}$$

$$\varphi_n' = b_n - cV, \tag{13}$$

$$\varphi_n(0) = \psi_n, \tag{14}$$

где теперь $V = V(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2$. Уравнения (11) не зависят от φ_n и поэтому задачу Коши (11), (12) можно изучить отдельно.

Выберем какое-либо $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, и рассмотрим два уравнения

$$\rho_k' = a_k\rho_k - \rho_k V, \quad \rho_0' = a_0\rho_0 - \rho_0 V. \tag{15}$$

Если первое из уравнений (15) умножить на ρ_0, а второе – на ρ_k, и почленно вычесть, то в результате получим равенство $\rho_k'\rho_0 - \rho_k\rho_0' = \alpha_k\rho_k\rho_0$, где $\alpha_k = a_k - a_0 = -ak^2 - dk^4$. После преобразований последнего равенства имеем

$$\left(\frac{\rho_k}{\rho_0}\right)' = \alpha_k\frac{\rho_k}{\rho_0},$$

откуда следует, что

$$\rho_k = \frac{r_k}{r_0}\rho_0\exp(\alpha_k t). \tag{16}$$

Эти преобразования позволяют записать уравнение с номером $k=0$ системы (11) в следующем виде:

$$\rho_0' = a_0\rho_0 - \frac{\rho_0^3}{r_0^2}S(t), \tag{17}$$

где, естественно, $\rho_0(0)=r_0$, а

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2 \exp(2\alpha_k t), \quad r_k = |f_k|.$$

Если считать, что $f(x)\in \mathbb{L}_2(0,2\pi)$ при $x\in(0,2\pi)$, то последний ряд, разумеется, сходится. Уравнение (17) – это уравнение Бернулли и, следовательно, может быть проинтегрировано. После замены $1/\rho_0^2 = y$ стандартным образом получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение для $y(t)$:

$$y' = -2a_0 y + 2\frac{S(t)}{r_0^2}.$$

Если все $a_k\neq 0$, то у последнего линейного неоднородного дифференциального уравнения отсутствуют резонансные члены, и для $\rho_0(t)$ получаем формулу (если, конечно, учесть, что $\rho_0(0)=r_0$)

$$\rho_0(t) = \frac{r_0\exp(a_0 t)}{\sqrt{1+Q(t)}}, \tag{18}$$

где $a_0=\gamma$, $Q(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2(\exp(2a_k t)-1)/a_k$. Нетрудно убедиться в том, что $Q(t)>0$ при $t>0$. Действительно, $Q(0)=0$, а $Q'(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2\exp(2a_k t)>0$, если $t>0$. Ряд в правой части равенства для $Q'(t)$ при $t\geqslant t_0>0$ сходится равномерно, так как $\lim\limits_{|k|\to\infty} a_k/k^4 = -d<0$.

Если же при некоторых k выполнены равенства $a_k=0$, т.е. $\alpha_k=-a_0$ $(a_0=\gamma)$, то при интегрировании линейного неоднородного уравнения для $y(t)$ возникают резонансные случаи, когда сумма $S(t)$ содержит слагаемые с $\exp(-2a_0 t)$. Тогда следует заменить $Q(t)$ на другую функцию:

a) если существует только одна пара чисел $k=m$, $k=-m$, когда $\gamma - ak^2 - dk^4 = 0$, то $Q(t)$ следует в формуле (18) заменить на функцию

$$Q_1(t) = \sum_{k\neq\pm m} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t)-1) + 2t(r_m^2 + r_{-m}^2);$$

b) если биквадратное уравнение имеет четыре корня: $k=\pm m_1$, $k=\pm m_2$, то $Q(t)$ следует заменить на

$$Q_2(t) = \sum_{k\neq\pm m_1,\pm m_2} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t)-1) + 2t(r_{m_1}^2 + r_{-m_1}^2 + r_{m_2}^2 + r_{-m_2}^2);$$

c) если $m_1=0$ $(m_2>0)$, то получаем частный случай, и $Q(t)$ следует заменить на

$$Q_3(t) = \sum_{k\neq 0, k\neq\pm m_2} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t)-1) + 2t(r_0^2 + r_{m_2}^2 + r_{-m_2}^2).$$

Далее будем считать, что реализовался основной вариант, когда $a_k\neq 0$ (т.е. $\gamma=\pm 1$) при всех целых k и, следовательно, для определения $\rho_0(t)$ можно использовать равенство (18).

Итак, из формулы (16) вытекает, что

$$\rho_k(t) = \frac{r_k\exp(a_k t)}{\sqrt{1+Q(t)}}.$$

Уравнения (13) приобретают вид

$$\varphi_n' = b_n - c\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r_k^2\exp(2a_kt)}{1+Q(t)},$$

и $\varphi_n(t)$ находится интегрированием правой части последнего равенства, т.е.

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n,0}(t) + \psi_n,$$

где $\varphi_{n,0}(t) = b_nt - (c/2)\ln(1+Q(t))$, а $\psi_n = \varphi_n(0)$. Наконец, получаем, что

$$u_k(t) = \frac{r_k\exp(a_kt)}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(i\varphi_k(t)) = f_k\frac{1}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(a_kt + i\varphi_{k,0}(t)).$$

Здесь учтено равенство $f_k = r_k\exp(i\psi_k)$. Используя формулу (7), получаем решение КЗ (2), (3) в явном виде

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\frac{1}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(a_kt + i\varphi_{k,0}(t))\exp(ikx). \tag{19}$$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция и при $x\in(0,2\pi)$ принадлежащая классу $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$. Тогда ряд в правой части формулы (19) при $t>0$ сходится равномерно и имеет частные производные любого порядка. Доказательство этих утверждений стандартно и повторяет, например, доказательство сходимости соответствующего функционального ряда при интегрировании методом Фурье первой КЗ для уравнения теплопроводности (см., например, [23, гл. 1, § 3]). Основным моментом здесь является то, что справедливо предельное равенство

$$\lim_{|k|\to\infty}\frac{a_k}{k^4} = -d < 0,$$

если вспомнить, что $a_k = \gamma - ak^2 - dk^4$, $d>0$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in\mathbb{L}_2(0,2\pi)$ и имеет период 2π. Тогда начально-краевая задача (2), (3), (6) имеет решение $u(t,x)$, которое может быть определено формулой (19). При этом:*

1) $u(t,x)\in\mathbb{C}^\infty$ при всех $x\in\mathbb{R}$ и всех $t>0$;

2) $\lim\limits_{t\to+0}u(t,x) = f(x)$.

Последний предел следует понимать в смысле нормы в пространстве $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$, т.е. выполнено предельное равенство

$$\lim_{t\to+0}\int_0^{2\pi}(u(t,x)-f(x))^2\,dx = 0.$$

Замечание 1. Если $f(x)\in\mathbb{H}_2^k$, $k=1,2,\ldots$ ($f(x)\in\mathbb{W}_2^k[0,2\pi]$ и имеет период 2π), то $\lim\limits_{t\to+0}u(t,x) = f(x)$ можно понимать в смысле нормы пространства Соболева $\mathbb{W}_2^k[0,2\pi]$, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\sum_{m=0}^{k}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial x^m} - f^{(m)}(x)\right)^2dx = 0,\quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Замечание 2. Аналогичный результат справедлив, если $d=0$, но $a>0$. В этом можно убедиться, повторив последовательно построения данного пункта. Случай когда $a=d=0$ будет изучаться отдельно в п. 4.

3. Инвариантные многообразия. Как и в п. 2 сначала изучим систему дифференциальных уравнений (11). Она, конечно, имеет нулевое состояние равновесия ($\rho_k = 0$ при любом $k \in \mathbb{Z}$). Для дальнейших построений у этой системы актуально рассмотреть вопрос о существовании ненулевых состояний равновесия.

Состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (11) следует искать как решения системы алгебраических уравнений $\rho_n(a_n - V) = 0$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, ненулевые решения могут появиться, если $a_k - V = 0$ при некоторых или всех $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $a_n \leqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\rho_n(a_n - V) < 0$ при всех n, если хотя бы одно $\rho_m > 0$ ($\rho_m \neq 0$). Но тогда $\rho_n' < 0$, т.е. функция $\rho_n(t)$ убывает до нуля при всех $t > 0$. Итак, справедливо утверждение.

Лемма 1. *Пусть при всех n справедливо неравенство $a_n \leqslant 0$. Тогда:*

1) система дифференциальных уравнений (11) не может иметь ненулевых состояний равновесия;

2) при всех n справедливо предельное равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_n(t) = 0$.

Из второй части последнего утверждения вытекает, что все решения системы дифференциальных уравнений (11) при $t \to \infty$ приближаются к нулевому состоянию равновесия.

Итак, система дифференциальных уравнений (11) может иметь ненулевые состояния равновесия, если существует набор индексов m, при которых $a_m > 0$. Очевидно, что $a_{-m} = a_m$ ($m \neq 0$). Поэтому далее достаточно ограничиться индексами $m \geqslant 0$. Соответствующие наборы $\{m\}$, $\{a_m\}$ обозначим через $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{M}_+$. Оба множества имеют конечный набор элементов, так как $\lim\limits_{|n|\to\infty} (\gamma - an^2 - dn^4) = -\infty$, если $d > 0$ (или $d = 0$, $a > 0$).

Если $\gamma = 1$, $d > 0$, то $m \in [0, \xi)$, $\xi = \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 + 4d})/2d}$.

Если $\gamma = 1$, $d = 0$, $a > 0$, то $m \in [0, \xi_0)$, где $\xi_0 = \sqrt{1/a}$. В обоих этих вариантах $\mathbb{M}_+ \neq \varnothing$, так как $a_0 = \gamma = 1 \in \mathbb{M}_+$.

Если $\gamma = -1$, $d > 0$, $a < 0$, $d > 0$, $a^2 - 4d > 0$, то $m \in (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_{1,2} = \sqrt{(-a \mp \sqrt{a^2 - 4d})/2d}$.

Наконец, если $\gamma = 0$, $a < 0$, $d > 0$, то $m \in (0, \xi_0)$, $\xi_0 = \sqrt{-a/d}$.

В остальных случаях множества $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{M}_+$ будут пустыми.

Пусть реализовался один из вариантов, когда множества $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{M}_+$ не пусты и выбраны соответствующие элементы этих множеств. Возможны следующие варианты для определения координат состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (11).

1. Пусть $m_0 = 0$. Тогда

$$\rho_0(t) = \rho_0 = 1, \quad \rho_n(t) = 0, \quad n \neq 0.$$

2. Пусть $m_0 \neq 0$. Тогда $a_{-m_0} = a_{m_0} > 0$. Если же при всех остальных целых $n \neq \pm m_0$ выполнено условие $a_n \neq a_{m_0}$, то

$$\rho_{m_0}^2 + \rho_{-m_0}^2 = a_{m_0}, \quad \rho_k = 0 \quad \text{при} \quad n \neq \pm m_0.$$

3. Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ и оказалось, что $a_{m_1} = a_{m_2}$ ($a_{-m_1} = a_{m_1}$, $a_{-m_2} = a_{m_2}$). Тогда координаты состояний равновесия ρ_{m_1}, ρ_{m_2}, ρ_{-m_1}, ρ_{-m_2} находим из уравнения

$$\rho_{m_1}^2 + \rho_{-m_1}^2 + \rho_{m_2}^2 + \rho_{-m_2}^2 = a_{m_1} = a_{m_2},$$

а $\rho_n = 0$ для остальных n.

4. Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ и $m_1 = 0$ ($a_{m_1} = a_0$). Тогда ненулевые координаты находим из уравнения

$$\rho_0^2 + \rho_{m_2}^2 + \rho_{-m_2}^2 = a_0 = 1 \quad (\gamma = 1),$$

а для остальных n справедливы равенства $\rho_n = 0$.

Соответствующие состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (11) обозначим через S_0, S_{m_0}, S_{m_1,m_2}, S_{0,m_2}.

Уместно подчеркнуть, что иных состояний равновесия, отличных от нулевого (см. пп. 1–4), быть не может. Равенство $a_{m_*} = a_{m_{**}}$ для двух различных $m_*, m_{**} \in \mathbb{N}$ может быть реализовано максимум для одной пары натуральных чисел $m_* = m_1$, $m_{**} = m_2$, так как квадратное уравнение $\gamma - a\eta - d\eta^2 = \delta$ не может иметь более двух корней, $\delta \in \mathbb{R}$.

Использование равенств (7) и (10) позволяет перенести полученные для системы (11) результаты на систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8) (задачу Коши (8), (9)) и КЗ (2), (3). При этом, конечно, следует найти соответствующие $\varphi_n(t)$ из уравнений системы (13) простым интегрированием.

Теорема 2. *1) Состоянию равновесия S_0 системы дифференциальных уравнений (11) соответствует цикл системы дифференциальных уравнений (8)*

$$C_0: \quad u_0(t) = \exp(i\omega_0 t + i\psi_0), \quad u_n = 0, \quad n \neq 0,$$

где $\omega_0 = -c$, $\psi_0 \in \mathbb{R}$, а также цикл A_0 КЗ (2), (3), $u(t,x) = u_0(t)$.

2) Однопараметрическому семейству состояний равновесия S_{m_0} соответствует трёхмерное инвариантное многообразие C_{m_0} системы (8), сформированное периодическими решениями вида

$$u_{m_0}(t) = \rho_{m_0}\exp(i\omega_{m_0}t + i\psi_{m_0}), \quad u_{-m_0}(t) = \rho_{-m_0}\exp(i\omega_{-m_0}t + i\psi_{-m_0}),$$

где $\rho_{m_0}^2 + \rho_{-m_0}^2 = a_{m_0}$, $\omega_{-m_0} = \omega_{m_0} = -ca_{m_0} - bm_0^2 - gm_0^4$, $\psi_{m_0}, \psi_{-m_0} \in \mathbb{R}$, $u_n(t) = 0$ при остальных n. КЗ (2), (3) в этом случае имеет трёхмерное инвариантное многообразие A_{m_0}, сформированное решениями следующего вида:

$$u(t,x) = u_{m_0}(t)\exp(im_0x) + u_{-m_0}(t)\exp(-im_0x).$$

3) Пусть система дифференциальных уравнений (11) имеет трёхпараметрическое семейство состояний равновесия S_{m_1,m_2}. Тогда система дифференциальных уравнений (8) и КЗ (2), (3) имеют инвариантные многообразия C_{m_1,m_2} и A_{m_1,m_2} размерности, равной семи, соответственно. Многообразия C_{m_1,m_2} имеют вид

$$u_{m_1}(t) = \rho_{m_1}\exp(i\omega_{m_1}t + i\psi_{m_1}), \quad u_{-m_1}(t) = \rho_{-m_1}\exp(i\omega_{-m_1}t + i\psi_{-m_1}),$$

$$u_{m_2}(t) = \rho_{m_2}\exp(i\omega_{m_2}t + i\psi_{m_2}), \quad u_{-m_2}(t) = \rho_{-m_2}\exp(i\omega_{-m_2}t + i\psi_{-m_2}),$$

$$u_n(t) = 0, \quad n \neq \pm m_1, \pm m_2,$$

а многообразие A_{m_1,m_2} содержит решения КЗ (2), (3) вида

$$u(t,x) = \sum_{k=\pm m_1,\pm m_2} u_k(t)\exp(ikx).$$

При этом

$$\rho_{m_1}^2 + \rho_{-m_1}^2 + \rho_{m_2}^2 + \rho_{-m_2}^2 = a_{m_1} \quad (a_{m_2} = a_{m_1} \text{ в данном случае}), \quad \psi_k \in \mathbb{R}, \quad k = \pm m_1, \pm m_2,$$

$$\omega_{\pm m_1} = -ca_{m_1} - bm_1^2 - gm_1^4, \quad \omega_{\pm m_2} = -ca_{m_2} - bm_2^2 - gm_2^4.$$

4) Пусть система дифференциальных уравнений (11) имеет двухпараметрическое семейство состояний равновесия

$$S_{0,m_2}: \quad \rho_0(t) = \rho_0, \quad \rho_{m_2}(t) = \rho_{m_2}, \quad \rho_{-m_2}(t) = \rho_{-m_2}, \quad \rho_n = 0, \quad \text{если} \quad n = 0, \pm m_2,$$

$$\rho_0^2 + \rho_{m_2}^2 + \rho_{-m_2}^2 = a_0 \quad (a_{m_2} = a_0 = 1).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (8) имеет пятимерное инвариантное многообразие

$$C_{0,m_2}: \quad u_0(t) = \rho_0\exp(i\omega_0 t + i\psi_0), \quad u_{m_2}(t) = \rho_{m_2}\exp(i\omega_{m_2}t + i\psi_{m_2}),$$

$$u_{-m_2}(t) = \rho_{-m_2}\exp(i\omega_{-m_2}t + i\psi_{-m_2}), \quad u_n(t) = 0,$$

если $n \neq 0,\ \pm m_2$, *а КЗ (2), (3) – пятимерное инвариантное многообразие*

$$A_{0,m_2}: \quad u(t,x) = u_0(t) + u_{m_2}(t)\exp(im_2x) + u_{-m_2}(t)\exp(-im_2x).$$

Здесь $\psi_0, \psi_{m_2}, \psi_{-m_2} \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = -c$, $\omega_{\pm m_2} = -ca_{m_2} - bm_2^2 - gm_2^4$.

Подчеркнём, что из предыдущих построений вытекает следующее. Пусть $k \in \mathbb{Z}_-$, где $\mathbb{Z}_-$ содержит те индексы у элементов последовательности $\{a_k\}$, для которых $a_k < 0$. Если теперь рассмотреть те компоненты $\rho_k(t)$ системы (11), где $k \in \mathbb{Z}_-$, то

$$\rho_k(t) = r_k\frac{\exp(a_kt)}{\sqrt{1+Q(t)}} \leqslant r_k\exp(a_kt),$$

т.е. $\rho_k(t) \to 0$ со скоростью экспоненты. При этом нетрудно показать, что для таких a_k справедливо неравенство $a_k \leqslant -\nu < 0$, где ν – некоторая положительная постоянная.

Следовательно, соответствующие $u_k(t)$ в формуле (7) таковы, что для них $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$. Более того, линейное подпространство фазового пространства (пространства начальных условий), для которых $f_k = 0$ $(k \in \mathbb{Z}_-)$, инвариантно. Следовательно, это конечномерное линейное подпространство фазового пространства (пространства начальных условий) будет инерциальным для КЗ (2), (3) в смысле определения из работы [10]. Решения на нем задаются формулой

$$u(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus Z_-} u_m(t)\exp(imx),$$

где справа находится сумма из конечного числа слагаемых.

Замечание 3. Пусть $\mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}_0 \neq \mathbb{Z})$ – множество тех индексов k, для которых $a_k \leqslant 0$. Из предыдущих фрагментов очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_s(t) = 0$, если $s \in \mathbb{Z}_0$, и линейное подпространство, где $f_s = 0$, инвариантно. Все решения, которые не принадлежат этому подпространству, стремятся к нему, но не обязательно со скоростью экспоненты. Поэтому линейное подпространство $f_s = 0$ $(s \in \mathbb{Z}_0)$ не является инерциальным, если строго следовать определениям работы [10].

4. Глобальный аттрактор. Сформулируем сразу основной результат данного пункта, относящийся к вопросу о существовании глобального аттрактора КЗ (2), (3).

Теорема 3. *Пусть*

$$A_{ga} = \{0\}\bigcup B_1\bigcup B_2,$$

где $\{0\}$ *– нулевое состояние равновесия КЗ (2), (3),* $B_1 = \bigcup_j A_{m_j}$ *– объединение тех инвариантных многообразий КЗ (2), (3), существование которых гарантируют пп. 1) и 2) теоремы 2, а* $B_2 = \bigcup_j A_{m_{j_1}m_{j_2}}$, *существование которых гарантируют пп. 3), 4) теоремы 2.*

Тогда A_{ga} *– глобальный аттрактор для решений КЗ (2), (3) в смысле определений из [9, с. 20–27], т.е. все решения КЗ с течением времени приближаются к одной из компонент* A_{ga}.

Замечание 4. Не исключён вариант, когда $A_{ga} = \{0\}$, т.е. состоит только из нулевого состояния равновесия. Так будет, например, если все $a_n \leqslant 0$. При $\gamma = 1$ очевидно, что $a_0 = 1 > 0$ и поэтому существует по-крайней мере одна компонента A_0 и, следовательно, A_{ga} содержит не только нулевое состояние равновесия КЗ (2), (3).

Центральное место в обосновании справедливости утверждения теоремы 3 отводится доказательству следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть* S_* *– объединение всех существующих ненулевых состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (11) и* $S_{ga} = \{0\}\bigcup S_*$. *Тогда* S_{ga} *– глобальный аттрактор для решений системы дифференциальных уравнений (11).*

Напомним, что состояния равновесия системы (11) обозначены как S_0, S_{m_0}, S_{m_1,m_2}, S_{0,m_2}. Действительно, пусть $\mathbb{M}_+ \neq \varnothing$ и $\max\limits_{m\in\mathbb{M}_+} a_m = a_{m_*}$ $(a_{-m_*} = a_{m_*})$. Тогда в случае

реализации максимума только на одной паре индексов $(m_*, -m_*)$ все решения, у которых $r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2 \neq 0$, с течением времени приближаются к S_{m_*}. Действительно, рассмотрим какую-либо функцию $\rho_s(t)$, где $s \neq m_*, -m_*$. Тогда можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_s(t) = 0$.

Пусть при всех s выполнено условие $a_s \neq 0$. Тогда

$$Q(t) = \sum_{s\neq\pm m_*} \frac{r_s^2}{a_s}(\exp(2a_s t) - 1) + \frac{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}{a_{m_*}}(\exp(2a_{m_*} t) - 1),$$

если учесть, что $a_{m_*} = a_{-m_*}$. При этом функции $1 + Q(t)$ можно записать в виде

$$1 + Q(t) = \exp(2a_{m_*} t)\left(\frac{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}{a_{m_*}} + Q_0(t)\right),$$

где

$$Q_0(t) = \exp(-2a_{m_*} t)\left(1 - \frac{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}{a_{m_*}} + \sum_{s\neq\pm m_*} \frac{r_s^2}{a_s}(\exp(2a_s t) - 1)\right),$$

а значит, $\lim\limits_{t\to\infty} Q_0(t) = 0$, так как все $a_s < a_{m_*}$. Но тогда

$$\rho_s(t) = r_s \frac{\exp(a_s - a_{m_*})t}{\sqrt{(r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2)/a_{m_*} + Q_0(t)}} \to 0$$

при $t \to \infty$ $(a_s - a_{m_*} < 0)$.

Если $s = m_*$ или $s = -m_*$, то

$$\lim_{t\to\infty} \rho_{m_*}(t) = r_{m_*} \frac{\sqrt{a_{m_*}}}{\sqrt{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}}, \quad \lim_{t\to\infty} \rho_{-m_*}(t) = r_{-m_*} \frac{\sqrt{a_{-m_*}}}{\sqrt{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}},$$

но

$$\left(r_{m_*} \frac{\sqrt{a_{m_*}}}{\sqrt{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}}\right)^2 + \left(r_{-m_*} \frac{\sqrt{a_{-m_*}}}{\sqrt{r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2}}\right)^2 = a_{m_*}.$$

Следовательно, все решения приближаются к S_{m_*}.

Если $r_{m_*}^2 + r_{-m_*}^2 = 0$, то рассмотрим $\mathbb{M}_+ \backslash \{a_{m_*}, a_{-m_*}\}$. Так как множества (подпространства) $r_{m_*} = r_{-m_*} = 0$ инвариантны для решений системы дифференциальных уравнений (11), то можно повторить предыдущие построения для системы (11), в которой "исключены" два уравнения с номерами m_*, $-m_*$.

Пусть теперь m_{**}, $-m_{**}$ – номера наибольших элементов множества $\mathbb{M}_+$, в которых исключены a_{m_*} и a_{-m_*}. Тогда при выполнении условия

$$r_{m_{**}}^2 + r_{-m_{**}}^2 \neq 0$$

все решения системы (11) стремятся к $S_{m_{**}}$ и т.д.

Если же оказалось, что все $r_s = r_{-s} = 0$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$, то рассматриваем систему (11) без этих уравнений. У оставшейся подсистемы $a_k \leqslant 0$ и, следовательно, все решения приближаются к нулевому состоянию равновесия.

Вариант, когда $m_* = 0$, разбирается аналогично и он проще. Здесь были рассмотрены случаи общего положения. Если, например, $\max\{a_s\}$ реализуется при $m = \pm m_1$, $m = \pm m_2$, то при выполнении условия

$$r_{m_1}^2 + r_{-m_1}^2 + r_{m_2}^2 + r_{-m_2}^2 \neq 0$$

все решения системы (11) приближаются к инвариантному многообразию S_{m_1,m_2} (см. его определение в п. 3).

Отметим, что при реализации $\max\{a_*\}$ при $m=0$ и $m=\pm m_2$ $(m_2\neq 0)$ и выполнения условия

$$r_0^2+r_{m_2}^2+r_{-m_2}^2\neq 0$$

все решения КЗ (2), (3) приближаются к инвариантному многообразию S_{0,m_2}.

Перейдём теперь к системе дифференциальных уравнений (8). Напомним, что в одной из возможных форм записи

$$u_k(t)=\rho_k(t)\exp(i\varphi_{k,0}t+i\psi_k),$$

где $\psi_k=\varphi_k(0)$, а $\varphi_{k,0}(t)=b_kt-(c/2)\ln(1+Q(t))$. При $k\neq\pm m_*$ (или $k\neq\pm m_1,\pm m_2$ в особом варианте) справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$, так как $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_k(t)=0$ (см. лемму 2).

При $k=m_*$ или $k=-m_*$ получаем, что

$$\lim_{t\to\infty}\rho_k(t)=\frac{\sqrt{a_{m_*}}r_{m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}},\quad \text{если}\quad k=m_*,$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\rho_k(t)=\frac{\sqrt{a_{-m_*}}r_{-m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}},\quad \text{если}\quad k=-m_*.$$

Наконец, $\lim\limits_{t\to\infty}\ln(1+Q(t))/t=2a_{m_*}$. Поэтому достаточно стандартным образом проверяется, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(u_{m_*}(t)-\frac{\sqrt{a_{m_*}}r_{m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}}\exp(i\omega_{m_*}t+i\psi_{m_*}+i\beta_{m_*})\right)=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(u_{-m_*}(t)-\frac{\sqrt{a_{-m_*}}r_{-m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}}\exp(i\omega_{-m_*}t+i\psi_{-m_*}+i\beta_{-m_*})\right)=0,$$

где $\psi_{m_*},\psi_{-m_*}\in\mathbb{R}$ и были указаны ранее (см. условия (14)), $\omega_{m_*}=\omega_{-m_*}=(b_{m_*}-ca_{m_*})$, $b_{m_*}=-bm_*^2-gm_*^4$, а

$$\beta_{m_*}=-\frac{c}{2}\ln\left(\frac{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}{a_{m_*}}\right),\quad \beta_{-m_*}=-\frac{c}{2}\ln\left(\frac{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}{a_{m_*}}\right).$$

Окончательно получаем

$$\lim_{t\to\infty}\left(u(t,x)-\frac{a_{m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}}\left(r_{m_*}\exp(i\omega_{m_*}t+i\psi_{m_*}+i\beta_{m_*})\exp(im_*x)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+r_{-m_*}\exp(i\omega_{-m_*}t+i\psi_{-m_*}+\beta_{-m_*})\exp(-im_*x)\right)\right)=0,$$

т.е. $u(t,x)$ приближается к функции, принадлежащей A_{m_*} – одной из компонент A_{ga}. Разность между решением КЗ (2), (3) и некоторой функцией, принадлежащей компоненте A_{m_*} аттрактора A_{ga}, стремится к нулю по норме пространства $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$ (и даже пространства $\mathbb{W}_2^p[0,2\pi]$ при любом p).

Здесь детально разобран случай общего положения, когда $\max\{a_m\}$ достигается на одной паре m_*, $-m_*$. Если этот максимум достигается на двух парах $\pm m_1$, $\pm m_2$, то последнюю формулу следует подкорректировать и повторить аналогичные рассуждения.

В этом случае соответствующую “предельную функцию” следует выбрать в следующем виде:

$$u_*(t,x)=\frac{a_{m_1}}{(r_{m_1}^2+r_{-m_1}^2+r_{m_2}^2+r_{-m_2}^2)^{1/2}}[r_{m_1}\exp(i\omega_{m_1}t+i\psi_{m_1}+i\beta_{m_1})\exp(im_1x)+$$

$$+ r_{-m_1}\exp(i\omega_{-m_1}t + i\psi_{-m_1} + i\beta_{-m_1})\exp(-im_1x) +$$
$$+ r_{m_2}\exp(i\omega_{m_2}t + i\psi_{m_2} + i\beta_{m_2})\exp(im_2x) + r_{-m_2}\exp(i\omega_{-m_2}t + i\psi_{-m_2} + i\beta_{-m_2})\exp(-im_2x)],$$

где величины β_{m_1}, β_{-m_1}, β_{m_2}, β_{-m_2} вычисляются аналогичным образом, как и ранее. Функция $u_*(t,x)$ принадлежит глобальному аттрактору A_{ga} (его компоненте A_{m_1,m_2}).

Напомним, что в этом особом случае, когда $a_{m_1} = a_{m_2}$ $(a_{-m_1} = a_{m_1},\ a_{-m_2} = a_{m_2})$, частоты ω_{m_1}, ω_{m_2}, ω_{-m_1}, ω_{-m_2} вычисляются по формулам

$$\omega_{m_1} = \omega_{-m_1} = -bm_1^2 - gm_1^4 - ca_{m_1}, \quad \omega_{m_2} = \omega_{-m_2} = -bm_2^2 - gm_2^4 - ca_{m_2}.$$

Решение $u_*(t,x)$ по переменной t зависит от двух частот ω_{m_1}, ω_{m_2}. В ситуации общего положения они несоизмеримы, т.е. $u_*(t,x)$ относительно переменной t будет почти-периодической функцией (по x, естественно, она имеет период 2π). Вариант, когда $m_1 = 0$, а $m_2 \neq 0$ и $a_0 = a_m$, разбирается аналогично двум предшествующим.

В заключение этого пункта подчеркнём ещё раз, что все решения КЗ (2), (3) при $d > 0$ $(d = 0,\ a > 0)$ с течением времени стремятся к одной из компонент A_{ga}. В ситуации общего положения для $f(x)$ $(u(0,x) = f(x))$ номер компоненты выбирается как m_* – это номер $a_{m_*} = \max\{a_m\}$, если $a_{m_*} > 0$. Функцию $f(x)$ можно выбрать таким образом, что компонента может быть и иной, включая нулевое состояние равновесия КЗ (2), (3). Так, например, если множества $\mathbb{M}_+$ и $\mathbb{Z}_+$ не пусты, но $f_k = 0$, если $k \in \mathbb{Z}_+$, то решение начально-краевой задачи (2), (3), (6) стремится к нулю.

5. Слабодиссипативный вариант нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау. Рассмотрим КЗ

$$u_t = \gamma u - (1+ic)uV(u) + ibu_{xx} - igu_{xxxx}, \tag{20}$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x), \tag{21}$$

т.е. КЗ (2), (3), в которой $\alpha = 1$, $a = d = 0$. Последние два равенства характеризуют тот вариант уравнения Гинзбурга–Ландау, который принято называть слабодиссипативным. Без нарушения общности, если $\gamma > 0$, можно считать, что $\gamma = 1$. Это достигается нормировками t и неизвестной функцией $u(t,x)$. Случай $\gamma \leqslant 0$ не представляет интереса, так как тогда любое решение КЗ (20), (21) стремится к нулю.

Итак, далее считаем, что $\gamma = 1$. Как и ранее, решение КЗ (20), (21) можно искать в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(inx).$$

При этом

$$V(u) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2.$$

В данном случае для $u_n(t)$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$u_n' = (a_n + ib_n)u_n - (1+ic)u_nV(u), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{22}$$

где $a_n + ib_n = 1 + i(-bn^2 - gn^4)$, $u_n = u_n(t)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Положим $u_n(t) = \rho_n(t)\exp(i\varphi_n(t))$. Система (22) может быть заменена на две действительные системы

$$\rho_n' = \rho_n(1 - V(\rho)), \tag{23}$$

$$\varphi_n' = b_n - cV(\rho), \tag{24}$$

где $b_n = -bn^2 - gn^4$, $V(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2$.

Если дополнить КЗ (20), (21) начальным условием

$$u(0,x) = f(x),$$

то систему (22) следует уже дополнить начальным условием

$$u_n(0) = f_n,$$

где $\{f_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ при её разложении в ряд Фурье в комплексной форме. В свою очередь, систему (23), (24) следует дополнить начальными условиями

$$\rho_n(0) = r_n, \quad \varphi_n(0) = \psi_n, \tag{25}$$

где f_n, r_n, ψ_n связаны соотношением $f_n = r_n \exp(i\psi_n)$.

С одной стороны, очевидно, что КЗ (2), (3) и (20), (21) близки. Вторая КЗ может быть проинтерпретирована как основная КЗ (2), (3), в которой $a_n = 1$. Поэтому многие из аналитических результатов близки. Тем не менее есть существенное различие между этими КЗ. Как уже отмечалось, КЗ (2), (3) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определения из работ [19; 20, с. 92]. В то же время КЗ (20), (21) может быть включена в класс абстрактных гиперболических уравнений в смысле определений из работ [21, 22].

Сначала отметим некоторые близкие моменты. Например, анализ системы дифференциальных уравнений (23), дополненной первым из условий (25), показывает, что

$$\rho_n(t) = \frac{r_n}{r_0}\rho_0(t).$$

Повторяя построения из п. 2, получаем формулу для решений КЗ (20), (21), которая имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n v_n(t) \exp(inx), \tag{28}$$

где

$$v_n(t) = \frac{\exp(ib_n t - i(c/2)\ln(1 - Q_0 + \exp(2t)Q_0))}{\sqrt{(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0}}, \quad Q_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2.$$

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{H}_2^4$, *тогда формула (28) определяет решение КЗ (20), (21) при любом* $t > 0$.

Не считая вывода формулы (28), основным моментом обоснования теоремы 4 является доказательство сходимости ряда (28) при всех t вместе со своими производными до 4-го порядка включительно, а именно

$$u_{xxxx}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 f_n v_n(t) \exp(inx).$$

Ряд в правой части последнего равенства сходится в смысле сходимости в пространстве $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Действительно, справедливо неравенство

$$|v_n(t)|^2 \leqslant \frac{1}{(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0}.$$

С другой стороны,

$$(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0 \geqslant 1, \quad \text{если} \quad Q_0 \in [1, \infty),$$

и

$$(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0 \geqslant Q_0, \quad \text{если} \quad Q_0 \in (0, 1).$$

Поэтому имеют место оценки

$$|v_n(t)|^2 \leqslant \max\{1, 1/Q_0\},$$

т.е. $|v_n(t)|$ ограничены постоянной, которая не зависит от n.

В свою очередь, ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^8|f_n|^2$ сходится в силу предположения о том, что $f(x) \in \mathbb{H}_2^4$ ($f(x) \in \mathbb{H}_2^4$, если $f(x)$ имеет период 2π и $f(x) \in \mathbb{W}_2^4[0, 2\pi]$).

Нетрудно заметить, что система дифференциальных уравнений (23) имеет семейство состояний равновесия

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n^2 = 1 \quad \text{или} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 1. \tag{29}$$

Если выполнены соотношения (29), то $\varphi_n(t) = b_n t - ct + \psi_n$. Следовательно, система (22) имеет инвариантное многообразие A_∞, выделяемое равенством $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 1$. Решения, принадлежащие A_∞, имеют вид

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i\varphi_{n,0}(t)) \exp(inx), \tag{30}$$

где $\varphi_{n,0}(t) = b_n t - ct$, использованы равенства $f_n = \rho_n \exp(i\psi_n)$ и обозначение $b_n = -bn^2 - gn^4$.

Теорема 5. *Инвариантное многообразие A_∞ является глобальным аттрактором для решений КЗ (20), (21).*

Для доказательства последнего утверждения необходимо показать, что все решения (28) при $t \to \infty$ приближаются к A_∞. Пусть $u_n(t) = f_n v_n(t)$. Элементарно проверяется, что $\lim\limits_{t\to\infty} |u_n(t)| = |f_n|/\sqrt{Q_0}$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{Q_0} = 1.$$

Подчеркнём, что КЗ (20), (21) имеет глобальный аттрактор A_∞ бесконечной размерности. Функция $f(x) \in A_\infty$, если

$$\|f(x)\|^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)} = 2\pi,$$

т.е. аттрактор является сферой радиуса $\sqrt{2\pi}$ в пространстве $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Добавим, что это множество не только имеет бесконечную размерность, но и не является компактным (не является вполне ограниченным) (см. [24, гл. 2, §§ 6, 7]).

Последнее замечание в какой-то мере характеризует то обстоятельство, что КЗ (20), (21) не входит в класс абстрактных параболических уравнений.

Отметим ещё одну особенность аттрактора A_∞ КЗ (20), (21). Все решения на нем имеют вид, определённый равенством (30). При этом функции $u(t,x)$ таковы, что

$$\|u(t,x)\|_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)} = \sqrt{2\pi},$$

но норма $\|u(t,x)\|_{\mathbb{H}_2^4}$ может быть сколь угодно большой. Действительно, положим $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(inx)$, где $f_n = 1/\sqrt{k}$, если $n = \overline{1,k}$, и $f_n = 0$, если n иное. Тогда $\|f\|^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)} = 2\pi(1/k + \ldots + 1/k) = 2\pi$, т.е. $f(x)$ и, следовательно, $u(t,x)$, соответствующее этому начальному условию, принадлежат A_∞. В то же время

$$\|f\|^2_{\mathbb{H}_2^4} \geqslant \|f^{(4)}\|^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)} = 2\pi\left(\frac{1^8}{k} + \frac{2^8}{k} + \ldots + \frac{k^8}{k}\right) \geqslant 2\pi k^7 \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Заключение. В работах [7, 8] был изучен вопрос о существовании глобального аттрактора для традиционного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау, когда в уравнении (2) $d = g = 0$. Если $d > 0$, то получаем в целом аналогичные результаты (см. [7]), но тем не менее есть существенное различие. В обоих вариантах ($d = g = 0$ и $d > 0$) достаточно типична ситуация, когда глобальный аттрактор содержит несколько компонент, каждая из которых является инвариантным многообразием для решений рассматриваемой КЗ. Тем не

менее основную роль играет одна из таких компонент, которая соответствует $a_* = \max a_n$. "Большинство" решений приближается к ней и, следовательно, типична ситуация, когда динамику определяют те решения, которые принадлежат ей. В стандартном варианте, когда $d = g = 0$, $a > 0$, это либо нулевое состояние равновесия, либо пространственно-однородный цикл.

В обобщённом варианте при $d > 0$ ситуация часто иная. "Основной" компонентой может оказаться инвариантное многообразие размерности 3 или 5, или даже 7. При этом такая компонента заполнена (сформирована) пространственно неоднородными решениями. В ситуации общего положения эти решения зависят от t и будут почти-периодическими. Нетрудно привести пример, когда реализуется такая ситуация. Пусть $\gamma = -1$, $d = 1/2$, $a = -5/2$, $c = \sqrt{2}$, $b = 1$, $g = 0$. В этом случае $a_1 = a_2 = 1$, остальные $a_j < 0$. Наконец, $\omega_1 = -(\sqrt{2} + 1)$, $\omega_2 = -(\sqrt{2} + 4)$ и отношение $\omega_2 : \omega_1$ иррационально.

В слабодиссипативном варианте, если $a = d = 0$, получаем вариант КЗ (2), (3), у которой глобальный аттрактор является бесконечномерным. В ситуации общего положения все решения, принадлежащие ему, будут почти-периодическими функциями переменной t. В этом случае результаты анализа КЗ (2), (3) $(a = d = 0)$ непринципиально отличаются от результатов, полученных в работе [8], где анализу подлежал "классический" вариант нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау (1) в слабодиссипативной версии, когда $a = 0$.

Отметим также, что при анализе КЗ (2), (4) и (2), (5) следует ожидать аналогичных результатов. При $d > 0$ $(d = 0,\ a > 0)$ обе эти КЗ будут иметь конечномерные глобальные аттракторы, а при $a = d = 0$ – бесконечномерные. Тем не менее анализ КЗ (2), (4) и (2), (5) заслуживает отдельного изложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета по соглашению № 075-02-2022-886.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aranson I.S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 99–143.
2. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщённого кубического уравнения Шрёдингера // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1290–1299.
3. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Equilibrium states of a variational formulation for the Ginzburg–Landau equation // IOP Conf. Ser. J. of Physics. 2017. V. 937. P. 012025
4. *Куликов Д.А.* Обобщённый вариант вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестн. МИФИ. 2020. Т. 9. № 4. С. 329–337.
5. *Elmer F.J.* Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability // Physica D. 1988. V. 30. № 3. P. 321–341.
6. *Duan J., Hung V.L., Titi E.S.* The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation // ZAMP. 1996. V. 47. № 3. P. 432–455.
7. *Kulikov A., Kulikov D.* Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg–Landau equation // Math. Methods in the Appl. Sci. 2021. V. 44. № 15. P. 11985–11997.
8. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау // Автоматика и телемеханика. 2021. № 2. С. 94–110.
9. *Temam R.* Infinite Dimensional Systems in Mechanics and Physics. New York, 1997.
10. *Foias C., Sell G.R., Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. of Differ. Equat. 1998. V. 73. P. 309–353.
11. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М., 1989.
12. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physica D. 1985. V. 16. P. 155–183.
13. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Quelques proprietes des attracteurs pour l'equation de Kuramoto–Sivashinsky // C.R. Acad. Sci. Paris. 1984. V. 298. P. 23–25.
14. *Разгулин А.В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.

15. *Скубачевский А.В.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
16. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 33–50.
17. *Paidoussis M.* Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow. Part 1. Theory // J. of Fluid Mech. 1966. V. 26. № 4. P. 717–736.
18. *Куликов А.Н.* Бифуркации автоколебаний для сингулярно возмущённой краевой задачи гиперболического типа // Изв. РАЕН. Дифференц. уравнения. 2001. № 5. С. 74–76.
19. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Московского мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
20. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
21. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Тр. Московского мат. о-ва. 1970. Т. 23. С. 37–60.
22. *Segal I.* Nonlinear semigroups // Ann. of Math. 1963. V. 78. № 2. P. 339–364.
23. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М., 1977.
24. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 21.11.2021 г.
После доработки 05.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.